

基于区域划分四边剖分的体参数化模型构建

李跃虎

上海理工大学光电信息与计算机工程学院, 上海

收稿日期: 2025年3月17日; 录用日期: 2025年4月10日; 发布日期: 2025年4月18日

摘要

针对当前体参数化模型构建过程中需要进行模型分割的问题, 本文提出一种基于区域划分的四边剖分算法。首先定义平面多亏格几何域, 通过约束Delaunay三角化(Constrained Delaunay Triangulation, CDT)在给定几何域中生成背景网格, 利用CDT网格中的相关信息来构建内外轮廓连接线, 将平面多亏格几何域转化零亏格多子域集合, 并将每个子域转化为凸多边形, 然后对每个凸子域进行四边剖分, 最后对所有非空全四边形子域进行Coons插值生成参数化曲面, 并通过拉伸、扫描、旋转、放样等几何操作获得体参数化模型。结果表明该方法为CAD/CAE一体化提供了高鲁棒性的体参数化解决方案, 可有效支撑复杂工程模型的等几何分析需求。

关键词

等几何分析, 子域分解, 体参数化, 四边剖分

Volume Parameterized Modeling Based on Region-Divided Quadrilateral Meshing

Yuehu Li

School of Optical-Electrical and Computer Engineering, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Mar. 17th, 2025; accepted: Apr. 10th, 2025; published: Apr. 18th, 2025

Abstract

To address the model segmentation problem in current volumetric parameterization model construction, this paper proposes a quadrilateral decomposition algorithm based on regional partitioning. First, a planar multi-genus geometric domain is defined. A background mesh is generated within the given domain via Constrained Delaunay Triangulation (CDT). Utilizing information from the CDT mesh, connection lines between inner and outer contours are constructed to transform the

planar multi-genus domain into a collection of zero-genus subdomains. Each subdomain is then converted into a convex polygon. Subsequently, quadrilateral decomposition is performed on each convex subdomain. Finally, Coons interpolation is applied to all non-empty fully quadrilateral subdomains to generate parameterized surfaces. Volumetric parameterization models are obtained through geometric operations such as extrusion, sweeping, rotation, and lofting. The results demonstrate that this method provides a highly robust volumetric parameterization solution for CAD/CAE integration, effectively supporting the isogeometric analysis requirements of complex engineering models.

Keywords

Isogeometric Analysis, Domain Decomposition, Volume Parameterization, Four-Sided Subdivision

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

随着智能制造的深度发展,计算机辅助设计(Computer-Aided Design, CAD)与计算机辅助工程(Computer-Aided Engineering, CAE)一体化已成为实现产品设计与仿真闭环优化的关键技术路径。作为该领域的核心支撑技术,等几何分析(Isogeometric Analysis, IGA)通过采用统一的样条数学表达,理论上可消除传统有限元分析中几何模型与仿真模型间的数据鸿沟。然而,当前工业界广泛采用的边界表示(Boundary Representation, B-Rep)与构造实体几何(Constructive Solid Geometry, CSG)模型难以直接支持 IGA 流程[1]:在基于网格离散的传统 CAE 流程中,几何模型的重复网格化操作消耗约 80% 的设计周期时间,且在模型格式转换过程中易引发几何信息丢失,严重制约复杂产品的迭代优化效率。

尽管基于非均匀有理 B 样条(Non-Uniform Rational B-Splines, NURBS)的体参数化技术可通过参数域映射实现 CAD 与 CAE 的无缝衔接[2],其实际应用仍面临两大技术瓶颈:其一,传统张量积型体参数化要求参数域必须为零亏格(Genus-Zero)拓扑结构,难以表征具有内腔、孔洞等复杂特征的实际工程模型;其二,构建过程需人工干预控制点布局与参数化配置,导致建模效率低下。针对上述问题,本文提出一种基于区域划分四边剖分的体参数化模型构建方法:首先,针对给定有理 B 样条曲线轮廓,利用约束 Delaunay 内三角剖分(Constrained Delaunay Triangulation, CDT)的区域分解方法进行轮廓分解,得到零亏格轮廓区域集合;其次,对每个零亏格区域进行凸子域分解;继而结合四边剖分算法生成全四边形 NURBS 面片集合;最终通过几何操作构建体参数化模型。实验表明,本方法有效突破了传统张量积参数化的拓扑约束,可支持具有任意内部特征的几何建模,同时将参数化配置时间降低至传统方法的 32%。该成果为复杂机械结构的等几何分析提供了高效建模工具,对实现智能制造中的设计-仿真一体化具有重要工程意义。

2. 基于 CDT 的区域分解

本文以平面轮廓边界作为输入,并通过离散化边界曲线以及对离散点进行约束 Delaunay 三角化(CDT)来生成背景网格[3],然后基于此背景网格构建内外轮廓连接线[4]:

Step 1. 将轮廓曲线离散化为一系列离散点。接着,使用这些离散点进行约束 Delaunay 三角化(CDT),从而获得一个背景网格。该背景网格不仅满足 Delaunay 三角化的几何特性,还保留了原始轮廓曲线的边界条件。图 1(a)展示了这一过程的结果,其中背景网格准确反映了轮廓曲线的形状。

Step 2. 在得到的 CDT 背景网格中，我们筛选出那些具有三个相邻三角形的三角形单元，将其标记为切割三角形，并存储起来。这些切割三角形的外接圆所围成的区域被认为是潜在的内外轮廓线连接线生成区域。这是因为这些区域通常位于轮廓内部或外部的过渡地带，是理想的连接路径候选区域。图 1(b) 显示了这些选定的外接圆区域及其位置关系。

Step 3. 最后一步是在上一步骤确定的各个外接圆区域内生成内外轮廓连接线。通过对每个外接圆区域进行分析，我们可以找到最佳的连接线方案，确保内外轮廓之间的平滑过渡。这一步骤完成后，我们将获得最终的连接线布局，如图 1(c) 所示。这些连接线有效地将内外轮廓连为一体，形成了一个完整的几何模型。

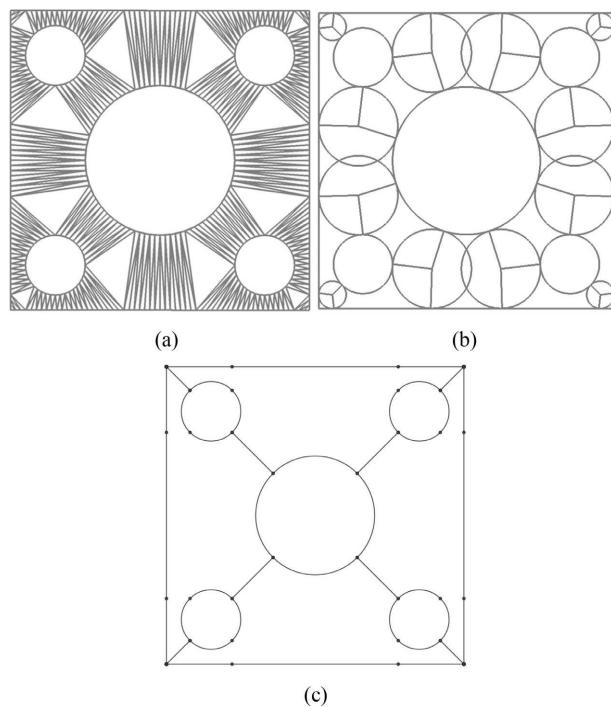


Figure 1. Connection line generation
图 1. 连接线生成

2.1. 约束 Delaunay 三角化构建背景网格

对于每一条轮廓边，首先计算边的长度，以最短边的长度作为离散基 L_{\min} ，然后基于 L_{\min} ，按照公式(1)计算每条边的离散度，得到离散度集合 $\{n_i\}$ 。

$$n_i = \frac{L_i}{L_{\min}} \times 10 \quad (1)$$

其中 i 为轮廓边的序号， n_i 为第 i 条轮廓边的离散度， L_i 为第 i 条轮廓边的长度。通过上述方法，可以均匀的将每条轮廓曲线进行离散，得到一组离散点。

利用离散点，构建 CDT 背景网格，获取内外轮廓线连接线生成区域三角形集合 $\{\Delta_i\}$ ，其获取原则为三角形的三个顶点分别属于不同的轮廓区域，然后对每个 Δ_i ，根据公式(2)，计算其对应的内外轮廓线连接线生成区域，最终获得内外轮廓线连接线生成区域集合 $\{\Omega_j\}$ 。

$$\Omega_j = r_i t \quad (2)$$

其中 t 为控制因子, 经测试当 $t=1.5$ 时, 能够在局部区域内包含更多的边界顶点, 且能够得到较为理想连接线生成区域; r_i 为 Δ_i 的外接圆半径。

2.2. 连线生成

为便于描述, 给出可视的概念, 其定义如下:

定义: 在多亏格几何域中, 若外轮廓顶点 p_i 与内轮廓顶点 q_j 之间的连线不穿越任何其他内外轮廓(即无拓扑遮挡), 则称 p_i 与 q_j 彼此可视, p_i 与 q_j 为可视对。

在获取内外轮廓线连接线生成区域 $\{\Omega_i\}$ 集合之后, 需要在每个内外轮廓线连接线区域生成最佳的连接线, 具体流程如下:

候选连接线初始化: 对于任意连接线生成区域 Ω_i , 基于可见性约束, 构建候选连接线集合 $L_{i,j}$ 。

复合权值计算: 针对候选连接线集合中的每条候选连接线 $L_{i,j}$, 计算该候选连接线的权值 $\omega_{ij} = q\delta_{ij} + pL_{ij}$, 其中, δ_{ij} 为区域 Ω_i 中第 j 条候选连接线的角度权值, L_{ij} 为区域 Ω_i 中第 j 个候选连接线 l_{ij} 的长度权值 $L_i = |l_{ij}|$, p 、 q 为控制函数, 经测试, 当 $p=0.5$ 、 $q=0.5$ 时, 能够得到较为理想的连接线。

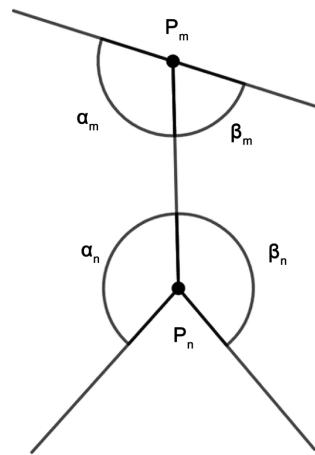


Figure 2. Angular weight
图 2. 角度权值

如图 2 为区域 Ω_i 中的任意一条候选连接线 l_{ij} , 端点分别为 P_m 、 P_n , 其角度权值 δ_{ij} 计算如公式(3)、公式(4)所示。

$$\varepsilon_{jm} = f(\alpha_m, \beta_m) = |\cos \alpha_m - \cos \beta_m| \quad (3)$$

$$\delta_{ij} = \varepsilon_{jm} + \varepsilon_{jn} \quad (4)$$

其中 ε_{jm} 为第 j 条候选连接线的 P_m 所在端点对应的角度余弦之差的绝对值。之后根据权值最小原则[5], 为每个区域选取最佳的剖分线, 得到候选连接线集合 $\{l_i\}$, 并提取所有的子域 $\{R_i\}$, 如图 3 所示。

针对每个子域 R_i , 若为非四边形子域, 且包含凹顶点, 则需要进行凹顶点消除处理。

3. 凸子域分解

在完成初始几何域分解后, 我们得到了若干子域集合 $\{R_i\}$, 如图 3 所示。然而, 部分子域可能包含凹顶点, 此类非凸特性可能导致后续计算的效率与稳定性显著下降, 因此需进一步执行凸子域分解: 通过凹顶点消除操作, 将含凹顶点的多边形, 转化为简单子域(即不包含凹顶点的几何域)。此过程的关键在

于凹顶点的判断与消除。下文将介绍如何非规则子域转化为可计算的凸子域集合，确保后续算法的鲁棒性与收敛性。

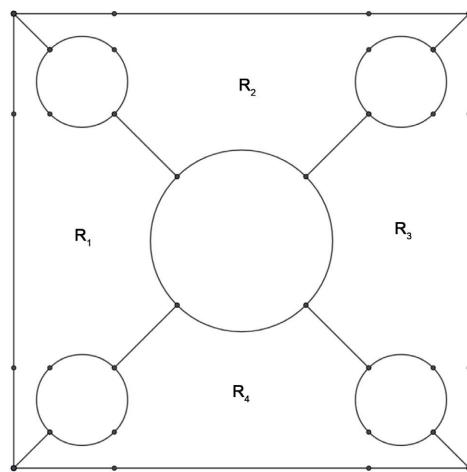


Figure 3. Area division
图3. 区域划分

3.1. 凸凹点判断

本文采用矢量叉的方法判断简单多边形顶点 $P_i = (X_i, Y_i)$ 的凹凸性[6]，设任意顶点，其前后顶点分别为 $P_{i+1} = (X_{i+1}, Y_{i+1})$ 、 $P_{i-1} = (X_{i-1}, Y_{i-1})$ 。作矢量叉积 $F = \overrightarrow{X_{i-1}X_i} \times \overrightarrow{X_iX_{i+1}}$ ，根据 F 的正负号判断点的凹凸性：
若 $F \geq 0$ ， P_i 为凸点；
若 $F < 0$ ， P_i 为凹点。

3.2. 凸多边形转化

为便于叙述，约定：图4，如果顶点 W 是顶点 V 的逆时针方向邻点，而顶点 U 是顶点 W 的逆时针方向邻点，则称 W 为 V 的正向邻点， U 为 V 的正向间隔点。反之：则称 V 为 W 的反向邻点， V 为 U 的反向间隔点[7]。对于曲线，由于需要计算其可视度，因此这里将曲线简化为首尾相连的直线即可，如图5 简化图5(b)中虚线所示。

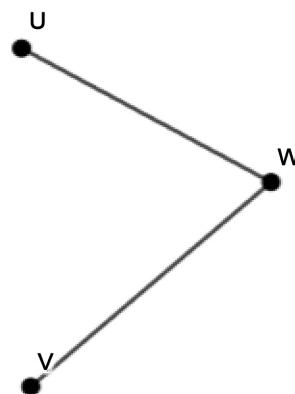


Figure 4. Interval point
图4. 间隔点

给出如下规定：

反向可视链：以顶点的反向间隔点为起点构成的可视顶点的连续序列，反之为正向可视链。如图 5(a)， P_{11} 的反向可视链为： $P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3 \rightarrow P_4$ ，的正向可视链为： $P_9 \rightarrow P_8 \rightarrow P_7 \rightarrow P_1$ 。

可视度：凹点 V 的正、反向可视链的长度的最大值称为 V 的可视度，图 5(a)中凹顶点 P_{11} 的可视度为 4。

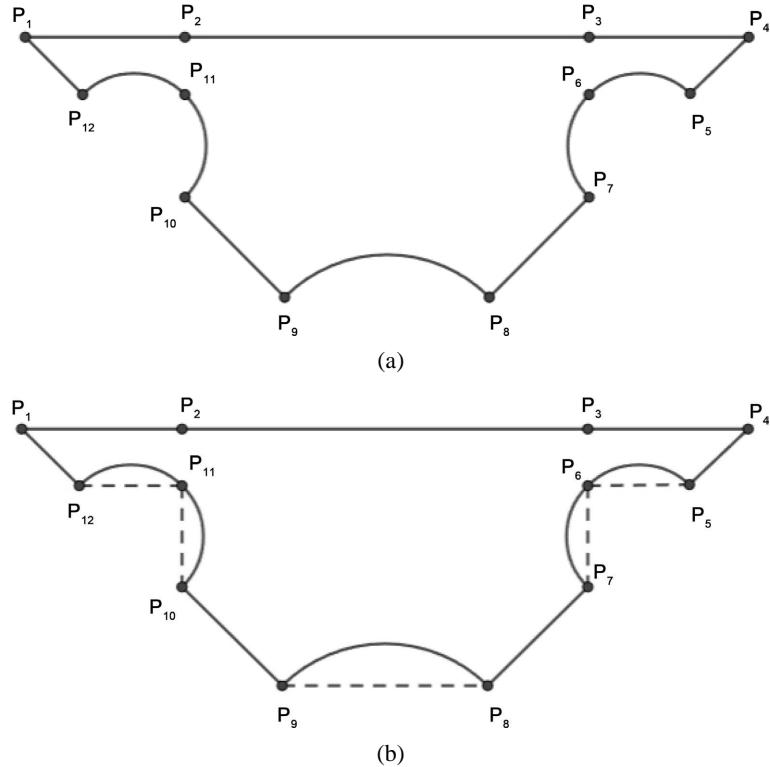


Figure 5. Simplified diagram
图 5. 简化图

遍历多边形所有凹顶点集合 P_{concave} ，计算各顶点的可视度，根据可视度集合，获得凹顶点消除的最佳剖分线，具体流程如下：

凹顶点集合构建：遍历多边形所有顶点，筛选出凹顶点集合凹顶点集合 P_{concave} 。

可视度计算：对每个凹顶点 $P_i \in P_{\text{concave}}$ ，获取其正反可视链，并根据可视链长度计算 P_i 的可视度。

端点选择：选取具有最大可视度的凹顶点 P_i 作为剖分线主端点，在 P_i 的可视链中，剖分线的另一端点(候选顶点)需满足 P_i 、 P_j 双向可见条件，排除被其他边阻挡的伪可见点，并且在满足可见性约束的 c 中，可见度为最大的顶点。每次剖分生成子多边形后，

终止条件：递归应用上述规则直至满足子多边形无凹顶点(即成为凸多边形)或子多边形退化为四边形(四条边界边)图 5(a)分解结果如图 6 所示。

图 3 对应的简单子域如图 7 所示。

4. 体参数化模型构建

将复杂几何域分解为不包含任何凹顶点的简单子域之后，对每个简单子域进行四边剖分，本文基于

用于体参数化模型的曲多边形全四边剖分[8]方法, 对所获取的简单子域进行全四边自动剖分, 得到全四边形几何域集合, 然后通过 Coons 插值, 得到全四边曲面, 然后通过几何操作(如拉伸), 构建体参数化模型。

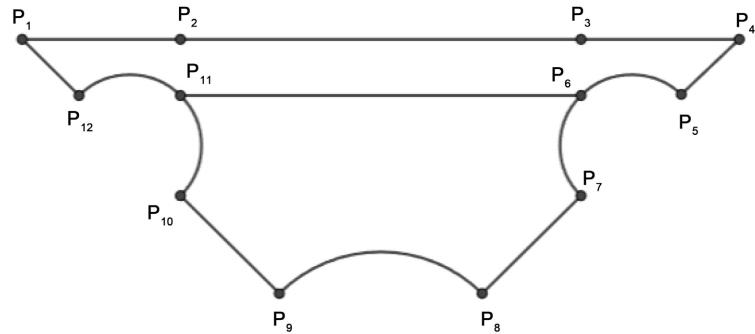


Figure 6. Convex vertex elimination
图 6. 消除凸点

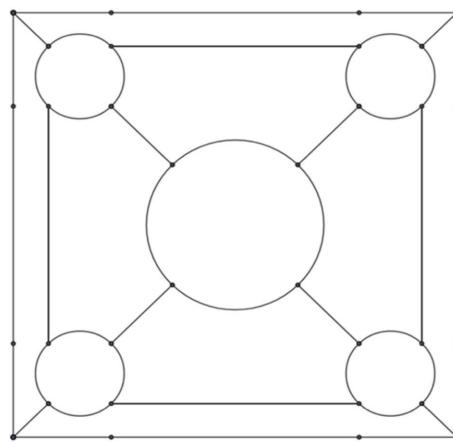


Figure 7. Primitive subdomain
图 7. 简单子域

4.1. 四边剖分

本文提出的凸子域四边剖分方法, 基于动态区域分解与优先级剖分线的选择机制, 对凸子域几何进行四边剖分, 得到全四边几何域集合。对于一个简单子域, 其四边剖分流程如下:

- 输入: 凸子域集合 L
- 输出: 四边形集合 Q
- 初始化: 若 L 非空, 选取当前最大索引子域 L_{now} ;
- 剖分线生成: 针对 L_{now} , 生成所有可行剖分线集合 V , 按权值排序(与 2.2 节连接线权值计算方法一致), 记录剖分方式数目 m , 初始选择剖分线 $k=1$;
- 剖分可行性判断:
 - 若 $m=0$, 标记 L_{now} 无法剖分, 跳过;
 - 若 $k > m$, 回溯至上一子域 L_{front} , 更新 $L_{\text{now}} = L_{\text{front}}$ 且 $k = k+1$ 。
- 子域剖分: 根据剖分线 k 生成一条 NURBS 曲线, 将 L_{now} 分割为两个新子域和 L_{temp1} 、 L_{temp2} , 并从 L 中移除 L_{now} 。

子域分类:

若新子域为凸四边形, 存入 Q ;

若新子域为五边形及以上, 重新加入 L 尾部;

若子域存在边数小于等于 3, 则触发回溯机制。

递归执行: 重复步骤 1~5, 直至 L 为空, 输出 Q 。

图 7 四边剖分结果如图 8(a)所示, 所有的几何域均为四条边, 随后通过 Coons 插值, 得到全四边 NURBS 面片如图 8(b)所示。

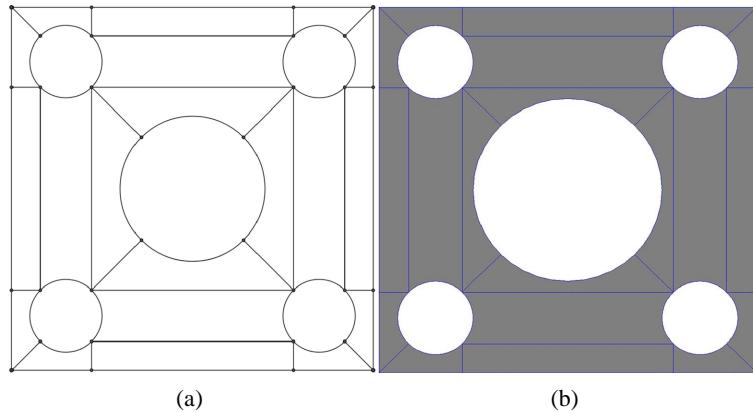


Figure 8. Four-Sided subdivision

图 8. 四边剖分

4.2. 体参数化模型构建

非均匀有理 B 样条(NURBS)是在 B 样条的基础上增加了权重的概念。NURBS 不仅继承了 B 样条的所有优良特性, 如局部支持性和连续性, 还能够精确地表示圆锥曲线(例如圆形、椭圆等), 这赋予了它更高的灵活性[9]。通过调整 NURBS 曲线的控制点及其权重, 可以实现对模型形状更加精细的控制, 从而得到更为精确的几何模型。

对与 u 方向为次数 p 、 v 方向次数为 q 、 w 方向次数为 r 的 NURBS 体, 其表达式如式(4):

$$V(u, v, w) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^l N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) N_{k,r}(w) \omega_{i,j,k} P_{i,j,k}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^l N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) N_{k,r}(w) \omega_{i,j,k}} \quad (4)$$

其中 $N_{i,p}(u)$ 、 $N_{j,q}(v)$ 、 $N_{k,r}(w)$ 分别是次数为 p 、 q 、 r 的基函数, $P_{i,j,k}$ 为 NURBS 体 u 方向上序号为 i 、 v 方向上序号为 j 、 w 方向上序号为 k 的控制点, $\omega_{i,j,k}$ 为该控制点的权重。

在本文提出的建模方法中, 首先利用全四边剖分算法对给定的轮廓进行离散化处理, 并生成一个由全四边形组成的网格。基于这个网格, 我们可以定义出相应的路径。接下来, 通过拉伸几何操作, 沿着指定路径对这些四边形面片进行拉伸, 最终形成体参数化的拉伸体模型。图 9 展示了这一过程。类似地, 我们还可以应用其他几何变换操作, 如放样(lofting)和旋转(revolving), 来生成不同类型的体参数化模型。

5. 实例

本文提出的区域划分四边剖分算法实施流程如图 9 所示。基于轮廓曲线定义与约束 Delaunay 三角化(CDT)构建背景网格, 利用网格拓扑信息生成内外轮廓连接线, 实现多亏格域向零亏格凸子域的转化。通过几何约束将各子域转化为凸多边形后, 采用四边剖分算法完成全四边形网格划分, 结合 Coons 曲面插

值与拉伸/扫描/旋转等几何操作构建体参数化模型。图 10 所示案例验证了该算法在平面模型中的实施效果, 通过智能连接线生成与凸子域分解的协同机制, 实现了复杂轮廓域的全四边剖分建模。

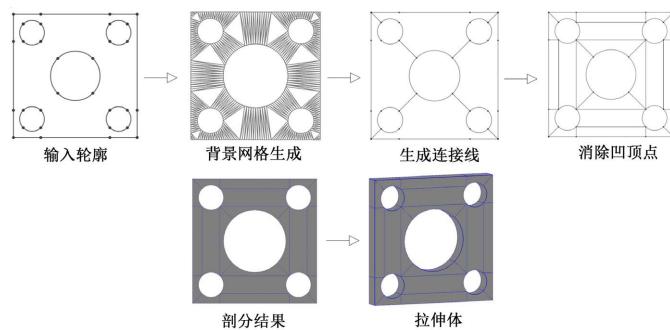


Figure 9. Construction process of volume parameterized model
图 9. 体参数化模型构建过程

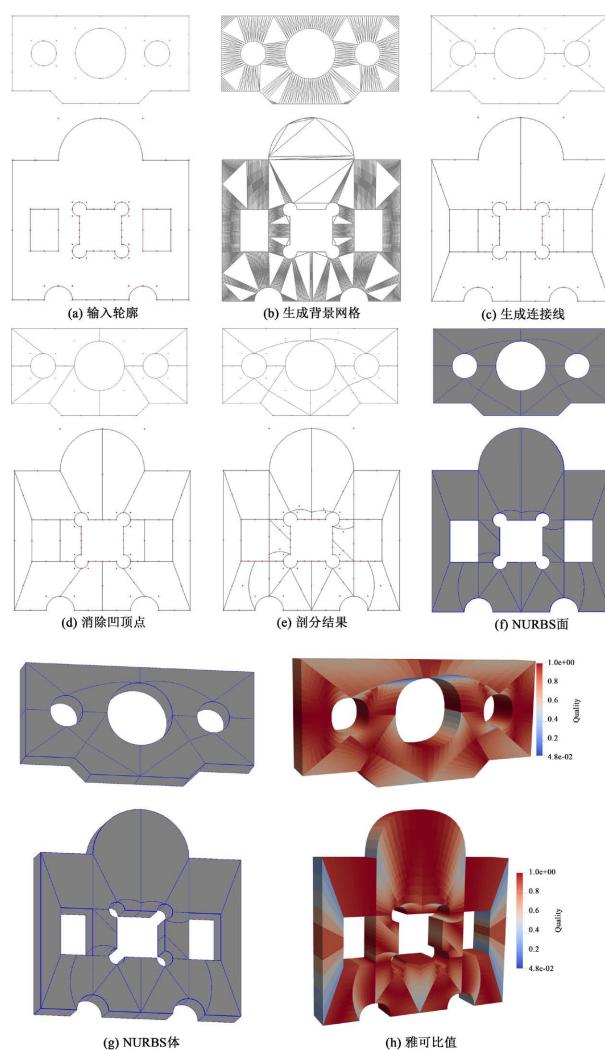


Figure 10. Algorithm example
图 10. 算法实例

6. 结论

中本文针对复杂拓扑结构体参数化建模中存在的拓扑分解依赖人工干预、多子域参数相容性不足等关键问题，提出一种基于区域划分四边剖分的体参数化模型构建方法。利用 CDT 背景网格指导，进行区域划分，将复杂几何域分解为简单几何域，然后对每个简单几何域进行四边剖分，得到全四边形几何域，最后利用 Coons 插值，生成全四边形 NURBS 曲面。

实验结果表明，本方法能够高效地将复杂几何域分解为全四边形几何域，通过角度与连接线的长度，控制剖分线的生成，能够很好地避免尖点的产生，满足了体参数化的建模需求。

参考文献

- [1] Massarwi, F., Antolin, P. and Elber, G. (2019) Volumetric Untrimming: Precise Decomposition of Trimmed Trivariate into Tensor Products. *Computer Aided Geometric Design*, **71**, 1-15. <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2019.04.005>
- [2] Aigner, M., Heinrich, C., Jüttler, B., Pilgerstorfer, E., Simeon, B. and Vuong, A. (2009) Swept Volume Parameterization for Isogeometric Analysis. *13th IMA International Conference*, York, 7-9 September 2009, 19-44. https://doi.org/10.1007/978-3-642-03596-8_2
- [3] 杨鑫. 四边形网格生成技术研究[D]: [硕士学位论文]. 大连: 大连理工大学, 2019.
- [4] 陈建军, 郑耀, 陈立岗, 等. 非结构化四边形网格生成新算法[J]. 中国图象图形学报, 2008(9): 1796-1803.
- [5] 徐岗, 舒来新, 朱亚光, 等. 边界简化与多目标优化相结合的高质量四边形网格生成[J]. 中国图象图形学报, 2018, 23(1): 61-73.
- [6] 宋晓眉, 程昌秀, 周成虎. 简单多边形顶点凹凸性判断算法综述[J]. 国土资源遥感, 2011(3): 25-31.
- [7] 贺怀清, 杨鹏. 一种凹多边形凸分解的全局剖分算法[J]. 中国民航大学学报, 2011, 29(3): 52-55.
- [8] 陈龙, 冯文斌, 谢宇洋, 等. 曲多边形四边剖分算法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2022, 34(5): 794-803.
- [9] 邝传基. 基于平面四边剖分的体参数化模型快速构建[J]. 建模与仿真, 2023, 12(1): 451-460.