

# 基于核心函数的机器人系统自适应跟踪控制

李法鹏, 徐登国\*

广西科技大学自动化学院, 广西 柳州

收稿日期: 2026年3月13日; 录用日期: 2026年4月5日; 发布日期: 2026年4月13日

## 摘要

实际运行中的单关节机器人系统往往面临模型参数摄动及未知外部扰动等非精确建模因素的影响, 这给高精度轨迹跟踪控制带来了挑战。针对这一问题, 本文提出了一种基于反步法的鲁棒自适应跟踪控制策略。首先, 建立了考虑外部扰动的严格反馈非线性系统模型。随后, 针对系统中存在的未知非线性动态, 引入一个未知常数作为其上界的核心参数, 并设计自适应律对其进行在线估计, 以补偿不确定性对系统的影响。在控制器设计过程中, 结合Lyapunov稳定性理论, 逐步构造虚拟控制律与实际控制律, 并利用不等式放缩技巧处理非线性耦合项。理论分析证明, 所提方法能保证闭环系统中所有信号一致最终有界, 且通过调节设计参数可使跟踪误差收敛至原点任意小的邻域内。最后, 仿真结果表明, 系统输出能够快速、准确地跟踪期望轨迹, 验证了该控制策略在处理模型不确定性方面的有效性和可行性。

## 关键词

机器人系统, 控制器设计, 单关节, 跟踪控制

# Adaptive Tracking Control of Robot Systems Based on Core Functions

Fapeng Li, Dengguo Xu\*

School of Automation, Guangxi University of Science and Technology, Liuzhou Guangxi

Received: March 13, 2026; accepted: April 5, 2026; published: April 13, 2026

## Abstract

In practical operation, single-joint robotic systems often face challenges posed by imprecise modeling, such as parameter perturbations and unknown external disturbances, which pose difficulties for high-precision trajectory tracking control. To address this issue, this paper proposes a robust adaptive

\*通讯作者。

tracking control strategy based on backstepping. First, a strict-feedback nonlinear system model accounting for external disturbances is established. Subsequently, to handle the unknown nonlinear dynamics in the system, an unknown constant is introduced as the core parameter that defines an upper bound for it, and an adaptive law is designed to estimate it online, compensating for the impact of uncertainties. During controller design, the Lyapunov stability theory is employed to construct virtual and actual control laws step by step, while inequality techniques are used to manage nonlinear coupling terms. Theoretical analysis demonstrates that the proposed method ensures that all signals in the closed-loop system are uniformly ultimately bounded, and by adjusting design parameters, the tracking error can be made to converge to an arbitrarily small neighborhood of the origin. Finally, simulation results show that the system output can quickly and accurately track the desired trajectory, validating the effectiveness and feasibility of this control strategy in handling model uncertainties.

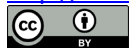
## Keywords

Robot System, Controller Design, Single Joint, Tracking Control

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

研究非线性反馈的方法有很多,各种方法有各自的优点,例如有通过神经网络[1][2]作为非线性反馈的,是一种高度不确定非线性系统,不依赖于状态估计的直接自适应输出反馈控制设计方法。还有通过模糊控制[3][4]设计控制器,并通过模糊逻辑系统的万能逼近性能对非线性系统中的不确定性因素进行辨识识别,设计出具有约束条件的控制器。通过模糊控制器和反步法结合设计[5],有约束的反馈设计[6],还有基于观测器反馈的非线性控制器设计,通过设计扰动观测器[7]补偿系统中的未知扰动。PID 控制反馈[8][9]和  $H_\infty$ 控制反馈[10][11]的非线性系统也具有其各自的优缺点。

本文首先对系统进行精确建模,包括系统参数、外部扰动和内部不确定性。这些不确定性因素会显著降低传统控制器的跟踪精度甚至导致系统失稳。尽管自适应控制和鲁棒控制理论已相对成熟,但如何针对单关节机器人设计一个结构简洁、既能在线估计未知动态又能保证暂态性能的控制器的,仍然是一个具有工程实际意义的问题。基于此,引入核心函数对系统中的未知非线性项进行参数化逼近,结合反步法设计自适应控制器,旨在解决经典系统在非精确建模条件下的高精度跟踪问题。因此,选择一个合适的核心函数,这个函数能够反映系统的行为和控制目标。核心函数通常与系统的性能指标相关,如稳态误差、过渡过程等。基于核心函数,设计一个控制器,使得系统的性能指标达到最优。这个控制器需要能够适应系统参数的变化和外部扰动。对设计的控制器进行稳定性分析,确保在不确定性和外部扰动的情况下,系统仍然稳定。通过仿真和实验验证控制策略的有效性,调整控制器参数以满足实际应用的需求。研究严格反馈非线性系统状态反馈下的机器人系统自适应跟踪控制问题。通过对严格反馈非线性系统的建模和分析,结合自适应控制理论和技术[12][13],提出一种有效的控制方法。该方法能够实现机器人系统对参考轨迹的高精度跟踪,同时具有较强的鲁棒性和适应性。首先,介绍了严格反馈非线性系统和机器人系统的基本概念和特点。然后,对严格反馈非线性系统的建模和分析方法进行了详细阐述。接着,介绍了自适应控制理论和技术,并将其应用于机器人系统的自适应跟踪控制中。最后,通过仿真实验和实际应用验证了所提出的控制方法的有效性和可行性。

## 2. 问题描述

本文主要研究已知参数严格反馈非线性机器人系统, 通过反步法设计控制器, 运用状态反馈的方法使机器人系统跟踪上目标。严格反馈非线性系统的输出不会对系统的输入产生反馈影响的一种系统, 是一种不可参数分解的系统。严格反馈非线性系统的应用涵盖了控制工程、机器人技术、信号处理、工业生产等多个领域, 为系统建模、分析和控制提供了重要的理论基础和工具。

### 2.1. 机器人数学模型

考虑如下不可参数分解的单关节机械臂系统:

$$M\ddot{q} + B\dot{q} + N\sin(q) + d(\theta, t) = u \quad (1)$$

其中,  $q \in \mathbb{R}$ ,  $\dot{q} \in \mathbb{R}$  分别代表机器人系统的位移和速度;  $u \in \mathbb{R}$  是控制输入;  $d = 0.1\sin(\theta t) \in \mathbb{R}$  代表外界干扰; 选取系统参数  $M = 1$ ,  $B = 1$ ,  $N = 10$ ,  $\theta = 1$ 。

把上述机器人系统化化为状态空间表达的形式, 让  $x_1 = q, x_2 = \dot{q}$ , 我们可以得到如下状态空间表达式:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 - 10\sin(x_1) - d(\theta, t) + u \\ y = x \end{cases} \quad (2)$$

其中,  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ;  $f_2(x_1, x_2, \theta) = -x_2 - 10\sin(x_1) - d(\theta, t) \in \mathbb{R}$  是光滑非线性函数,  $u \in \mathbb{R}$  是控制输入;  $y \in \mathbb{R}$  是系统输出。

**假设 1.** 系统状态  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ 、 $x_2$  完全可观。

**假设 2.** 理想信号  $y_d(t)$  及其导数  $y_d^{(k)}$  已知有界且分段连续。

### 2.2. 相关定义引理及定理

**命题 1.** 存在  $a_2 > 0$  和光滑函数  $\varphi_2(x_1, x_2) \geq 0$ , 使得  $|f_2(x_1, x_2, \theta)| \leq a_2\varphi_2(x_1, x_2)$ 。

**证明:** 由  $f_2(x_1, x_2, \theta) = -x_2 - 10\sin(x_1) - d(\theta, t)$ ,

所以

$$\begin{aligned} |f_2(x_1, x_2, \theta)| &\leq |x_2| + |10\sin(x_1)| + |d(\theta, t)| \\ &\leq x_2 + 10.1 \end{aligned} \quad (3)$$

故存在  $a_2 > 0$  使得  $|f_2(x_1, x_2, \theta)| \leq a_2\varphi_2(x_1, x_2)$ , 当  $\varphi_2 \leq x_2 + 10.1$  时,  $a_2 \geq 1$ 。当  $\varphi_2 > x_2 + 10.1$  时,  $0 < a_2 < 1$ 。

**引理 1.** [13] 考虑变量  $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n$  和满足  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  的常数  $p$  和  $q$ , 对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 以下不等式成立:

$$x^T y \leq \frac{\varepsilon^p}{p} \|x\|^p + \frac{1}{q\varepsilon^q} \|y\|^q$$

值得注意, 当  $x \in \mathbb{R}$  时, 可以改写为

$$\begin{aligned} xy &\leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \\ xy &\leq x^2 + \frac{y^2}{4} \end{aligned}$$

### 3. 鲁棒控制器设计

控制器设计的目标是要使系统信号  $x_1$  跟踪上理想信号, 通过设计 Lyapunov 函数判定状态量  $x_1$ 、状态量  $x_2$  和自适应率  $\hat{b}$  是否收敛, 从而判断系统是否稳定。

**步骤 1.** 定义如下形式坐标变换

$$\begin{cases} z_1 = x_1 - y_d \\ z_2 = x_2 - \alpha_1 \end{cases} \quad (4)$$

其中  $z_1$  是真实误差,  $z_2$  是虚拟误差,  $\alpha_1$  是需要设计的虚拟控制器, 因为  $x_2 = z_2 + \alpha_1$ , 真误差  $z_1$  的时间导数为

$$\dot{z}_1 = z_2 + \alpha_1 - \dot{y}_d \quad (5)$$

为了更清晰地掌握鲁棒自适应控制方法的思路, 选取以下 Lyapunov 函数

$$V_1 = \frac{1}{2} z_1^2 \quad (6)$$

其关于时间  $t$  的导数为

$$\dot{V}_1 = z_1 (z_2 + \alpha_1 - \dot{y}_d) \quad (7)$$

设计虚拟控制器  $\alpha_1$  为

$$\alpha_1 = -c_1 z_1 + \dot{y}_d \quad (8)$$

其中  $c_1 > 0$  是设计参数, 将虚拟控制器代入(7)式, 可得

$$\dot{V}_1 = -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 \quad (9)$$

**步骤 2.** 定义如下控制律

$$u = \alpha_2 \quad (10)$$

根据坐标变换, 注意到虚拟控制器  $\alpha_1$  是关于状态  $x_1$ , 理想信号  $y_d$ 、 $\dot{y}_d$  的函数, 因此

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 + \sum_{k=0}^1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_d^{(k)}} y_d^{(k+1)} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= \dot{x}_2 - \dot{\alpha}_1 \\ &= f_2 + \alpha_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 - \sum_{k=0}^1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_d^{(k)}} y_d^{(k+1)} \end{aligned} \quad (12)$$

定义 Lyapunov 函数

$$V_{21} = V_1 + \frac{1}{2} z_2^2 \quad (13)$$

则 Lyapunov 函数  $V_{21}$  的导数为

$$\dot{V}_{21} \leq -c_1 z_1^2 + z_2 \alpha_2 + \Xi \quad (14)$$

其中

$$\Xi = z_2 \left( f_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 - \sum_{k=0}^1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_d^{(k)}} y_d^{(k+1)} \right) + z_1 z_2 \quad (15)$$

是总的非线性项, 对  $\Xi$  利用引理 1, 可以得到以下四个不等式

$$z_2 f_2 \leq |z_2| a_2 \varphi_2 \leq a_2^2 z_2^2 \varphi_2^2 + \frac{1}{4} \quad (16)$$

$$-z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 \leq |z_2| \times \left| \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 \right| \leq z_2^2 \left( \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 \right)^2 + \frac{1}{4} \quad (17)$$

$$-z_2 \sum_{k=0}^1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_d^{(k)}} y_d^{(k+1)} \leq z_2^2 \left( \sum_{k=0}^1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_d^{(k)}} y_d^{(k+1)} \right)^2 + \frac{1}{4} \quad (18)$$

$$z_1 z_2 \leq z_1^2 z_2^2 + \frac{1}{4} \quad (19)$$

利用以上四个等式对  $\Xi$  放缩为

$$\Xi \leq b z_2^2 \phi_2 + 1 \quad (20)$$

$\phi_2$  定义如下

$$\phi_2 = \varphi_2^2 + \left( \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 \right)^2 + \left( \sum_{k=0}^1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_d^{(k)}} y_d^{(k+1)} \right)^2 + z_1^2 \quad (21)$$

其中

$$b = \max\{1, a_2^2\} \quad (22)$$

式(14)可进一步写为:

$$\dot{V}_{21} \leq -c_1 z_1^2 + z_2 \alpha_2 + b z_2^2 \phi_2 + 1 \quad (23)$$

定义如下 Lyapunov 函数:

$$V_2 = V_{21} + \frac{1}{2\gamma} \tilde{b}^2 \quad (24)$$

则 Lyapunov 函数  $V_2$  的导数为:

$$\dot{V}_2 \leq -c_1 z_1^2 + z_2 \alpha_2 + b z_2^2 \phi_2 + 1 - \frac{1}{\gamma} \tilde{b} \dot{\tilde{b}} \quad (25)$$

其中,  $\tilde{b} = b - \hat{b}$  是参数估计误差, 所以  $\dot{\tilde{b}} = -\dot{\hat{b}}$ ,  $\hat{b}$  是未知虚拟参数  $b$  的估计值,  $\gamma$  是正的设计参数。真实控制器  $\alpha_2$  为

$$\alpha_2 = -c_2 z_2 - \hat{b} z_2 \phi_2 \quad (26)$$

其中,  $c_2 > 0$  是设计参数, 自适应律设计为

$$\dot{\hat{b}} = \gamma z_2^2 \phi_2 - \sigma \hat{b}, \quad \hat{b}(0) \geq 0 \quad (27)$$

其中,  $\gamma$  和  $\sigma$  是正的参数,  $\hat{b}(0)$  是参数估计  $\hat{b}(t)$  的初始值。

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\gamma} \tilde{b} \dot{\tilde{b}} &= -\frac{1}{\gamma} \tilde{b} (\gamma z_2^2 \phi_2 - \sigma \hat{b}) \\ &= -\tilde{b} z_2^2 \phi_2 + \frac{\sigma}{\gamma} \tilde{b} \hat{b} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma}{\gamma} \tilde{b} \hat{b} &= \frac{\sigma}{\gamma} \tilde{b} (b_1 - \tilde{b}) = \frac{\sigma}{\gamma} (\tilde{b} b_1 - \tilde{b}^2) \\
&\leq \frac{\sigma}{\gamma} \left( \frac{1}{2} b_2^2 + \frac{1}{2} \tilde{b}^2 - \tilde{b}^2 \right) \\
&= \frac{\sigma}{\gamma} \left( \frac{1}{2} b_2^2 - \frac{1}{2} \tilde{b}^2 \right)
\end{aligned} \tag{29}$$

将虚拟控制器代入  $z_2 \alpha_2$ , 利用自适应律表达式(27), 式(25)可进一步放缩为

$$\dot{V}_2 \leq -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - \frac{\sigma}{2\gamma} \tilde{b}^2 + \Delta \tag{30}$$

其中

$$\Delta = 1 + \frac{\sigma}{2\gamma} b^2 \tag{31}$$

**定理 1.** 对于机器人控制系统满足假设 1、假设 2 和命题 1 的不可参数分解的严格反馈非线性系统, 设计的鲁棒控制器(10)和自适应率律(27), 提出的算法不仅保证闭环系统所有信号有界, 同时保证跟踪信号收敛到原点的足够小区域。

**证明:** 如果 Lyapunov 候选函数为

$$V = V_2 \tag{32}$$

则根据式(30)可得

$$\dot{V} \leq -\rho V_2 + C \tag{33}$$

其中,  $\rho = \min\{c_1, c_2, \sigma\} > 0$ ;  $C = \Delta$ 。

首先, 分析闭环系统信号的有界性。根据式(30)可以得到  $V(t) \in L_\infty$ , 因此  $z_1 \in L_\infty$ ,  $z_2 \in L_\infty$ ,  $\tilde{b} \in L_\infty$ , 因为  $\tilde{b} = b - \hat{b}$ , 所以  $\hat{b} \in L_\infty$ 。根据坐标变换  $z_1 = x_1 - y_d$ , 且  $y_d \in L_\infty$ , 则  $x_1 \in L_\infty$ 。根据虚拟控制器  $\alpha_1$  表达式可以看出是有界的。因为  $\phi_2$  有界, 所以真实控制器  $\alpha_2$  和自适应律  $\hat{b}$  有界。同理可以判断系统状态  $x_2$ , 真实控制器  $u$  有界。

其次, 分析跟踪性能, 式(33)可写为以下形式

$$\dot{V}_2 \leq -c_1 z_1^2 + C \tag{34}$$

当  $|z_1| > \sqrt{(C+\mu)/c_1}$  时,  $\dot{V}_2$  为负, 其中  $\mu$  是一个小常数, 因此  $|z_1|$  会进入并停留在紧凑集合  $\Omega_{z_1} = \{z_1 \in \mathbb{R} \mid |z_1| \leq \sqrt{(C+\mu)/c_1}\}$ , 通过增加设计参数  $c_1$  可确保得到较好的跟踪效果。

## 4. 仿真及结果分析

### 4.1. 仿真参数

机器人系统要跟踪上设计的信号并使其稳定, 采用如下仿真参数: 设计的跟踪信号  $y_d = 0.5 \sin(t)$ ,  $\varphi_2 = x_2 + 15$ ,  $c_1 = 6$ ,  $c_2 = 6$ ,  $\gamma = 0.5$ ,  $\sigma = 0.5$ , 初始值  $x_1(0) = 0$ ,  $x_2(0) = 0$ ,  $\hat{b} = 0$ 。

### 4.2. 仿真结果

如图 1 所示, 理想信号  $y_d(t)$  可以跟踪上状态量  $x_1$ , 我们可以调节设计参数  $c_1$  就可以调节控制的跟踪误差。在初始阶段, 由于系统状态  $x_1(0) = 0$  与理想信号存在微小偏差, 系统存在短暂的动态调节过程;

但随后实际输出与理想信号的曲线几乎重合, 呈现出良好的稳态跟踪性能。这验证了基于反步法设计的控制器在实现轨迹跟踪方面的有效性。

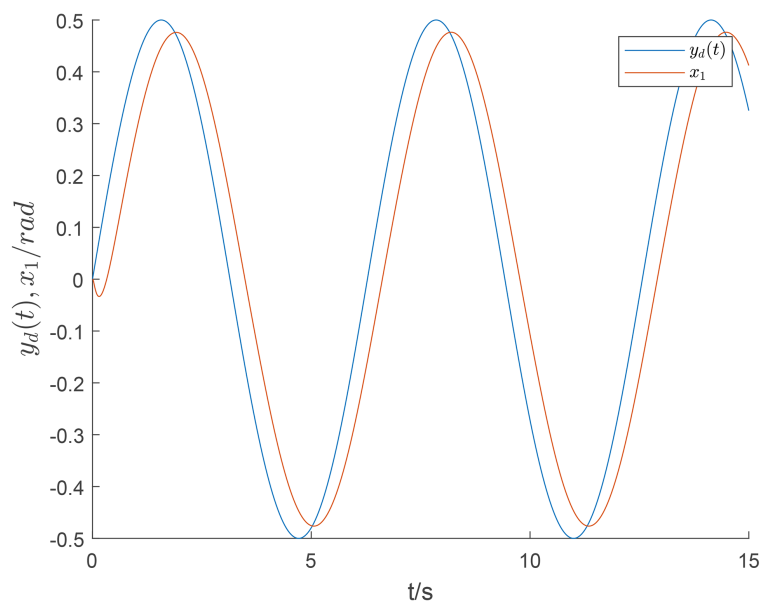


Figure 1.  $y_d(t)$ 、 $x_1$  simulation diagram

图 1.  $y_d(t)$ 、 $x_1$  仿真线图

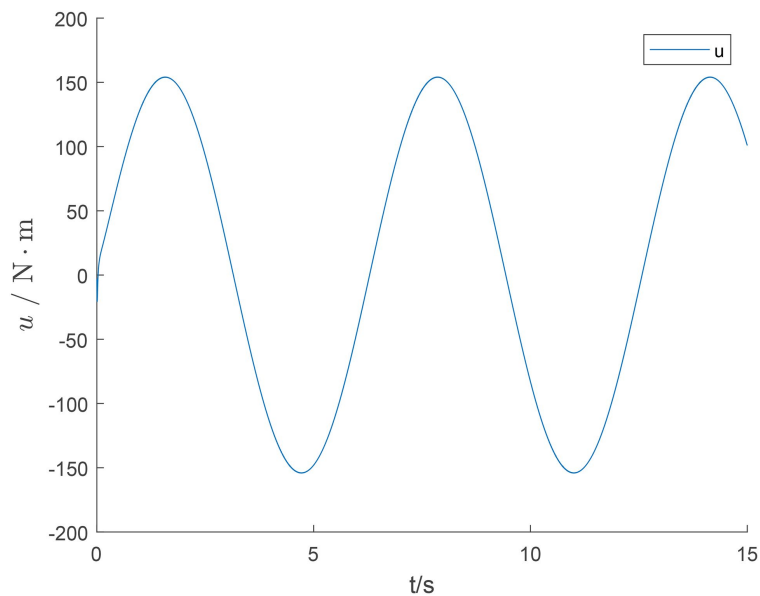


Figure 2.  $u$  simulation diagram

图 2.  $u$  仿真线图

图 2 为控制输入  $u$  的仿真曲线。由图可知, 控制信号  $u$  整体平滑且有界, 未出现高频抖振或发散现象。这表明所设计的控制器不仅能够驱动系统稳定运行, 而且具有良好的工程可实现性。结合图 1 的跟踪效果, 验证了控制方案的有效性。

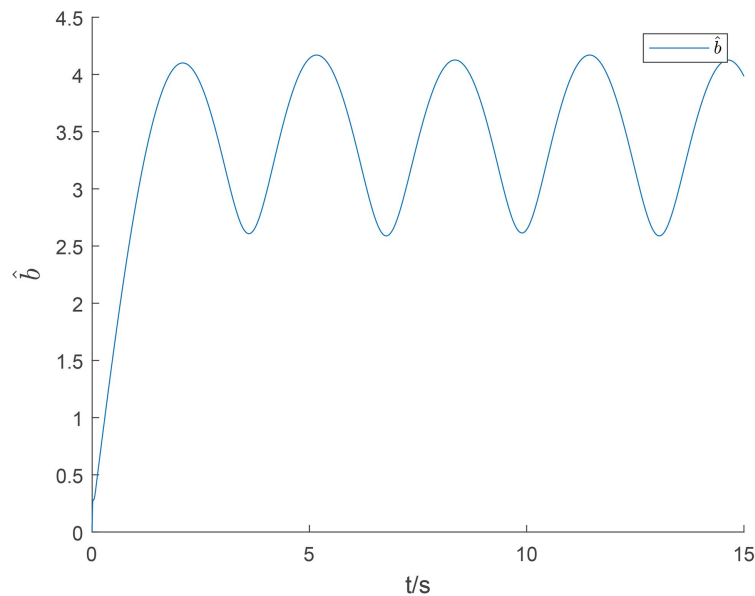


Figure 3.  $\hat{b}$  simulation diagram

图3.  $\hat{b}$  仿真线图

图3为自适应参数 $\hat{b}$ 的估计曲线。从图中可以看出， $\hat{b}$ 在初始阶段经过短暂调整后，迅速收敛至稳定值附近，并在后续时间内保持有界且无明显波动。这表明所设计的自适应律(27)能够有效在线估计未知参数 $b$ ，参数估计误差最终一致有界。结合定理1的Lyapunov稳定性分析， $\hat{b}$ 的收敛性进一步验证了闭环系统所有信号有界的理论结论，证明了控制方案中参数估计部分的准确性与有效性。

## 5. 结论

本文针对单关节机器人系统的轨迹跟踪问题，提出了一种基于反步法的鲁棒自适应控制策略。在建立考虑外部扰动的严格反馈非线性系统模型的基础上，结合Lyapunov稳定性理论，逐步设计了虚拟控制器、实际控制律以及参数自适应更新律。所设计的控制器能够在线估计系统非线性项的上界参数，有效克服了模型不确定性和外部扰动对跟踪性能的影响。理论分析表明，通过合理调节设计参数 $c_1$ 、 $c_2$ 等，可将跟踪误差收敛到原点附近任意小的邻域内，且闭环系统中所有信号均有界。仿真结果验证了控制方案的有效性：系统输出能够快速准确地跟踪理想信号，动态响应平稳，稳态误差小；控制输入曲线平滑有界，具有良好的工程可实现性；自适应参数估计收敛迅速，验证了Lyapunov稳定性分析的正确性。本文方法解决了传统控制技术中跟踪误差大、抗扰能力弱的问题，为机器人高精度跟踪控制提供了一种结构简洁、稳定性严格保证的有效方案。

## 参考文献

- [1] Calise, A.J., Hovakimyan, N. and Idan, M. (2001) Adaptive Output Feedback Control of Nonlinear Systems Using Neural Networks. *Automatica*, **37**, 1201-1211. [https://doi.org/10.1016/s0005-1098\(01\)00070-x](https://doi.org/10.1016/s0005-1098(01)00070-x)
- [2] 孙国法, 田宇, 王素珍. 严格反馈非线性系统的自适应神经网络输出反馈控制[J]. 控制理论与应用, 2017, 34(3): 375-382.
- [3] 宗学军, 吴振强. 基于反演法的严格反馈非线性系统模糊自适应约束控制[J]. 沈阳化工大学学报, 2018, 32(3): 193-198.
- [4] 刘毅, 赵军. 基于输出反馈的切换模糊控制设计[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2008, 29(1): 9-12.
- [5] Tong, S.C. and Li, Y.M. (2010) Robust Adaptive Fuzzy Backstepping Output Feedback Tracking Control for Nonlinear

System with Dynamic Uncertainties. *Science China Information Sciences*, **53**, 307-324.

<https://doi.org/10.1007/s11432-010-0031-y>

- [6] He, P. and Jagannathan, S. (2005) Reinforcement Learning-Based Output Feedback Control of Nonlinear Systems with Input Constraints. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, **35**, 150-154.  
<https://doi.org/10.1109/tsmcb.2004.840124>
- [7] 于欣波, 贺威, 薛程谦, 等. 基于扰动观测器的机器人自适应神经网络跟踪控制研究[J]. 自动化学报, 2019, 45(7): 1307-1324.
- [8] 陈龙胜, 王琦. 不确定连续系统预设性能非线性 PID 控制[J]. 应用科学学报, 2017, 35(6): 786-796.
- [9] 胡力刚, 许伟明. 非线性系统的 PID 控制器的研究与设计[J]. 计算机仿真, 2010, 27(12): 195-199.
- [10] 刘亚, 胡寿松. 基于模糊模型的时滞不确定系统的模糊 $H_\infty$ 鲁棒反馈控制[J]. 控制理论与应用, 2003, 20(4): 497-502.
- [11] 聂宏, 赵军. 一类非线性不确定时滞系统的混杂状态反馈 $H_\infty$ 鲁棒控制[J]. 控制理论与应用, 2005, 22(4): 567-572.
- [12] 王洪斌, 吴健珍, 王洪瑞. 不确定性机器人的自适应跟踪控制[J]. 基础自动化, 2002, 9(2): 21-23.
- [13] 张星慧, 孙宗耀. 一类有零动态的不确定非线性系统的光滑自适应状态反馈镇定[J]. 曲阜师范大学学报: 自然科学版, 2013, 39(2): 1-9.