

基于融合算法的长方形均匀磁场线圈设计

梁家茂¹, 彭禹琦²

¹上海理工大学光电信息与计算机工程学院, 上海

²广州南方学院会计学院, 广东 广州

收稿日期: 2025年7月13日; 录用日期: 2025年8月5日; 发布日期: 2025年8月15日

摘要

传统的长方形亥姆霍兹线圈已经难以满足实际的工程需求, 针对这一迫切的问题, 本文提出了一种基于 PSO-GWO 融合算法和目标场点相结合的均匀线圈设计方法。本文首先需要明确线圈的待优化参数, 并引入高阶求导和磁场偏差率来构建目标函数; 然后, 采用 PSO-GWO 融合算法来对目标函数进行寻优求解; 最后, 得到优化后的线圈参数之后, 本文根据线圈参数建立相对应的有限元仿真模型, 并对均匀度和均匀体积进行了比较分析, 验证了优化结果的可信度。

关键词

均匀线圈, PSO-GWO 算法, 有限元仿真, 目标场点法

Design of Rectangular Uniform Magnetic Field Coil Based on Fusion Algorithm

Jiamao Liang¹, Yuqi Peng²

¹School of Optical-Electrical and Computer Engineering, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

²Accounting College of Guangzhou Nanfang University, Guangzhou Guangdong

Received: Jul. 13th, 2025; accepted: Aug. 5th, 2025; published: Aug. 15th, 2025

Abstract

The traditional rectangular Helmholtz coils are no longer capable of meeting the practical engineering demands. In response to this urgent issue, this paper proposes a uniform coil design method based on the PSO-GWO fusion algorithm and the target field point method. Firstly, this paper needs to clarify the parameters to be optimized for the coil and introduces high-order derivatives and the magnetic field deviation rate to construct the objective function. Then, the PSO-GWO fusion algorithm is adopted to optimize and solve the objective function. Finally, after obtaining the optimized coil parameters, this paper establishes the corresponding finite element simulation model based

on the coil parameters and compares and analyzes the uniformity and uniform volume to verify the credibility of the optimization results.

Keywords

Uniform Coil, PSO-GWO Algorithm, Finite Element Simulation, Target Field Point Method

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

随着现代科学技术的迅速发展, 均匀磁场的产生和控制已经成为众多学科领域中至关重要的技术。亥姆霍兹线圈是一种传统的磁场发生装置, 因其能够产生比较均匀的磁场而被广泛应用于磁屏蔽、磁导航[1]和核磁共振[2]等众多学科领域中。然而, 随着越来越多学科领域对实验精度的要求不断地提高和应用场景的多样化; 传统的长方形亥姆霍兹线圈通常是由一对对称的相同线圈组成, 目前对长方形线圈的研究只停留在传统求导法, 传统求导法对亥姆霍兹线圈的求解方法是令中心磁场表达式在零点处的展开式的二阶导为零来求解参数, 但是, 随着线圈对数的增多和参数的增多, 传统求导法就要求更高阶导数, 大大增加了设计的难度, 导致问题求解复杂化, 因此, 需要寻求一种新的设计方法以简化问题。

传统的长方形亥姆霍兹线圈[3]的设计方法类似于经典的方形和圆形亥姆霍兹线圈的设计原理, 它通过两个平行放置的长方形线圈来产生均匀磁场。其优点在于结构简单和易于加工, 并能够产生较大空间范围的均匀磁场。然而, 这种设计方法存在明显的局限性。主要表现在以下两点: 其一, 长方形亥姆霍兹线圈的磁场均匀性相对较差, 尤其在远离长方形亥姆霍兹线圈中心位置的区域, 磁场强度的波动幅度较大, 难以满足需要高均匀度磁场的实验; 其二, 传统长方形亥姆霍兹线圈的磁场强度调节范围非常有限, 难以适应不同应用场景下的磁场强度多样化需求。

近年来, 随着计算算法技术和电磁场仿真软件的迅速发展和广泛应用, 科研工作者们开始通过优化线圈参数[4]-[9]来提高线圈的磁场均匀度。例如, 通过算法优化线圈的几何参数、增加辅助线[10]或共轴多线圈[11] [12]等措施, 可以在一定程度上提高线圈的磁场均匀度。

综上所述, 传统长方形亥姆霍兹线圈难以满足科学研究的需求。因此, 对传统长方形亥姆霍兹线圈进行改进和优化, 不仅是提高磁场均匀性的必然选择, 更是推动相关学科领域技术进步至关重要的一步。

鉴于此, 本文提出了一种基于 PSO-GWO 混合算法的新型线圈参数优化方法, 将该算法应用于本文的线圈设计上, 然后得到本文所设计线圈的最优参数, 并根据最优参数进行有限元仿真来验证所设计线圈的原理的可行性。最后, 本文通过实验验证了有限元仿真的可靠性, 从而验证了本文线圈设计方法的可行性。

2. 线圈设计的基本理论

2.1. Biot-Savart 定律

毕奥 - 萨伐尔定律(Biot-Savart Law)是电磁学中的基本定律之一, 它通常被用于描述电流产生的磁场分布。该定律详细地描述了电流元产生的磁场。具体来说, 电流元 Idl 在空间中某点所产生的磁场 dB 不仅与电流元的强度和方向有关, 而且还与该点与电流元之间的距离有关。其数学表达式为公式(1)。

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \times e}{r^3} \quad (1)$$

其中: dB 是电流元在空间中某点处所产生的微小磁场; μ_0 是真空磁导率, 其值大小为 $4\pi \times 10^{-7}$; I 是电流强度; dl 是电流元的长度矢量, 其方向与电流方向一致; e 是电流元与观测点之间的位置矢量; r 是 r 的大小, 即电流元到观测点之间的距离。

2.2. PSO-GWO 算法理论

PSO-GWO 算法[13]-[16]是一种融合了 PSO 算法和 GWO 算法的混合优化算法, PSO 算法通过模拟鸟群的社会行为来寻找最优解, GWO 算法则是通过模拟灰狼的社会等级和狩猎行为来寻找最优。PSO-GWO 算法结合了 GWO 的全局搜索能力和 PSO 的快速收敛性, 用以解决更加复杂的优化问题。

综上所述, GWO-PSO 算法作为一种融合优化算法, 它通过结合 GWO 算法和 PSO 算法的优点, 能够更加有效地解决复杂的优化问题, 具有广阔的应用前景。

在 PSO-GWO 算法中, 位置更新公式结合了 GWO 灰狼的位置更新机制, 公式如下:

其中, A 和 D 都 GWO 中的系数, 用于模拟灰狼的捕猎行为。 A 的计算公式如下:

其中, a 是线性递减的参数, r 是区间 $[0, 1]$ 内的随机数。

D 的计算公式如下:

其中 C 是系数, 计算公式如下:

其中, x_{leader} 是当前种群中的最优位置。

$$x_i^{(t+1)} = x_i^{(t)} + A \cdot D \quad (2)$$

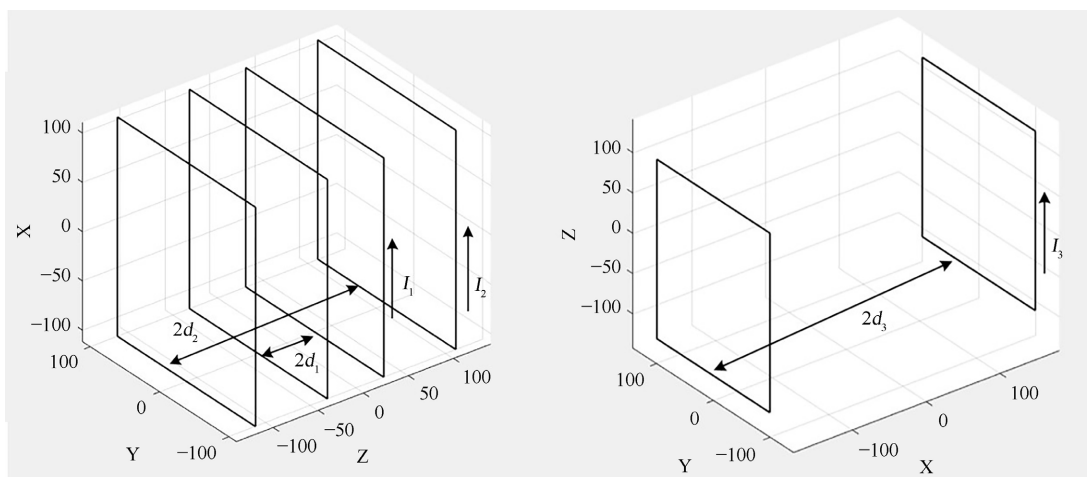
$$A = 2a \cdot r - a \quad (3)$$

$$D = |C \cdot x_{\text{leader}} - x_i| \quad (4)$$

$$C = 2 \cdot r \quad (5)$$

2.3. 所设计线圈的磁场解析式

新型线圈 1 的模型图如图 1 所示, 其中, l_1 和 l_2 分别是新型线圈的长和宽, d_1 和 d_2 分别是 Z 轴第一组线圈的间距和第二组线圈的间距, d_3 和 d_4 分别是 X 轴和 Y 轴线圈的间距; Z 轴第一组线圈的电流为 I_1 , 第二组线圈的电流为 I_2 ; X 轴线圈的电流为 I_3 , Y 轴线圈的电流为 I_4 。其中, X 轴、Y 轴和 Z 轴上的每组线圈都是关于原点对称。



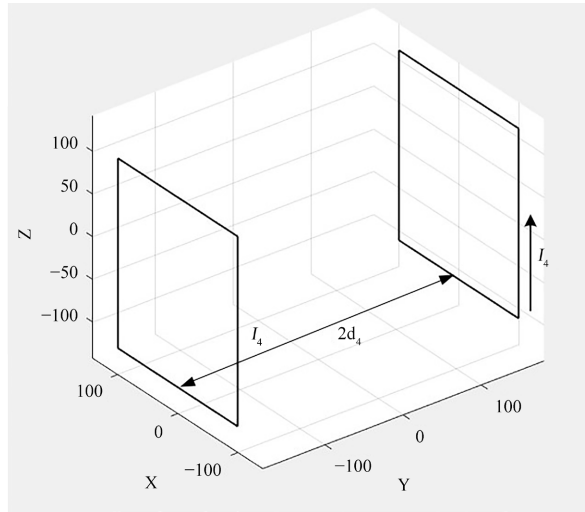


Figure 1. Structure diagram of the new three-axis coil
图 1. 新型三轴线圈结构图

根据毕奥 - 萨伐尔定律可以推导出内层线圈沿着 Z 轴的磁场表达式为:

$$B_z^1 = \sum_{i=1}^2 \left[\frac{\mu_0 I_i}{\pi} \frac{l_1 l_2}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2 + (z - d_i)^2}} \left(\frac{1}{l_1^2 + (z - d_i)^2} + \frac{1}{l_2^2 + (z - d_i)^2} \right) + \frac{\mu_0 I_i}{\pi} \frac{l_1 l_2}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2 + (z + d_i)^2}} \left(\frac{1}{l_1^2 + (z + d_i)^2} + \frac{1}{l_2^2 + (z + d_i)^2} \right) \right] \quad (6)$$

根据毕奥 - 萨伐尔定律可以推导出 x 外层线圈沿着 Z 轴的磁场表达式为:

$$B_z^2 = \frac{\mu_0 I_4 l_2}{2\pi(d_4^2 + l_2^2)} \left[\frac{l_1 - z}{\sqrt{(z - l_1)^2 + l_2^2 + d_4^2}} + \frac{l_1 + z}{\sqrt{(z + l_1)^2 + l_2^2 + d_4^2}} \right] + \frac{\mu_0 I_4 l_2}{2\pi(d_4^2 + l_2^2)} \left[\frac{l_1 + z}{\sqrt{(z + l_1)^2 + l_2^2 + d_4^2}} + \frac{l_1 - z}{\sqrt{(z - l_1)^2 + l_2^2 + d_4^2}} \right] + \frac{\mu_0 I_4 (l_1 + z)}{2\pi(d_4^2 + (l_1 + z)^2)} \left[\frac{l_2}{\sqrt{(z + l_1)^2 + l_2^2 + d_4^2}} + \frac{l_2}{\sqrt{(z + l_1)^2 + l_2^2 + d_4^2}} \right] + \frac{\mu_0 I_4 (l_1 - z)}{2\pi(d_4^2 + (l_1 - z)^2)} \left[\frac{l_2}{\sqrt{(z - l_1)^2 + l_2^2 + d_4^2}} + \frac{l_2}{\sqrt{(z - l_1)^2 + l_2^2 + d_4^2}} \right] \quad (7)$$

根据毕奥 - 萨伐尔定律可以推导出 y 外层线圈沿着 Z 轴的磁场表达式为:

$$B_z^3 = \frac{\mu_0 I_3 l_2}{2\pi(d_3^2 + l_2^2)} \left[\frac{l_1 - z}{\sqrt{(z - l_1)^2 + l_2^2 + d_3^2}} + \frac{l_1 + z}{\sqrt{(z + l_1)^2 + l_2^2 + d_3^2}} \right] + \frac{\mu_0 I_3 l_2}{2\pi(d_3^2 + l_2^2)} \left[\frac{l_1 + z}{\sqrt{(z + l_1)^2 + l_2^2 + d_3^2}} + \frac{l_1 - z}{\sqrt{(z - l_1)^2 + l_2^2 + d_3^2}} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\mu_0 I_3 (l_1 + z)}{2\pi (d_3^2 + (l_1 + z)^2)} \left[\frac{l_2}{\sqrt{(z + l_1)^2 + l_2^2 + d_3^2}} + \frac{l_2}{\sqrt{(z + l_1)^2 + l_2^2 + d_3^2}} \right] \\
& + \frac{\mu_0 I_3 (l_1 - z)}{2\pi (d_3^2 + (l_1 - z)^2)} \left[\frac{l_2}{\sqrt{(z - l_1)^2 + l_2^2 + d_3^2}} + \frac{l_2}{\sqrt{(z - l_1)^2 + l_2^2 + d_3^2}} \right]
\end{aligned} \quad (8)$$

因此, 新型三轴线圈沿着 Z 轴的总磁场表达式为:

$$B_z = B_z^1 + B_z^2 + B_z^3 \quad (9)$$

3. 线圈优化模型的建立

对新型三轴线圈的设计, 本质上是求待优化线圈变量的最优解, 从而使得所设计的线圈有最大的均匀体积 V_m 。线圈的设计原理如下: 首先根据需求确定线圈的均匀度指标即磁场偏差率, 选定变量的变化范围和步长, 然后以所设计线圈的中点为中心, 划分出一定体积的立方体区域 V , 再者引入磁场偏差率和目标场点确定优化模型, 最后通过 PSO-GWO 混合优化算法对优化模型求解最优变量。其中, 目标函数被定义为公式(10), 约束条件被定义为公式(11)。

$$f = \min \left[\sum_{k=1}^{k_p} w_k \left| \frac{d^{2k} B_z^1}{dz^{2k}} \right| (z=0) + \sum_{q=1}^P \left| \frac{B_z^2(z) - B_z^2(0)}{B_z^2(0)} \right| + \sum_{q=1}^P \left| \frac{B_z^3(z) - B_z^3(0)}{B_z^3(0)} \right| \right] \quad (10)$$

$$\begin{cases} d_{\max} - d_{\min} \geq d_{s\min} \\ d_{\min} \leq d_i \leq d_{\max} \end{cases} \quad (11)$$

在线圈中心处设定一个大小为 $500 \text{ mm} \times 500 \text{ mm} \times 500 \text{ mm}$ 的线圈体区域, 然后在中心区域划出一个 $200 \text{ mm} \times 200 \text{ mm} \times 200 \text{ mm}$ 的中心区域, 将线圈体区域减去中心区域。得到目标区域将目标区域等距划分成 $n \times n \times n$ 个格点, n^3 是所取目标场点个数, 在公式中记为 P , 其中 P 是所取的目标场点的个数, w_k 为 B_z^1 每阶导数的权重, 优化模型中的 z 就是在目标区域内取点计算。新型三轴线圈中, k_p 为 2。然后, 开始时式中的 $d_{s\min}$ 设置为 0.1 mm , $d_{\min}$ 为 0 mm , $d_{\max}$ 为 500 mm , 其中值得注意的是, 为了避免 X 和 Y 轴的线圈和 Z 轴的线圈发生相交的情况, d_3 和 d_4 的取值范围一定是要大于 300 mm 的, 取值范围设定为 $[300 \text{ mm}, 500 \text{ mm}]$, 取值步长为 0.1 mm 。再者, 本文将长方形亥姆霍兹线圈的边长 l_1 设定为 300 mm , l_2 设定为 200 mm 。最后, 因为电流源的精度到 1 mA , 所以本文的电流参数需要作一个整数化处理。所有线圈的电流范围都是给定为 $[0, 10 \text{ mA}]$ 。值得注意的是本文利用目标场点法时采用的是等距取目标场点, 这样做会使优化结果更加理想, 因为如果不是等距取点, 优化结果可能会有陷入局部最优或者优化效果不够理想的风险。除此之外, 引入高阶导数和磁场偏差率是为了使磁场均匀性更好, 因为线圈中心处的磁场可以用泰勒展开表示, 如果使高阶导数和磁场偏差率的和无限接近于零, 优化效果可能更好, 因此, 本文尝试通过这种方法来进行设计。

Table 1. Optimization parameters of the coil

表 1. 线圈的寻优参数

间距/mm	电流/mA
$d_1 = 62.5$	$I_1 = 2 \text{ mA}$
$d_2 = 160$	$I_2 = 1 \text{ mA}$
$d_3 = 200$	$I_3 = 1 \text{ mA}$
$d_4 = 200$	$I_4 = 1 \text{ mA}$

新型三轴线圈的设计流程图如图 2 所示，首先要确定待优化参数和待优化参数的变化范围和步长，然后确定目标函数，再通过 PSO-GWO 融合算法对他进行寻优，如果找到最优解，则建立有限元仿真模型进行分析；如果没有找到，则增加种群规模。如果有限元仿真满足均匀度要求，则确定最优参数；如果有限元仿真不满足均匀度要求，则改变待优化变量的变化范围和步长进行再次寻优。寻优之后的线圈参数如表 1 所示。

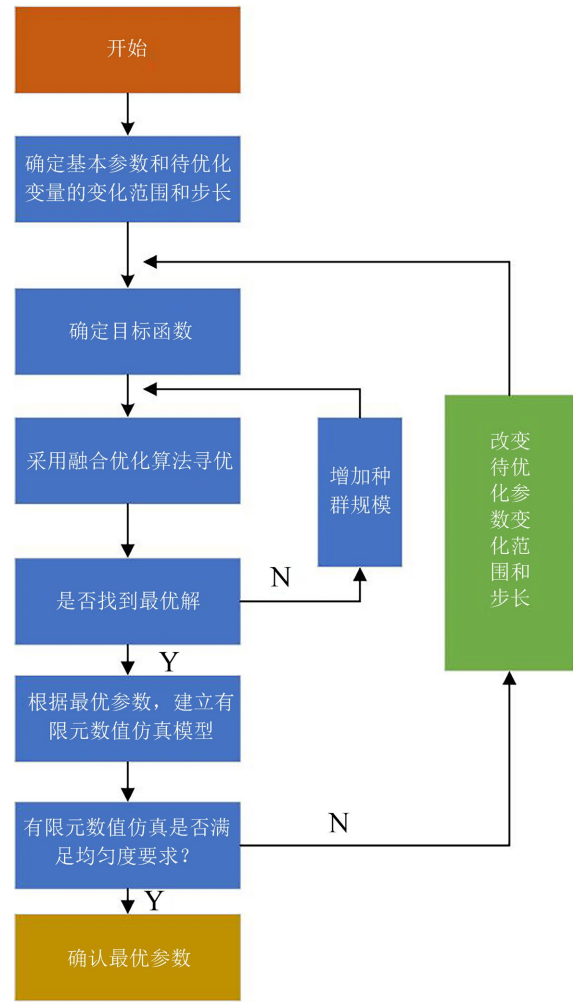


Figure 2. Design process of the new three-axis coil
图 2. 新型三轴线圈的设计流程

4. 两种线圈的有限元仿真

长方形亥姆霍兹线圈由两个长方形等大载流线圈组成，把大小相等、方向相同的电流通给方形亥姆霍兹线圈，亥姆霍兹线圈会产生以轴线为中心的均匀磁场。长方形亥姆霍兹线圈的长设置为 300 mm，宽设置为 200 mm，当两个长方形线圈的间距为 125 mm 时，长方形亥姆霍兹线圈产生的磁场最均匀。匝数统一设置为 5 匝，电流统一设置为 1 mA。新型线圈由内层线圈和外层线圈组成，内层线圈是两组共 Z 轴的长方形线圈，长的边为 300 mm，沿着 X 轴分布，短的边为 200 mm，沿着 Y 轴分布；外层分别是一组沿着 X 轴和 Y 轴的长方形线圈，长的边为 300 mm，均沿着 Z 轴分布，短的边为 200 mm，分布沿着 Y 轴和 X 轴。线圈的材料均设置为铜，Z 轴上的两组线圈的间距分别为 125 mm 和 320 mm，X 轴和 Y 轴的

一组线圈间距均为 400 mm, 匝数均设置为 5 匝, Z 轴上间距为 125 mm 的这组线圈的电流设置为 2 mA, 其余每组线圈的电流均设置为 1 mA。长方形亥姆霍兹线圈的磁场分布如图 3 所示, 新型线圈的磁场分布如图 4 所示。其中, 值得注意的是, 两种线圈的仿真模型中均需要添加空气域, 空气域的大小设置为 100%; 然后选择空气域的六个面添加边界条件; 除此之外, 求解设置保持默认设置; 最后, 图 3 中的(a)和图 4 中的(a)的每组线圈都关于 x、y 和 z 轴对称。

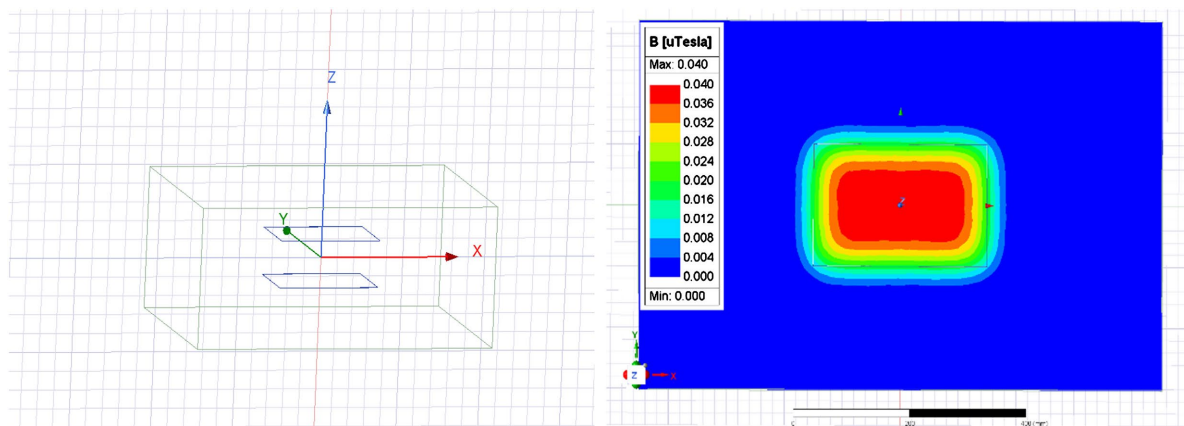


Figure 3. Magnetic field distribution maps of the X, Y, and Z axes of the rectangular Helmholtz coil

图 3. 长方形亥姆霍兹线圈 X、Y、Z 轴的磁场分布云图

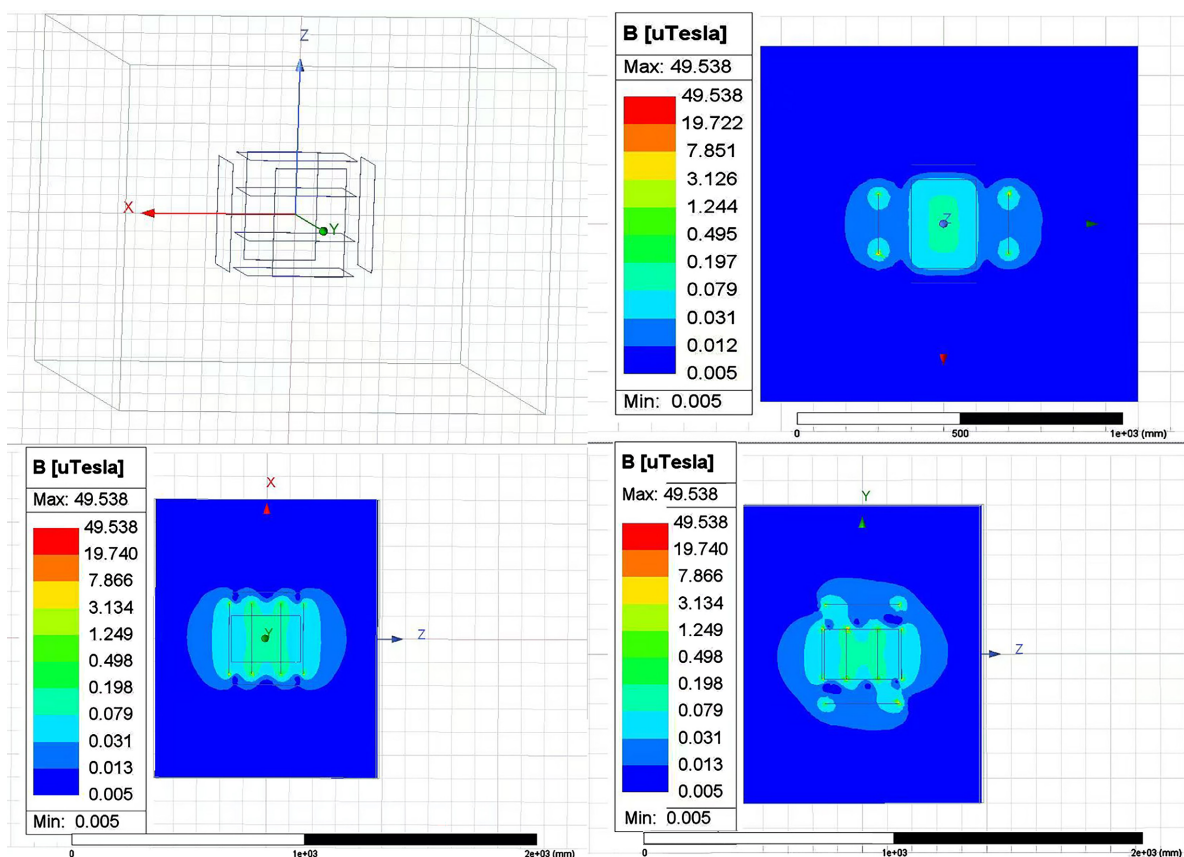


Figure 4. Planar magnetic field map of the new coil 1

图 4. 新型线圈 1 的平面磁场云图

5. 有限元仿真的后分析和实验验证

5.1. 有限元仿真的轴线磁场分布图

以 200 mm 作为目标轴线导出仿真软件的数据, 然后用 MATLAB 软件绘制出传统长方形亥姆霍兹线圈和新型线圈在三个轴线的磁场分布大小图, 其中 100 mm 处为线圈的中心处。图 5 为长方形亥姆霍兹线圈的轴线磁场分布图, 图 6 为新型线圈的轴线磁场分布图。

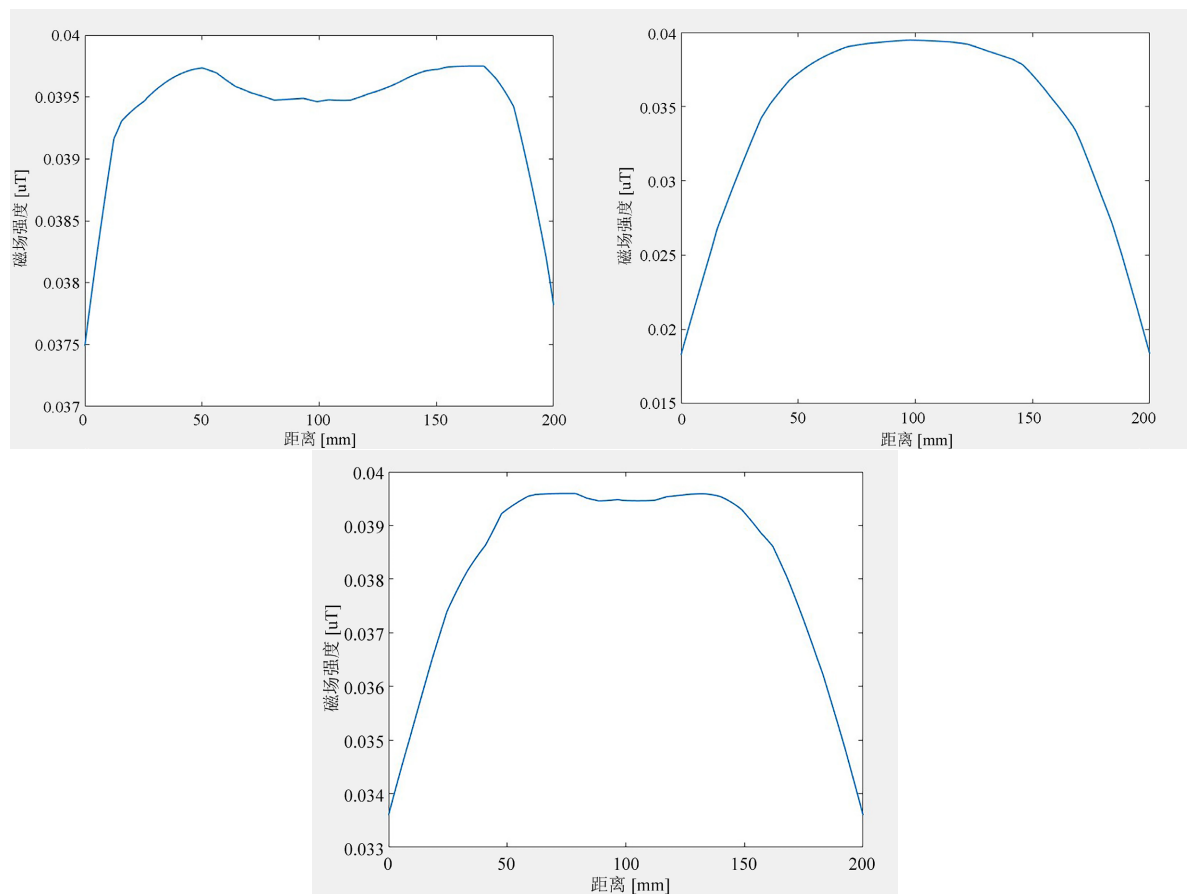
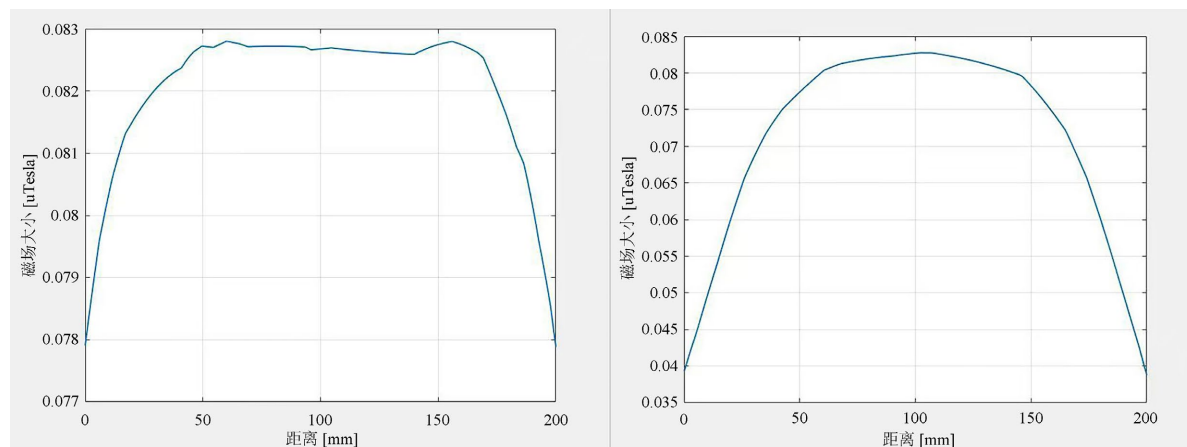


Figure 5. Magnetic field distribution cloud map of the X, Y, and Z axes of the rectangular Helmholtz coil
图 5. 长方形亥姆霍兹线圈 X、Y、Z 轴的磁场分布云图



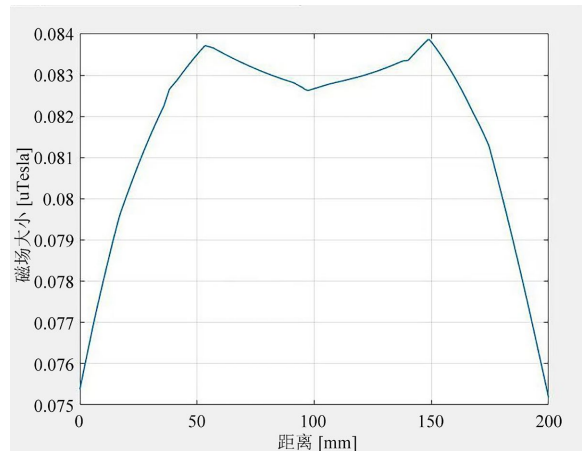


Figure 6. Magnetic field distribution along the axis of the new coil

图 6. 新型线圈的轴线磁场分布图

5.2. 磁场均匀性和均匀体积分析

以 2%和 3%为固定磁场偏差率，目标区域设置为中心区域处的 $200\text{ mm} \times 200\text{ mm} \times 200\text{ mm}$ 的正方体，通过公式(13)计算两种线圈在不同磁场偏差率下的均匀体积，得到表 3，然后对结果进行比较分析。

固定磁场偏差率分别为 2%和 3%，并以 200 mm 作为目标轴线长度，然后根据均匀度计算公式分别计算长方形亥姆霍兹线圈和新型三轴线圈在 X 轴、Y 轴和 Z 轴上的均匀占比，得到如表 2 所示的数据。

Table 2. Uniformity analysis of rectangular Helmholtz coils and new-type three-axis coils on the axis

表 2. 长方形亥姆霍兹线圈和新型三轴线圈在轴线上的均匀度分析

轴线	磁场偏差率[%]	长方形亥姆霍兹线圈	新型三轴线圈
X 轴	2%	91.5%	84.7%
Y 轴		33.5%	33.3%
Z 轴		59.5%	74.7%
X 轴	3%	95.0%	90.3%
Y 轴		39.8%	40.3%
Z 轴		65%	79.3%

由表 2 可知，当磁场偏差率为 2%时，新型三轴线圈在 X 轴和 Y 轴的均匀占比稍微低于长方形亥姆霍兹线圈，Z 轴明显大于长方形亥姆霍兹线圈；当磁场偏差率为 3%时，新型三轴线圈在 X 轴和 Y 轴的均匀占比稍微低于长方形亥姆霍兹线圈，Z 轴明显大于长方形亥姆霍兹线圈；因此，通过本文的线圈设计方法设计的新型线圈在整体性能上是优于传统长方形亥姆霍兹线圈的，进而本文的线圈设计方法具有一定的可行性。

Table 3. Uniform volumes of two types of coils under different magnetic field deviations

表 3. 两种线圈在不同磁场偏差下的均匀体积

磁场偏差率[%]	长方形亥姆霍兹线圈	新型三轴线圈
2	1461511.20	1685536.77
3	1966120.00	2291452.80

目标区域设定为中心处 $200\text{ mm} \times 200\text{ mm} \times 200\text{ mm}$ 的立方体区域, 在目标区域内, 由有限元仿真得到的数据计算了两种线圈在不同磁场偏差下的均匀体积, 得到表 3, 表 3 中体积的单位为立方毫米, 体积的数据保留至小数点后两位, 对表格上的两种线圈进行了对比分析。

由表 3 可知, 在目标区域内, 新型线圈在磁场偏差率分别为 2%、3%、均匀体积均大于长方形亥姆霍兹线圈, 其中磁场偏差率分别为 2% 时, 新型三轴线圈的均匀体积明显大于长方形亥姆霍兹线圈, 约为长方形亥姆霍兹线圈的 1.15 倍; 当磁场偏差率固定为 3% 时, 新型线圈的均匀体积也明显大于传统长方形亥姆霍兹线圈, 大小约为长方形亥姆霍兹线圈的 1.16 倍。因此, 通过本文方法设计的均匀磁场线圈具有更好的性能, 进而证明了本文线圈设计方法的可行性。

6. 结论

针对三轴线圈均匀磁场优化设计及优化结果可信度评估问题, 本文提出了一种基于混合智能优化算法和目标场点法的三轴线圈均匀磁场优化设计方法, 主要得到以下结论:

- (1) 相对于传统的亥姆霍兹线圈, 三轴线圈系统能够扩大磁场的均匀区域, 但是其参数优化设计如果仍采用传统的求导优化方法, 会增加问题求解的复杂度。
- (2) 在固定磁场偏差率的情况下, 线圈的均匀体积都得到了提高。

参考文献

- [1] Ha, Y.H., Han, B.H. and Lee, S.Y. (2010) Magnetic Propulsion of a Magnetic Device Using Three Square-Helmholtz Coils and a Square-Maxwell Coil. *Medical & Biological Engineering & Computing*, **48**, 139-145. <https://doi.org/10.1007/s11517-009-0574-5>
- [2] Bevilacqua, G., Biancalana, V., Baranga, A.B., Dancheva, Y. and Rossi, C. (2016) Microtesla NMR J-Coupling Spectroscopy with an Unshielded Atomic Magnetometer. *Journal of Magnetic Resonance*, **263**, 65-70. <https://doi.org/10.1016/j.jmr.2015.12.018>
- [3] 燕山大学. 长方形亥姆霍兹线圈的设计方法[P]. 中国专利, 201811610219.8. 2018-12-27.
- [4] Wang, K., Ma, D., Gao, Y., Dou, Y., Li, S., Wang, J., et al. (2024) Design and Measurement of Three-Dimensional Uniform-Field Coils Based on Swarm Intelligence Algorithms under Ferromagnetic Boundaries. *Measurement*, **233**, Article ID: 114753. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2024.114753>
- [5] Wang, J., Song, X., Zhou, W., Le, Y. and Ning, X. (2021) Hybrid Optimal Design of Biplanar Coils with Uniform Magnetic Field or Field Gradient. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, **68**, 11544-11553. <https://doi.org/10.1109/tie.2020.3032868>
- [6] Huang, B., Cao, Q., Chen, Z., Wang, Y., Yue, Z. and Zhai, Y. (2023) Design of Uniform Field Coils Coupled with a Magnetic Shield Cylinder. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, **583**, Article ID: 171042. <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2023.171042>
- [7] Wu, Z., Pang, H., Wang, Z., Fan, W., Liu, F., Pei, H., et al. (2023) Hybrid Optimal Design Method for Magnetic Field Coils under Magnetic Shielding Boundary. *Sensors and Actuators A: Physical*, **359**, Article ID: 114464. <https://doi.org/10.1016/j.sna.2023.114464>
- [8] Wang, J., Song, X., Le, Y., Wu, W., Zhou, B. and Ning, X. (2021) Design of Self-Shielded Uniform Magnetic Field Coil via Modified Pigeon-Inspired Optimization in Miniature Atomic Sensors. *IEEE Sensors Journal*, **21**, 315-324. <https://doi.org/10.1109/jsen.2020.3015562>
- [9] Zhou, W., Han, B., Wang, J., Wu, D., Zhao, F. and Li, N. (2022) Design of Uniform Magnetic Field Coil by Quasi-Elliptic Function Fitting Method with Multiple Optimizations in Miniature Atomic Sensors. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, **69**, 11755-11764. <https://doi.org/10.1109/tie.2021.3125561>
- [10] Zhu, X., Xing, M., Liu, C., Ye, J., Cheng, H. and Miao, Y. (2023) Optimization of Composite Helmholtz Coils Towards High Magnetic Uniformity. *Engineering Science and Technology, an International Journal*, **47**, Article ID: 101539. <https://doi.org/10.1016/j.jestech.2023.101539>
- [11] Lu, J., Wang, S., Lu, F., Lu, C., Zhang, X. and Ma, D. (2023) Hybrid Optimal Design of Square Highly Uniform Magnetic Field Coils. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, **70**, 4236-4244. <https://doi.org/10.1109/tie.2022.3179547>
- [12] Li, Y., Xu, J., Kang, X., Fan, Z., Dong, X., Gao, X., et al. (2021) Design of Highly Uniform Three-Dimensional Square Magnetic Field Coils for External Magnetic Shielding of Magnetometers. *Sensors and Actuators A: Physical*, **331**, Article

ID: 113037. <https://doi.org/10.1016/j.sna.2021.113037>

- [13] 刘青, 董浩然, 胡紫琪, 等. 基于粒子群混合灰狼算法的配电网故障恢复策略[J]. 华北电力大学学报(自然科学版), 2024, 51(4): 47-56, 68.
- [14] 黄毅, 邓齐林, 冯健, 等. 基于混合算法与大型水箱装配的车间布局[J]. 组合机床与自动化加工技术, 2022(2): 161-164.
- [15] 严一钊. 基于改进粒子群与灰狼混合算法的电动汽车充电站选址优化研究[D]: [硕士学位论文]. 西安: 长安大学, 2024.
- [16] 马涛, 余世刚. 灰狼粒子群混合算法在群控电梯中的应用[J/OL]. 计算机工程: 1-7. <https://doi.org/10.19678/j.issn.1000-3428.0069528>, 2025-03-06.