

二维各向异性SSH声学晶格的高阶拓扑角态调控与实验表征

周 凯

上海理工大学光电信息与计算机工程学院, 上海

收稿日期: 2025年4月2日; 录用日期: 2025年5月2日; 发布日期: 2025年5月12日

摘 要

近年来, 声子晶体、超表面及超材料等人工微结构的研究取得显著进展, 揭示了一系列新颖的物理现象。其中, 支持拓扑边界态的人工声学系统的出现, 标志着声学人工结构研究迈入新阶段。受凝聚态物理中拓扑序研究的启发, 光子晶体、力学系统及准周期结构的拓扑特性被广泛探索。作为一类超越传统金属/绝缘体分类的新物态, 声学拓扑绝缘体因其非平庸边界模式展现出无后向散射与缺陷免疫的独特声波传输特性, 为声学功能器件的创新设计提供了新范式。文章聚焦于高阶拓扑绝缘体的典型代表——二维Su-Schrieffer-Heeger (SSH)模型, 系统阐释其拓扑能带特性, 提出一种新型二维SSH声学晶格结构。通过数值仿真成功观测到角态局域化现象, 并在实验上首次实现角态声压分布的可控激发与表征。该研究为拓扑声学器件的实际应用奠定了理论与实验基础。

关键词

声子晶体, 高阶拓扑, 拓扑绝缘体, 对称性

Manipulation and Experimental Characterization of Higher-Order Topological Corner States in Two-Dimensional Anisotropic SSH Acoustic Lattices

Kai Zhou

School of Optical-Electrical and Computer Engineering, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Apr. 2nd, 2025; accepted: May 2nd, 2025; published: May 12th, 2025

文章引用: 周凯. 二维各向异性 SSH 声学晶格的高阶拓扑角态调控与实验表征[J]. 建模与仿真, 2025, 14(5): 161-167.
DOI: 10.12677/mos.2025.145382

Abstract

In recent decades, the study of artificial microstructures such as phononic crystals, metasurfaces, and metamaterials has achieved remarkable progress, unveiling a series of novel physical phenomena. The emergence of artificial acoustic systems supporting topological boundary states has propelled the research on acoustic structures to new heights. Inspired by developments in condensed matter physics, extensive investigations have been conducted on the topological properties of photonic crystals, mechanical systems, and quasiperiodic structures. As a novel phase of matter transcending conventional metal/insulator classifications, acoustic topological insulators exhibit unique sound wave transport characteristics with nontrivial boundary modes, including backscattering suppression and defect immunity, offering innovative paradigms for designing advanced acoustic devices. This work focuses on the two-dimensional Su-Schrieffer-Heeger (SSH) model—a prototypical higher-order topological insulator. We systematically elucidate its topological band properties and propose a novel 2D SSH-inspired acoustic lattice configuration. Numerical simulations successfully demonstrate corner-state localization, while subsequent acoustic experiments achieve the first controlled excitation and characterization of corner-mode pressure distributions. This study establishes both theoretical and experimental foundations for practical applications of topological acoustic devices.

Keywords

Phononic Crystals, Higher-Order Topology, Topological Insulator, Symmetry

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

拓扑学与物理学的深度融合为凝聚态体系带来了革命性认知。自整数量子霍尔效应[1]发现以来,拓扑不变量作为物态分类的核心参量,揭示了电子系统在无序扰动下的鲁棒性边界态[2]-[5]。这种拓扑保护特性迅速拓展至光子晶体[6]、声子晶体[7]等人工微结构体系,催生了拓扑光子学与拓扑声学等交叉领域。近年来,高阶拓扑绝缘体(Higher-Order Topological Insulators, HOTIs) [8]-[10]概念的提出,进一步突破了传统拓扑分类的维度限制: d 维 n 阶拓扑绝缘体支持 $(d-n)$ 维边界态(如三维二阶绝缘体可产生一维铰链态与零维角态),其拓扑性质由多极矩量子化描述[11]-[13]。这种维度递阶的拓扑响应为新型波调控提供了更精细的操控维度。

作为HOTIs的典型代表,二维Su-Schrieffer-Heeger (SSH)模型[14]-[16]因其简洁的晶格结构与丰富的拓扑相图备受关注。本文聚焦于二维SSH模型这一典型高阶拓扑体系,通过构建新型声学晶格结构,系统研究其拓扑能带特性与角态局域化现象,并首次在实验上实现对角态声压分布的可控激发与表征,为拓扑声学在抗干扰声传输、高精度声传感等领域的应用提供了理论与实验依据。

2. 电子能带拓扑

2.1. 拓扑绝缘体

按照导电性质的不同,材料可分为“金属”和“绝缘体”两大类;而更进一步,根据电子态的拓扑

性质的不同，“绝缘体”和“金属”还可以进行更细致的划分。拓扑绝缘体就是根据这样的新标准而划分的区别于其他普通绝缘体的一类绝缘体。

拓扑绝缘体是指这样一种材料：材料的内部是绝缘体，表面却允许电荷移动，其表面的特殊量子态，即拓扑表面态，是由其能带结构的特殊拓扑性质决定的，其结构如图 1 所示。在导体内部，如通常的绝缘体一样，费米能级在导带和价带之间；然而，在拓扑绝缘体的表面上，存在着特殊的量子态，这些量子态位于材料能带结构的带隙之中，从而允许导电。这些特殊的量子态可以用拓扑不变量(例如 Z_2 拓扑不变量)来表征。

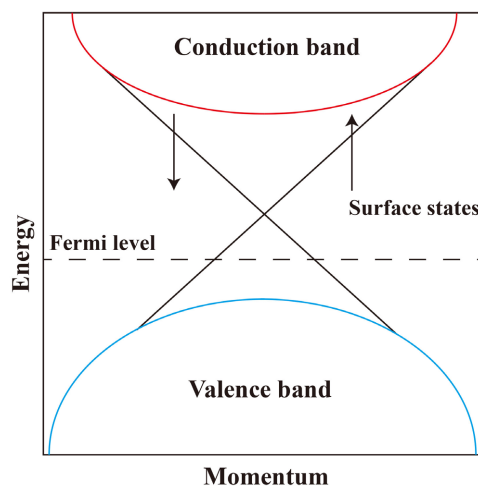


Figure 1. Diagram of the band structure of a topological insulator
图 1. 拓扑绝缘体的能带结构图

拓扑在拓扑绝缘体中具有描述表面态的特殊性、保护导电边缘态以及分类与表征等重要含义。这些特性使得拓扑绝缘体在电子学、量子计算和光电器件等领域具有广泛的应用前景和潜在价值。

2.2. 高阶拓扑绝缘体

拓扑绝缘体的研究基础上，人们进一步发现了高阶拓扑绝缘体，高阶拓扑物态的“高阶”体现在其体-边对应关系上。对 d 维的传统拓扑绝缘体和拓扑超导体，我们知道其具有 $(d-1)$ 维的无能隙边界态。如三维的拓扑绝缘体具有二维的狄拉克表面态，二维的拓扑绝缘体具有一维的螺旋边界态。而对一个 d 维的 n 阶拓扑物态，其具有 $(d-n)$ 维的无能隙边界态，其中，如图 2 所示。例如，二维二阶拓扑绝缘体具有零维的边界态，而三维二阶拓扑绝缘体具有一维的无能隙边界态。根据这个定义，传统的拓扑绝缘体也被称为一阶拓扑绝缘体。

近年来，随着对高阶拓扑绝缘体研究的不断深入，人们已经发现了一些新的高阶拓扑物态和现象。例如，中国科学技术大学的乔振华教授课题组与美国得克萨斯大学奥斯汀分校的牛谦教授合作，在理论预言低维体系高阶拓扑绝缘体方面取得了新突破。他们提出了一种新的方案来实现从一阶到二阶拓扑绝缘体的操控，并成功观测到了二维二阶拓扑绝缘体的角态。高阶拓扑绝缘体也具有许多潜在的应用价值。例如，在电子学领域，由于其表面态的独特性质，高阶拓扑绝缘体可用于制造高性能的电子器件。在量子计算领域，二阶拓扑超导体中存在的马约拉纳零模为拓扑量子计算提供了一个新的平台。此外，高阶拓扑绝缘体还可用于光电子学、量子通信等领域。

综上所述，高阶拓扑绝缘体是一种具有独特性质和应用前景的新型量子态。随着对其研究的不断深入和技术的不断发展，相信未来会有更多的高阶拓扑绝缘体被发现并应用于实际生活中。

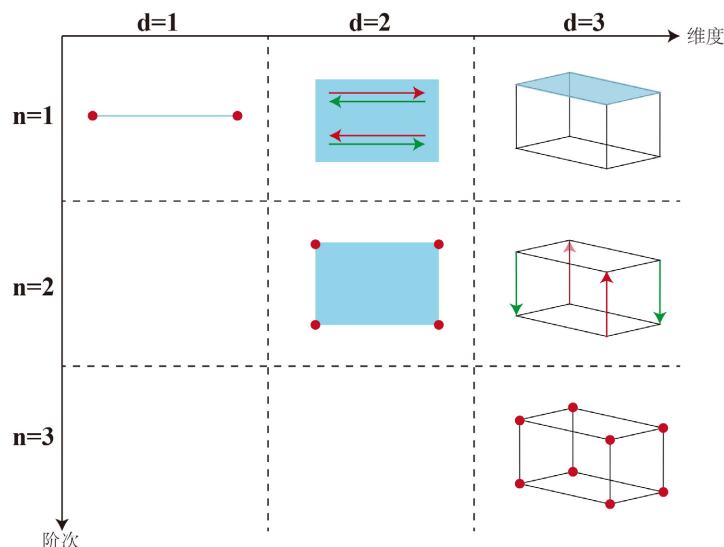


Figure 2. Schematic diagram of the boundary state of a higher-order topological insulator

图 2. 高阶拓扑绝缘体边界态示意图

3. 二维方形晶格 SSH 模型

3.1. 二维 SSH 模型简介

SSH 模型最初由 W. P. Su、J. R. Schrieffer 和 A. J. Heeger 三位科学家于 1979 年提出，用于描述一维二聚化晶格中的电子跃迁。该模型揭示了一维材料中的拓扑性质，特别是边界态的存在。随后，该模型被拓展到二维，在二维 SSH 模型中，晶格由两种不同的原子(或位点)组成，这些原子通过键结相互连接，与一维 SSH 模型类似，二维 SSH 模型中的原子间也存在两种不同的跃迁：胞内跃迁与胞间跃迁，其结构如图 3(a)，其动量空间哈密顿量为：

$$H(k) = \begin{pmatrix} 0 & w + ve^{-ik_x} & w + ve^{-ik_y} & 0 \\ w + ve^{ik_x} & 0 & 0 & w + ve^{-ik_y} \\ w + ve^{ik_y} & 0 & 0 & w + ve^{-ik_x} \\ 0 & w + ve^{ik_y} & w + ve^{ik_x} & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

其能带结构图如图 3(b)所示，当我们取 $w = 2$, $v = 1$ 时，即当胞内跃迁大于胞间跃迁时，结果如图 3(c)所示，该结构没有边界态，属于平庸相；当我们取 $w = 1$, $v = 2$ 时，即当胞内跃迁小于胞间跃迁时，结果如图 4(d)所示，该结构出现二重简并的边界态，属于非平庸相。

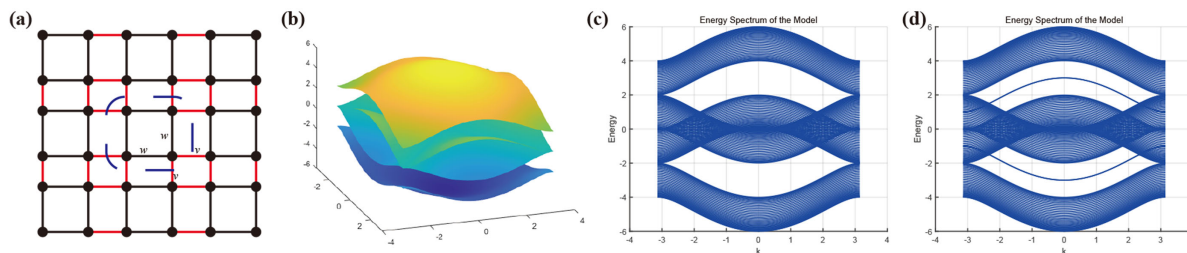


Figure 3. (a) Schematic diagram of the boundary state of a higher-order topological insulator; (b) Two-dimensional SSH band structure diagram; (c) Projected bands of the mere phase; (d) Projected bands of topological phases

图 3. (a) 高阶拓扑绝缘体边界态示意图；(b) 二维 SSH 能带结构图；(c) 平庸相的投影能带；(d) 拓扑相的投影能带

3.2. 二维各向异性 SSH 模型的拓扑边缘态与角态

根据上节内容，我们在本文中重新提出了一种二维 SSH 模型，其哈密顿量为：

$$H(k_x, k_y) = \begin{pmatrix} 0 & w_x + v_x e^{-ik_x} & w_y + v_y e^{-ik_y} & 0 \\ w_x + v_x e^{ik_x} & 0 & 0 & -w_y + v_y e^{-ik_y} \\ w_y + v_y e^{ik_y} & 0 & 0 & w_x - v_x e^{-ik_x} \\ 0 & -w_y + v_y e^{ik_y} & w_x - v_x e^{ik_x} & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

其中， w_x 、 w_y 代表 x 、 y 方向上的胞内跃迁强度； v_x 、 v_y 代表 x 、 y 方向上的胞间跃迁强度。

此时，边缘态的产生条件为：当 $v_x > w_x$ (胞间跃迁强度大于胞内跃迁强度) 时， x 方向处于拓扑非平庸态，开放边界下沿 x 方向出现局域边缘态；当 $v_y > w_y$ 时， y 方向处于拓扑非平庸态，开放边界下沿 y 方向出现局域边缘态。角态的诞生则需要同时满足 $v_x > w_x$ ， $v_y > w_y$ ，此时 x 和 y 方向均处于拓扑非平庸态，开放边界下在四角形成局域角态。这些态的存在性可通过能带结构、电荷极化分布及声学实验直接验证，为拓扑绝缘体在低耗散传输和量子计算中的应用提供了理论基础。

4. 二维 SSH 模型的仿真与声学实验

4.1. 二维各向异性 SSH 模型的 COMSOL 仿真

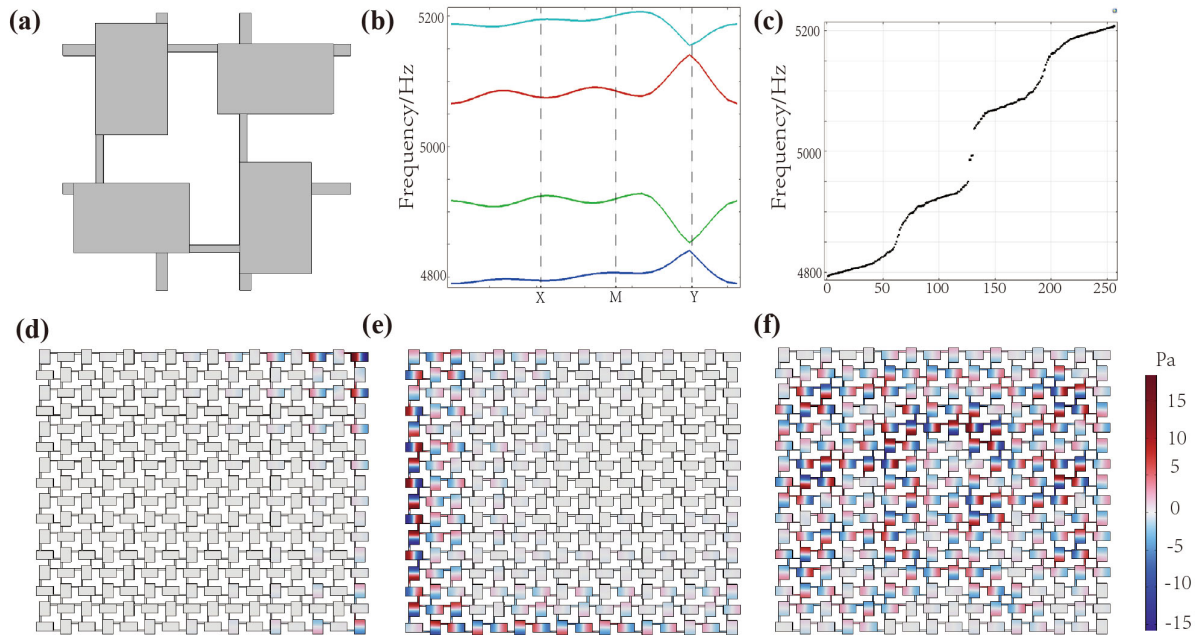


Figure 4. (a) Schematic diagram of the protocellular model used in the calculation; (b) Structural drawings with simulated calculations; (c) Simulated density of states (DSs) with 8×8 protocells; (d) Schematic diagram of angular acoustic pressure field distribution; (e) Schematic diagram of the distribution of the acoustic pressure field in the marginal state; (f) Schematic diagram of the distribution of the acoustic pressure field of the body

图 4. (a) 计算中使用的原胞模型示意图；(b) 模拟计算的带结构图；(c) 模拟计算的态密度分布图，计算中使用了 8×8 个原胞；(d) 角态声压场分布示意图；(e) 边缘态声压场分布示意图；(f) 体态声压场分布示意图

为了在仿真软件 COMSOL 中，实现哈密顿量为式(2)的二维 SSH 模型，我们通过使用耦合声学谐振腔结构来实现，单个谐振腔代表单一格点，假设谐振腔的外壁是极薄的，并满足刚性边界条件，则声波在共振腔内部会以驻波的形式传播并不产生耗散。通过正交排列两个相同的谐振腔，并借助连接谐振腔

的耦合管的左右偏移来调控两个谐振腔之间的跃迁相位。而耦合强度则可以通过调节耦合管的横截面宽度以及其对于谐振腔中心的位置来调节,具体结构如图 4(a),其中谐振腔的长为 34.5 mm,宽为 21.5 mm,高为 15 mm,壁厚为 6 mm, x 、 y 方向上胞间耦合腔长度为 3.5 mm,胞内耦合腔长度为 2.3 mm。

我们在 x 方向和 y 方向添加周期性边界条件,计算其能带结构,如图 4(b)所示,同时整体能带结构关于 5000 Hz 呈镜面对称。还计算了该模型的态密度分布,如图 4(c)所示。在其中我们选择有代表性的角态,边缘态与体态的声压频率(角态是 4986 Hz,边界态是 4950 Hz,体态是 4807 Hz),最终在 COMSOL 中得到了如图 4(d)~(f)所示的声压场分布图,其清晰地展示了本研究这种结构下二维 SSH 模型的角态、边界态及体态,说明该声学谐振腔模型可以很好地仿真模拟二维 SSH 模型。

4.2. 声学实验

我们使用声学系统作为实验的研究平台,如图 5(a)所示,我们使用 3D 打印技术制作了尺寸为 8×8 单元格的平面声学样品(打印材料为 R4600,硬度为 145 (ASTM D 2240),相对较高,因此声学谐振腔 6 mm 的厚度可以很好地模拟硬壁)。为了扫描,每个谐振腔上都有一个孔(不使用时密封),用以插入声源和麦克风。实验设置如图 5(b)所示。为了得到样品体态,边界态和角态的声压分布,我们使用 4807 Hz、4950 Hz 和 4986 Hz 的单频声压分别在样品的主体、边缘和角落处进行激发,并收集每次激发后整个样品的声压场数据,通过 Matlab 软件将收集到的数据进行整理绘图,最终得到如图 5(c)~(e)所示的声压分布图,与图 4(d)~(f)结果吻合。

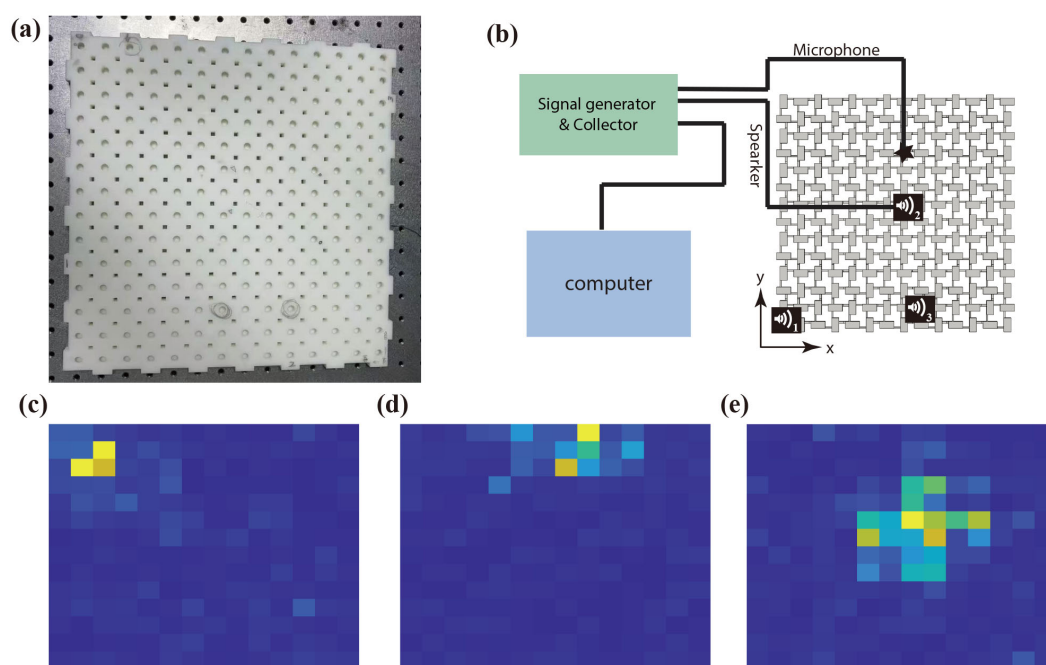


Figure 5. (a) Planar acoustic sample; (b) Layout of the positions of the sound source and detection microphone (detector); (c) Angular state measurement sound pressure field; (d) Boundary state measurement sound pressure field; (e) Volume state measurement sound pressure field

图 5. (a) 平面声学样品; (b) 声源和探测麦克风(即探测器)的位置布局; (c) 角态测量声压场; (d) 边界态测量声压场; (e) 体态测量声压场

5. 总结

本文系统研究了基于二维 SSH 模型的高阶拓扑声学绝缘体,聚焦于其角态局域化现象的理论设计与

实验实现。通过构建各向异性二维 SSH 声学晶格结构, 阐明了其非平庸拓扑能带特性及角态产生的条件(胞间跃迁强度需在 x 、 y 方向同时超过胞内跃迁)。数值仿真中, 利用 COMSOL 软件模拟了角态、边缘态与体态的声压场分布, 验证了角态在晶格四角的局域化特征。进一步通过 3D 打印声学样品与可控声源激发实验, 首次在声学系统中实现了角态的可观测声压分布, 实验结果与仿真高度吻合。该研究不仅拓展了高阶拓扑态在声学领域的应用边界, 还为开发抗干扰声传输器件和高精度声学传感器提供了理论与实验依据。

参考文献

- [1] Zhang, C., Chen, Z.Y., Zhang, Z. and Zhao, Y.X. (2023) General Theory of Momentum-Space Nonsymmorphic Symmetry. *Physical Review Letters*, **130**, Article ID: 256601. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.130.256601>
- [2] Chen, Z.Y., Zhang, Z., Yang, S.A. and Zhao, Y.X. (2023) Classification of Time-Reversal-Invariant Crystals with Gauge Structures. *Nature Communications*, **14**, Article No. 743. <https://doi.org/10.1038/s41467-023-36447-7>
- [3] Zhao, Y.X., Chen, C., Sheng, X. and Yang, S.A. (2021) Switching Spinless and Spinful Topological Phases with Projective PT Symmetry. *Physical Review Letters*, **126**, Article ID: 196402. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.126.196402>
- [4] Xue, H., Chen, Z.Y., Cheng, Z., Dai, J.X., Long, Y., Zhao, Y.X., et al. (2023) Stiefel-Whitney Topological Charges in a Three-Dimensional Acoustic Nodal-Line Crystal. *Nature Communications*, **14**, Article No. 4563. <https://doi.org/10.1038/s41467-023-40252-7>
- [5] Meng, Y., Lin, S., Shi, B., Wei, B., Yang, L., Yan, B., et al. (2023) Spinful Topological Phases in Acoustic Crystals with Projective PT Symmetry. *Physical Review Letters*, **130**, Article ID: 026101. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.130.026101>
- [6] Herzog-Arbeitman, J., Song, Z., Elcoro, L. and Bernevig, B.A. (2023) Hofstadter Topology with Real Space Invariants and Reentrant Projective Symmetries. *Physical Review Letters*, **130**, Article ID: 236601. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.130.236601>
- [7] Liu, Z., Wei, G., Wu, H. and Xiao, J. (2023) Möbius Edge Band and Weyl-Like Semimetal Flat-Band in Topological Photonic Waveguide Array by Synthetic Gauge Flux. *Nanophotonics*, **12**, 3481-3490. <https://doi.org/10.1515/nanoph-2023-0311>
- [8] Shiozaki, K., Sato, M. and Gomi, K. (2015) Z_2 Topology in Nonsymmorphic Crystalline Insulators: Möbius Twist in Surface States. *Physical Review B*, **91**, Article ID: 155120. <https://doi.org/10.1103/physrevb.91.155120>
- [9] Zhao, Y., Huang, Y.X. and Yang, S.A. (2020) Z_2 -Projective Translational Symmetry Protected Topological Phases. *Physical Review B*, **102**, Article ID: 161117.
- [10] Xue, H., Wang, Z., Huang, Y., Cheng, Z., Yu, L., Foo, Y.X., et al. (2022) Projectively Enriched Symmetry and Topology in Acoustic Crystals. *Physical Review Letters*, **128**, Article ID: 116802. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.128.116802>
- [11] Li, T., Du, J., Zhang, Q., Li, Y., Fan, X., Zhang, F., et al. (2022) Acoustic Möbius Insulators from Projective Symmetry. *Physical Review Letters*, **128**, Article ID: 116803. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.128.116803>
- [12] Long, Y., Wang, Z., Zhang, C., Xue, H., Zhao, Y.X. and Zhang, B. (2024) Non-abelian Braiding of Topological Edge Bands. *Physical Review Letters*, **132**, Article ID: 236401. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.132.236401>
- [13] Jiang, C., Song, Y., Li, X., Lu, P. and Ke, S. (2023) Photonic Möbius Topological Insulator from Projective Symmetry in Multiorbital Waveguides. *Optics Letters*, **48**, 2337-2340. <https://doi.org/10.1364/ol.488210>
- [14] Chen, Z.Y., Yang, S.A. and Zhao, Y.X. (2022) Brillouin Klein Bottle from Artificial Gauge Fields. *Nature Communications*, **13**, Article No. 2215. <https://doi.org/10.1038/s41467-022-29953-7>
- [15] Tao, Y., Yan, M., Peng, M., Wei, Q., Cui, Z., Yang, S.A., et al. (2024) Higher-Order Klein Bottle Topological Insulator in Three-Dimensional Acoustic Crystals. *Physical Review B*, **109**, Article ID: 134107. <https://doi.org/10.1103/physrevb.109.134107>
- [16] Zhu, Z., Yang, L., Wu, J., Meng, Y., Xi, X., Yan, B., Gao, Z., et al. (2024) Brillouin Klein Space and Half-Turn Space in Three-Dimensional Acoustic Crystals. *Science Bulletin*, **69**, 2050-2058. <https://doi.org/10.1016/j.scib.2024.05.003>