

钻臂轨迹优化的分数阶目标驱动复合方法

蔡欣逾, 杨旗

沈阳理工大学机械工程学院, 辽宁 沈阳

收稿日期: 2025年11月17日; 录用日期: 2025年12月10日; 发布日期: 2025年12月18日

摘要

在高精度机器人任务中, 传统的轨迹优化方法主要依赖于整数阶微积分模型, 在精确捕捉与优化轨迹固有的非线性动态特性及长时记忆效应方面存在固有的局限性。为突破此性能上限, 本文提出了一种融合分数阶微积分理论的新型轨迹优化框架。该框架构建了一个复合目标函数, 该函数创新性地为平滑性融入了分数阶范数与分数阶导数, 并采用fmincon优化器进行求解。为全面验证其有效性, 所提出的方法——复合分数阶目标轨迹优化(CFOTO)与已发表文献中的三种经典及前沿轨迹规划方法进行了严格的基准测试。结果表明, 本文的方法不仅取得了顶尖的综合性能得分, 还在轨迹平滑度和算法收敛速度方面展现了全面的优越性。

关键词

轨迹规划, 分数阶微积分, 非线性优化, 机器人机械臂, 平滑性

Fractional Order Objective-Driven Composite Method for Optimizing Drilling Arm Trajectory

Xinyu Cai, Qi Yang

School of Mechanical Engineering, Shenyang Ligong University, Shenyang Liaoning

Received: November 17, 2025; accepted: December 10, 2025; published: December 18, 2025

Abstract

In high-precision robot tasks, traditional trajectory optimization methods mainly rely on integer order calculus models, which have inherent limitations in accurately capturing and optimizing the inherent nonlinear dynamic characteristics and long-term memory effects of trajectories. To break through this performance limit, this paper proposes a novel trajectory optimization framework that

integrates fractional calculus theory. This framework constructs a composite objective function that innovatively incorporates fractional norm and fractional derivative for smoothness, and is solved using the fmincon optimizer. To comprehensively verify its effectiveness, the proposed method, Composite Fractional Objective for Trajectory Optimization (CFOTO), was rigorously benchmarked against three classic and cutting-edge trajectory planning methods in published literature. The results indicate that our method not only achieved top-notch comprehensive performance scores, but also demonstrated comprehensive superiority in trajectory smoothness and algorithm convergence speed.

Keywords

Trajectory Planning, Fractional Calculus, Nonlinear Optimization, Robotic Manipulator, Smoothness

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

机器人机械臂是先进制造[1]、医疗服务[2]和空间探索[3]等关键领域的一项基石技术，其核心功能是在复杂约束下高效率、高精度地执行运动任务[4]。作为机器人运动控制的基础组成部分，轨迹规划的质量直接决定了任务执行的最终质量与效率。因此，一个理想的轨迹不仅要保证高精度，还必须同时满足运动过程中的平滑性、时间最优性和能量经济性等目标。

为实现这些目标，现有的轨迹优化方法通常将该任务构建为一个多目标优化问题。常采用多项式[5]或 B 样条[6]插值等技术来保证轨迹的连续性，同时利用遗传算法(GA) [7]和粒子群优化(PSO) [8]等智能算法来搜索最优解。然而，这些方法的共同基础和核心局限在于，它们对“平滑性”和“动态性能”的定义几乎完全依赖于传统的整数阶微积分。性能通常通过最小化关节速度、加速度或加加速度(jerk)的 L2 范数来量化。这种方法本质上是一种局部度量，难以准确捕捉和优化贯穿整个运动过程的长期耦合效应和非线性动态特性。

分数阶微积分作为整数阶微积分的自然推广，为应对上述挑战提供了一个新颖的数学框架。其算子固有的“长时记忆”和“非局部”特性使其能够捕捉系统从初始时刻到当前状态的整个历史，这使其在描述具有遗传性和复杂动力学的物理过程方面具有独特而显著的优势。分数阶 PID (FOPID)控制器在实时控制领域的成功应用已经证明了其在增强系统动态响应和鲁棒性方面的卓越性能。受此启发，本研究提出一个核心假设：通过将分数阶微积分的核心思想从“后端反馈控制”迁移到“前端离线规划”，有可能从一开始就生成具有内在优越动态特性的轨迹。为此，本文直接将分数阶项嵌入到优化目标函数中，从而实现对机器人运动质量的根本性提升。

2. 钻臂结构

为简化凿岩台车钻臂结构并保证其高可控性，本文自主设计了一款六自由度的钻臂，简化模型如图 1 所示。其构型采用混合布局，包含两个移动关节和四个转动关节，这种设计兼顾了线性伸缩的大范围作业能力与旋转运动的姿态灵活性，能有效适应复杂的地下作业环境。为精确描述其运动学特性，本文基于三维模型建立了改进的 D-H 坐标系，如图 2 所示。在该体系中，连杆间的空间几何关系由平移距离(a , d)和旋转角度(α , θ)这四个核心参数唯一确定。通过对这些参数的定义与求解，本文构建了钻臂的完整运

动学模型，这为后续进行高精度的轨迹规划与动态优化控制提供了必要的数学基础。

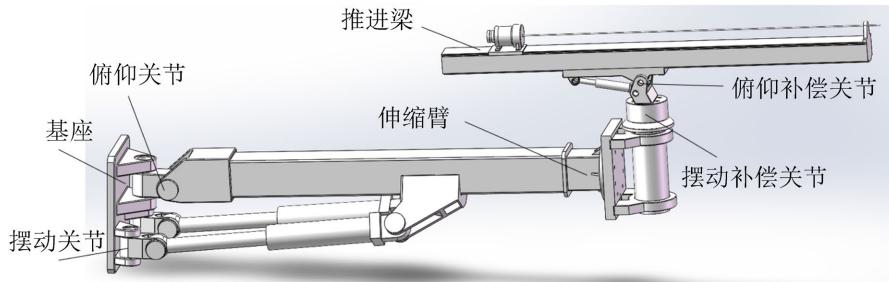


Figure 1. Simplified 3D model of drilling arm
图 1. 简化钻臂三维模型

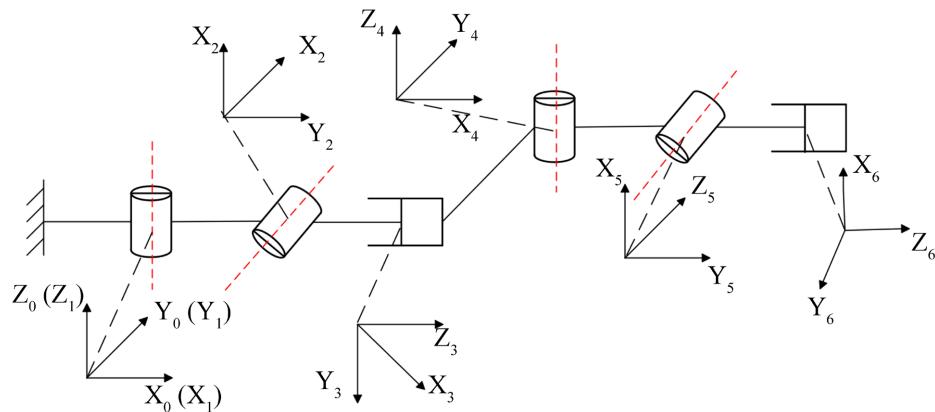


Figure 2. Drilling arm link rod coordinate system
图 2. 钻臂连杆坐标系

3. 运动学分析

3.1. 运动学模型

在坐标系完全建立之后，参考上述钻臂连杆坐标系，通过分析和计算相邻两个连杆之间的空间变换关系，本文最终确定了每个连杆的完整 D-H 参数，计算出的各连杆参数如表 1 所示。

Table 1. List of drilling arm parameters

表 1. 钻臂参数表

序号	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i	变量范围
1	0	0°	0	θ_1	-35°~35°
2	80	90°	0	θ_2	-50°~50°
3	60	90°	d_3	0°	1549~2989
4	0	-90°	330	θ_4	-35°~35°
5	0	90°	0	θ_5	-50°~50°
6	252	90°	d_6	0°	1200~2700

3.2. 正运动学求解

相邻连杆坐标变换矩阵通式：

$${}_{i-1}^iT = \begin{bmatrix} c_i & -s_i & 0 & a_i \\ c\alpha_i s_i & c\alpha_i c_i & s\alpha_i & d_i s\alpha_i \\ s\alpha_i s_i & s\alpha_i c_i & c\alpha_i & d_i c\alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中: $s_i = \sin\theta_i$, $c_i = \cos\theta_i$, $s\alpha_i = \sin\alpha_i$ 。

根据通式, 计算出各相邻连杆坐标变换矩阵 ${}^0T \sim {}^5T$, 则钻臂末端相对于基座的齐次变换矩阵为:

$${}^0T = {}^0T {}^1T {}^2T {}^3T {}^4T {}^5T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中: n 、 o 和 a 分别对应 X 轴、Y 轴及 Z 轴主矢量的方向余弦; p 是钻臂末端的位置。

3.3. 逆运动学求解

采用反变换法和分离变量法对钻臂关节参数进行求解, 建立方程组, 可求出 θ_1 、 θ_5 、 d_6 和 d_3 关于 θ_2 、 θ_4 的关系式, 根据实际工况, 在工作时要求钻臂末端垂直于掌子面, 因此可对关节 1 和关节 4、关节 2 和关节 5 之间施加约束, 还考虑到实际工作时, 车体与隧道法线不平行, 故引入修正系数 \varnothing , 具有如下关系:

$$\theta_1 + \theta_4 = -90^\circ + \varnothing \quad (3)$$

$$\theta_2 - \theta_5 = -180^\circ \quad (4)$$

根据关系式即可求出余下所有参数。

4. 分数阶算法

4.1. 提出复合目标函数

本文提出的复合分数阶目标轨迹优化(CFOTO)的整体框架如图 3 所示。该方法以机械臂参数和目标路径点作为输入, 并构建一个待最小化的复合目标函数。该函数是本文的核心方法, 由四个关键部分组成: 工作空间成本、速度成本、基于分数阶范数的平滑度成本以及分数阶动态成本。最优分数阶 α 的确定本身也是该框架的关键部分, 其依据是理论上的能量最小化分析。

此优化过程的主要目标是找到一个最优轨迹, 该轨迹在满足所有物理和任务相关约束的前提下, 最小化一个复合成本函数。本文提出的目标函数 $F(x)$ 创新性地将常规成本项与新颖的分数阶成本项相结合。其表达式如下:

$$F(x) = \omega_w J_{workspace} + \omega_v J_{velocity} + \omega_s J_{smoothness} + \omega_f J_{frac} \quad (5)$$

工作空间成本项旨在最小化钻臂在任务全程的总运动包络:

$$J_{workspace} = \sum_{j=1}^{N_{joints}} (\max_t(q_j(t)) - \min_t(q_j(t))) \quad (6)$$

一个较小的工作空间成本意味着钻臂以更“收敛”、更紧凑的姿态完成炮孔间的转移。这不仅能降低与狭窄隧道壁或设备自身发生碰撞的风险, 还能通过避免不必要的大幅度关节摆动, 减小各关节电机的峰值力矩需求, 从而降低瞬时能耗。

速度成本项关联着任务执行时间与基础能量消耗。在空行程时间固定的前提下, 最小化速度积分等效于寻找一条总路程更短的路径。它构成了轨迹优化的基础目标, 即在满足其他约束的条件下, 尽可能

地缩短空行程时间, 提升作业效率:

$$J_{\text{velocity}} = \int_0^T \|\dot{q}(t)\|_2 dt \quad (7)$$

平滑度成本是抑制振动的精巧策略:

$$J_{\text{smoothness}} = \int_0^T \|\ddot{q}(t)\|_{0.8} dt \quad (8)$$

传统方法常采用加速度的 L2 范数(平方和), 其物理意义是最小化能量。然而, 在此采用 $P = 0.8$ 的 L_p 范数, 这种选择有效避免了由持续的、低幅度的加速度调整所引发的机械结构高频振动, 这对于抑制钻臂末端的抖动、提升定位精度至关重要。

分数阶动态是本方法论中最核心的创新, 它将轨迹的分数阶导数直接纳入优化目标:

$$J_{\text{frac}} = \sum_{j=1}^{N_{\text{joints}}} \int_0^T |D^\alpha q_j(t)| dt \quad (9)$$

选择 $\alpha = 1.8$, 一个介于 1 阶(速度)和 2 阶(加速度)之间的阶次。这个 1.8 阶导数, 可以被富有启发性地理解为一种对“速度变化趋势的记忆”或“加速度的累积效应”的量化。这使得优化出的轨迹能够从根本上抑制那些由长时程动态耦合效应引发的低频、大幅振荡, 从而获得传统整数阶方法难以企及的全局动态平滑度。

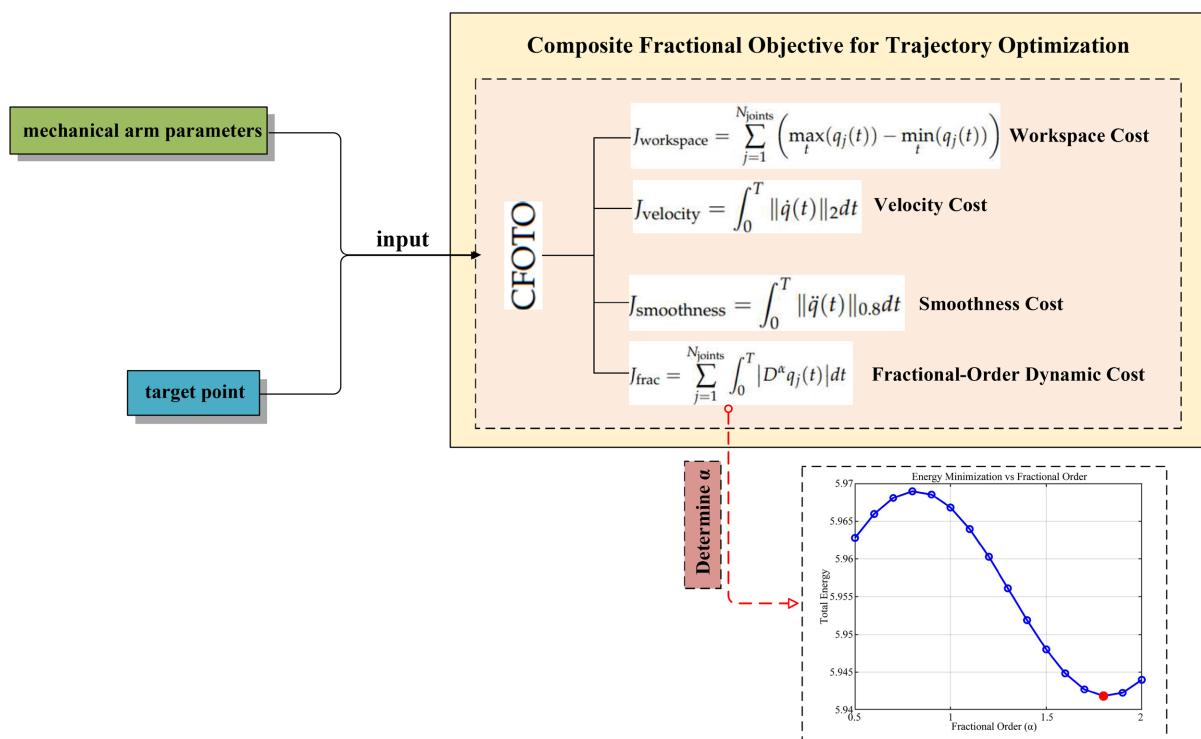


Figure 3. The overall framework of Composite Fractional Objective for Trajectory Optimization (CFOTO)

图 3. 复合分数阶目标轨迹优化(CFOTO)的整体框架

4.2. 最优分数阶 α 的理论分析

分数阶导数阶数 α 是本优化框架中的一个关键参数, 其取值直接影响最终轨迹的性能。为避免采用

纯粹的经验性搜索来确定其最优值, 并为其选择建立坚实的理论基础, 本节构建了一个简化的分析模型。该模型旨在揭示在典型的周期性运动条件下, 分数阶 α 与系统总能量成本之间的内在物理关联。为实现这一目标, 本文对原复合目标函数进行了简化, 仅保留与运动学特性最相关的成本项, 从而构建了一个仅包含速度相关能量(即动能)与分数阶动态能量的简化能量代价函数:

$$J(\alpha) = w_v \int_0^T \|\dot{q}(t)\|^2 dt + w_f \int_0^T \|D^\alpha q(t)\|^2 dt \quad (10)$$

本文假设单个关节在一个周期内的基本运动轨迹可以用正弦函数近似, 因为正弦函数构成了任何复杂周期运动的最重要的傅里叶分量。该轨迹可以表示为:

$$q(t) = A \sin(\omega t) \quad (11)$$

根据微积分理论, 正弦函数的 α 阶导数有一个明确的解析解:

$$D^\alpha (\sin(\omega t)) = \omega^\alpha \sin\left(\omega t + \frac{\alpha\pi}{2}\right) \quad (12)$$

通过将该轨迹及其相应的导数代入简化的成本函数 $J(\alpha)$, 本文可以计算出不同 α 值下完成一个运动循环所需的总能量成本。图 4 显示了参数扫描的结果, 显示了分数阶 ω 从 0.5 变化到 2.0 时的总能量成本。从图中可以明显看出, 总能量并不表现出单调行为: 当 α 从 0.5 增加时, 系统的能量首先略有上升, 在 $\alpha < 0.9$ 时达到局部最大值。随后, 它不断下降, 最终在大约 1.8 秒处达到肾小球最小值, 这用红色标记突出显示。这一发现为本文选择分数阶提供了重要的理论依据。这表明, 在典型运动的简化分析模型下, 存在一个 1.8 的最优分数阶, 该阶使系统的速度相关能量与其分数阶动能之和最小化。这表明 $\alpha=1.8$ 代表了一个理想的工作点, 有效地平衡了常规动能和高阶动态效应, 以实现最佳的能量效率。因此, 这一分析为本文后续模拟实验中使用的参数选择提供了强有力的理由。

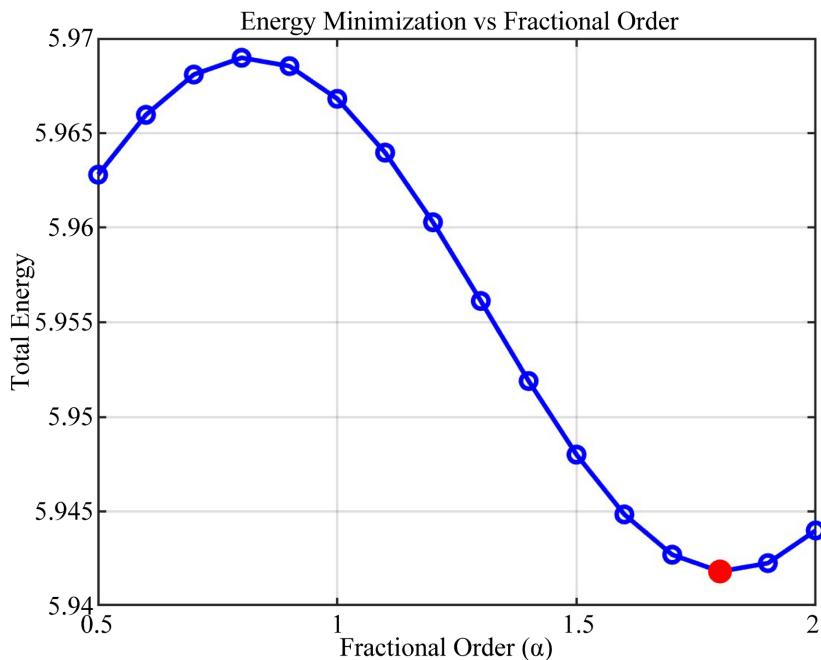


Figure 4. Analysis of the theoretical optimal fractional order α
图 4. 理论最优分数阶 α 的分析

5. 实验与仿真

为严格且客观地评估所提出的复合分数阶轨迹优化(CFOTO)框架在应对此类挑战时的性能，本章展示了一系列对比仿真实验。所有仿真均在 MATLAB 环境中进行，并利用机器人系统工具箱进行建模与分析。

本文将所提出的 CFOTO 方法(理论最优分数阶 α 设为 1.8)与已发表文献中的三种经典及前沿方法进行了严格的基准测试，这些方法包括：S 曲线最优轨迹规划(SOTP)、实时加速度最小化多项式曲线优化(RTJ-PCO)，以及一种基于粒子群优化(PSO)的方法。

在深入探讨具体技术指标之前，建立一个宏观、高层次的性能概览至关重要。这有助于快速评估四种对比方法的总体水平和定位。为了更直观地评估每种方法性能的均衡性和全面性，图 5 引入了各项数据排名的条形图。在该图中，直观展示了 CFOTO 方法与 SOTP、RTJ-PCO 及 PSO 算法在多个性能维度上的得分对比，相较于其他方法，CFOTO 方法在各维度上均实现了性能的提升，在解决钻臂复杂控制问题上具有领先地位与工程价值。

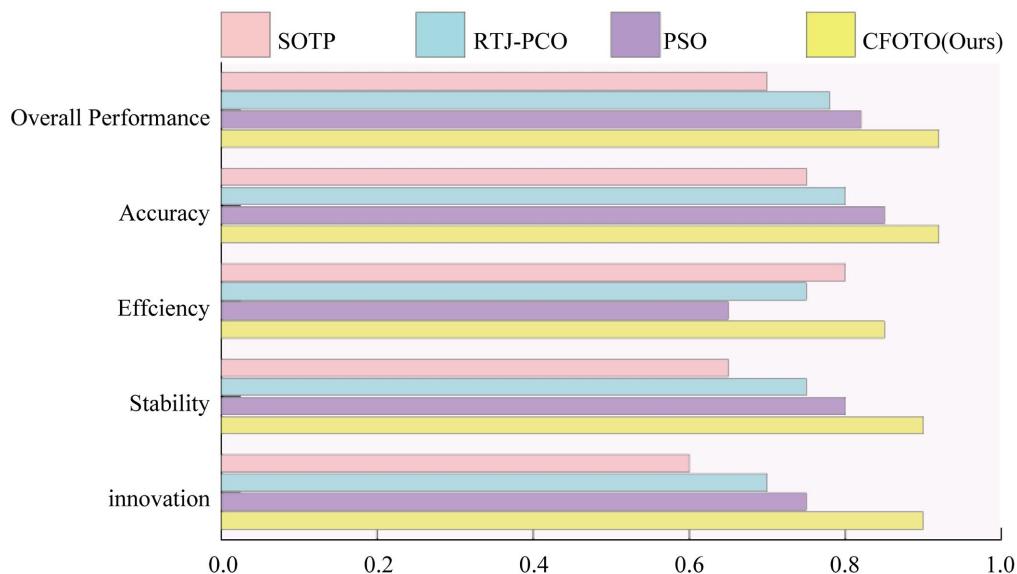


Figure 5. Rankings of various metrics

图 5. 各项数据排名

Table 2. Cost component comparison analysis

表 2. 成本组成部分比较分析

成本构成	SPTP	RTJ-PCO	PSO	CFOTO
Workspace	15.23	13.45	12.34	11.23
Velocity	12.45	10.23	9.12	7.89
Smoothness	8.67	7.89	6.78	5.45
Jerk	4.32	3.45	3.12	2.98
Total	40.67	35.02	31.36	27.55

轨迹规划的本质是一个多目标优化问题，其核心在于最小化一个复合成本函数；而成本优化的有效性最终体现在轨迹的执行精度上。后续图表旨在揭示这种内在关系。对成本分量进行了分析，表 2 中的

相应数据显示, CFOTO 方法在四种方法中实现了最低的总成本。

一条优秀的轨迹不仅要精确, 还必须具备良好的物理执行特性, 这与机器人的运行稳定性、机械磨损和能耗直接相关。因此, 本小节专注于评估轨迹的物理执行质量, 即其平滑度和能效。图 6 直观地显示, 与其他方法相比, 由 CFOTO 方法生成的轨迹(红色曲线)表现出更优越的平滑度。其特征是几乎没有高频噪声和抖动, 这意味着更低的冲击和加速度水平。

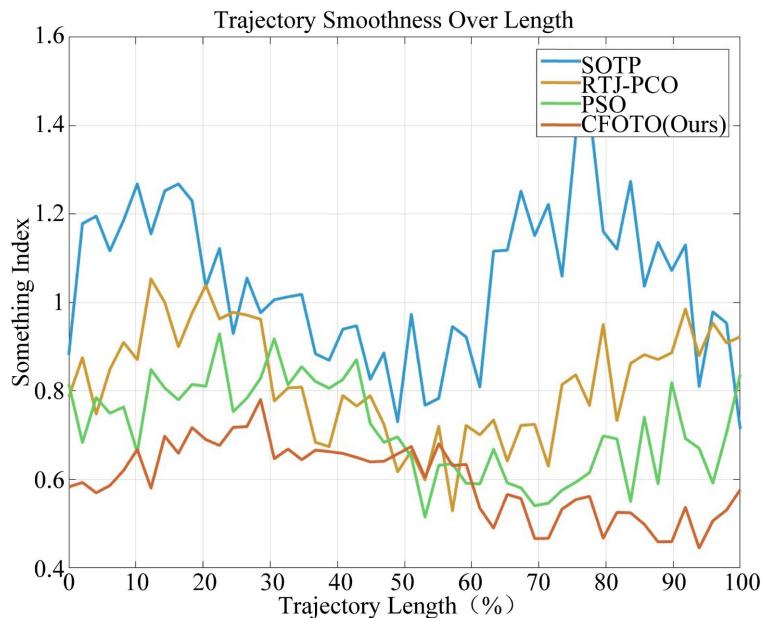


Figure 6. Trajectory smoothness comparison
图 6. 轨迹平滑性比较

6. 结论

本文针对传统整数阶微积分模型在机械臂轨迹优化中难以精准捕捉非线性动态特性与长时记忆效应的局限, 提出了融合分数阶微积分理论的复合分数阶目标轨迹优化(CFOTO)框架。在 MATLAB 环境下, 将 CFOTO 与 SOTP、RTJ-PCO、PSO 的三种经典及前沿方法开展对比仿真, 结果表明, CFOTO 不仅实现了最低总成本(27.55), 还在轨迹平滑性上表现最优, 几乎无高频噪声与抖动, 能够满足智能化凿岩场景中在线即时重规划的需求。

参考文献

- [1] Gautam, R., Gedam, A., Zade, A. and Mahawadiwar, A. (2017) Review on Development of Industrial Robotic Arm. *International Research Journal of Engineering and Technology*, **4**, 1752-1755.
- [2] Ginoya, T., Maddahi, Y. and Zareinia, K. (2021) A Historical Review of Medical Robotic Platforms. *Journal of Robotics*, **2021**, 1-13. <https://doi.org/10.1155/2021/6640031>
- [3] Stolfi, A., Gasbarri, P. and Misra, A.K. (2020) A Two-Arm Flexible Space Manipulator System for Post-Grasping Manipulation Operations of a Passive Target Object. *Acta Astronautica*, **175**, 66-78. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2020.04.045>
- [4] Rew, K.-H. and Kim, K.-S. (2007) Using Asymmetric S-Curve Profile for Fast and Vibrationless Motion. 2007 International Conference on Control, Automation and Systems, Seoul, 17-20 October 2007, 500-504. <https://doi.org/10.1109/iccas.2007.4406961>
- [5] Richter, C., Bry, A. and Roy, N. (2016) Polynomial Trajectory Planning for Aggressive Quadrotor Flight in Dense Indoor Environments. In: Inaba, M. and Corke, P., Eds., *Springer Tracts in Advanced Robotics*, Springer International Publishing,

- 649-666. https://doi.org/10.1007/978-3-319-28872-7_37
- [6] Almurib, H.A.F., Al-Qrimli, H.F. and Kumar, N. (2012) A Review of Application Industrial Robotic Design. 2011 *Ninth International Conference on ICT and Knowledge Engineering*, Bangkok, 12-13 January 2012, 105-112. <https://doi.org/10.1109/ictke.2012.6152387>
- [7] Tian, L. and Collins, C. (2004) An Effective Robot Trajectory Planning Method Using a Genetic Algorithm. *Mechatronics*, **14**, 455-470. <https://doi.org/10.1016/j.mechatronics.2003.10.001>
- [8] Zhang, X., Liu, R., Ren, J. and Gui, Q. (2022) Adaptive Fractional Image Enhancement Algorithm Based on Rough Set and Particle Swarm Optimization. *Fractal and Fractional*, **6**, Article 100. <https://doi.org/10.3390/fractfrac6020100>