

基于LM优化算法的无试重动平衡方法

陶家航¹, 宋程杰¹, 魏宁¹, 单一男^{1,2*}

¹大连交通大学詹天佑学院, 辽宁 大连

²中车青岛四方机车车辆股份有限公司, 山东 青岛

收稿日期: 2026年4月22日; 录用日期: 2026年5月15日; 发布日期: 2026年5月25日

摘要

针对传统转子动平衡方法依赖试重实验、需频繁启停机且效率较低的问题, 提出一种基于仿真影响系数与Levenberg-Marquardt优化算法相结合的无试重动平衡方法。首先, 以砂轮机转子为研究对象, 建立双圆盘-双支承转子有限元模型, 并通过施加单位不平衡量获取影响系数矩阵, 实现仿真替代试重实验。其次, 在最小二乘影响系数法基础上引入LM算法, 并结合惩罚函数构建带约束优化模型, 以提高求解稳定性并满足振动限值要求。最后, 通过不同不平衡质量工况下的仿真与实验验证方法有效性。结果表明, 该方法可显著降低转子振动响应, 在3 g不平衡工况下平衡效率达到87%以上, 验证了其良好的稳定性与有效性。

关键词

转子动平衡, 无试重, 影响系数, LM算法, 有限元, 约束优化

Method for Dynamic Balancing without Trial Weight Based on LM Optimization Algorithm

Jiahang Tao¹, Chengjie Song¹, Ning Wei¹, Yinan Shan^{1,2*}

¹Zhan Tianyou College, Dalian Jiaotong University, Dalian Liaoning

²CRRC Qingdao Sifang Locomotive and Rolling Stock Co., Ltd., Qingdao Shandong

Received: April 22, 2026; accepted: May 15, 2026; published: May 25, 2026

Abstract

Addressing the issues of traditional rotor dynamic balancing methods, which rely on trial weight experiments, require frequent start-ups and shutdowns, and have low efficiency, a no-trial-weight dynamic balancing method based on the combination of simulation influence coefficients and

*通讯作者。

Levenberg-Marquardt optimization algorithm is proposed. Firstly, taking the grinder rotor as the research object, a finite element model of a dual-disc, dual-support rotor is established, and the influence coefficient matrix is obtained by applying a unit unbalance, achieving simulation as a substitute for trial weight experiments. Secondly, based on the least squares influence coefficient method, the LM algorithm is introduced, and a constrained optimization model is constructed in combination with a penalty function to improve the stability of the solution and meet vibration limit requirements. Finally, the effectiveness of the method is verified through simulations and experiments under different unbalanced mass conditions. The results show that this method can significantly reduce the rotor vibration response, achieving a balancing efficiency of over 87% under a 3 g unbalanced condition, verifying its good stability and effectiveness.

Keywords

Rotor Dynamic Balancing, No Trial Weight, Influence Coefficient, LM Algorithm, Finite Element Constrained Optimization

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

旋转机械作为现代工业的核心装备，广泛应用于航空航天、能源电力、石油化工、交通运输及先进制造等国民经济支柱领域。在影响旋转机械稳定运行的诸多因素中，转子质量不平衡约占转子故障中的70%，是最常见且最主要的激振源。因此，对转子系统进行精确的动平衡，将振动水平控制在允许范围内，是旋转机械设计、制造、安装及维护过程中至关重要的环节。

徐宾刚和屈梁生等人依据影响系数法的理论，针对柔性转子直接以降低残余振动为目标，进行无试重启车的新的思路[1]。宾光富等人在分析影响系数法平衡原理的基础上，提出一种基于有限元模型分析的转子动平衡影响系数求解方法[2]。宾光富针对目前传统影响系数法难以平衡某些大型汽轮机低压转子的难题，提出一种基于模态振型分析的大型柔性转子高速动平衡方法[3]。章璟璇对影响系数法中的最小二乘法进行改进，提出了限制配重的最小二乘法和基于遗传算法的最小二乘法[4]。Han 等基于动力学模型对航空发动机转子不平衡进行了敏感性分析，应用一维卷积神经网络算法对不平衡位置进行了识别[5]。Guan 等考虑齿轮啮合激励和多位置碰摩效应，建立转子系统动力学模型，通过这种方法能够捕捉低频和高频的系统动态特性[6]。Zhang 等针对航空发动机燃气发生器转子因压缩机和涡轮的不平衡耦合导致的过度振动问题，提出了基于“胡桃夹子优化算法”的最小二乘影响系数法，并探讨了组合不平衡相位差对转子振动的影响[7]。Yao 等提出了一种基于遗传算法结合双目标优化方法的多速柔性转子动平衡方法[8]。Zhang 提出了一种基于差分进化算法的动平衡方法，通过对不平衡量的识别，采用差分进化算法获取优化解，帮助有效抑制不平衡振动[9]。石常志提出了融合卷积神经网络与双向长短期记忆网络的智能辨识方法，通过提取转子系统振动响应仿真数据，结合变分模态分解法对实验数据进行预处理，构建混合数据库[10]。

本文以砂轮机转子为研究对象，建立双圆盘-双支承转子有限元模型，并通过施加单位不平衡量获取影响系数矩阵，实现仿真替代试重实验。其次，在最小二乘影响系数法基础上引入 LM 算法，并结合惩罚函数构建带约束优化模型，以提高求解稳定性并满足振动限值要求。最后，通过不同不平衡质量工况下的仿真与实验验证方法有效性。

2. 基于 LM 算法的无试重动平衡方法

在转子动平衡问题中, 最小二乘影响系数法因其计算简便、实现容易而被广泛应用。其基本思想是通过建立影响系数矩阵, 将测点振动响应与配平量之间的关系转化为线性方程组, 并通过全局残余振动最小化实现最优配平量求解。为提高求解稳定性, 通常引入 Levenberg-Marquardt (LM) 算法对最小二乘问题进行改进。LM 算法通过引入阻尼因子, 使求解过程在梯度下降与高斯-牛顿法之间自适应切换, 从而增强算法的收敛性与数值稳定性。

然而 LM 算法仅能改善求解过程的数值特性, 而未改变优化问题本质。具体而言, 其仍然存在以整体残余振动最小化为唯一目标、无法对单个测点振动进行约束的问题。因此, 有必要在 LM 算法框架下引入约束优化思想, 从根本上解决测点振动超标问题。

为克服传统方法的不足, 本文在 LM 算法基础上引入振动约束条件, 构建如下优化模型:

$$\min \|AU - X\|_2^2$$

满足不等式约束:

$$|AU - X| \leq X_{\text{lim}}$$

其中 X_{lim} 为各测点允许的振动上限。

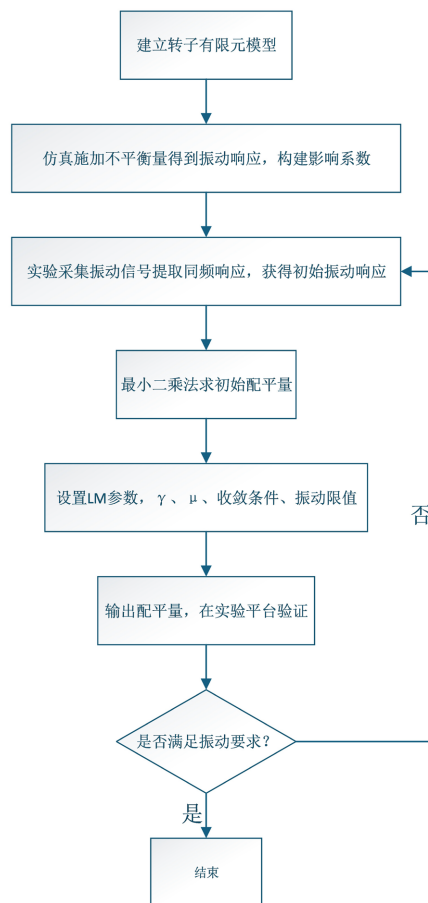


Figure 1. Flowchart of dynamic balance for LM optimization algorithm

图 1. LM 优化算法动平衡流程图

该模型属于带不等式约束的非线性最小二乘问题，其目标是在保证振动满足工程标准的前提下，最小化整体残余振动。传统 LM 算法虽然能够有效提高最小二乘问题的数值稳定性，但其本质仍属于无约束优化方法，无法对测点振动幅值进行显式控制。因此，若要在保证求解稳定性的同时满足工程振动限值要求，必须将约束条件引入优化过程。由于 LM 算法本质为无约束优化方法，本文采用惩罚函数法将约束引入目标函数中，实现约束优化与最小二乘求解的统一，从而构建适用于转子动平衡问题的改进算法，构建如下优化模型：

$$\min_U AU - X_2^2 + \mu \sum_{i=1}^n \max(0, |r_i(U)| - X_{i,\text{lim}})^2$$

其中， μ 为惩罚因子。当 μ 较小时，算法更接近高斯 - 牛顿法，具有较快收敛速度；当 μ 较大时，算法更接近梯度下降法，虽收敛速度较慢，但稳定性更好。初始阶段取一较小正值作为起点，在每次迭代后根据目标函数变化情况对 μ 进行调整：若残差减小，则适当减小 μ ，以提升收敛效率；若残差增大，则适当增大 μ ，以增强算法稳定性并避免发散。该策略能够在保证求解精度的同时，提高不平衡参数识别的鲁棒性。

基于仿真影响系数与 LM 优化的无试重动平衡方法具体步骤，如图 1 所示。首先，建立转子有限元模型，通过施加不平衡量得到仿真影响系数；然后通过实验得到的初始振动，通过最小二乘法得到配平量；其次，通过 LM 优化算法迭代得到最优配平质量与相位；最后通过实验平台验证配平效果。

3. 基于 LM 算法优化的有限元仿真验证

3.1. 有限元模型建立

为验证所提出的基于仿真影响系数与 LM 优化算法的无试重动平衡方法的有效性，建立根据实验平台简化后的转子有限元模型。该模型采用双支承双圆盘转子结构，左右两端由轴承支撑，两个圆盘分别作为动平衡校正面，左侧圆盘记为平衡面 1，右侧圆盘记为平衡面 2。在仿真分析中，设置转子转速为 3000 r/min，并选取靠近两端轴承位置作为振动测点，左侧测点记为测点 1，右侧测点记为测点 2，各测点及校正面位置如图 2 所示。

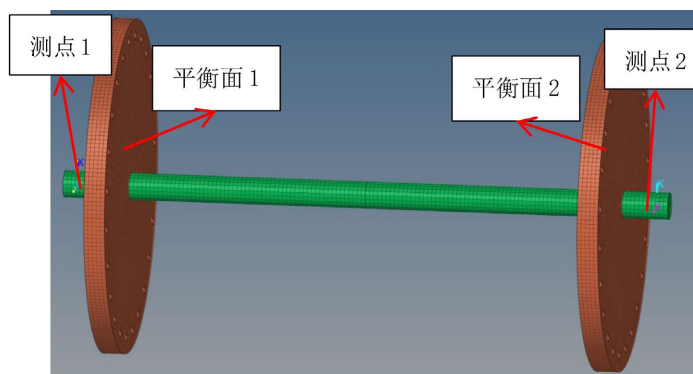


Figure 2. Locations of two measuring points and the balance plane in the finite element model of the rotor system

图 2. 转子系统有限元模型两测点与平衡面位置

转轴和圆盘的材料属性如表 1 所示，两侧均采用 solid185 实体单元，两端滑动轴承采用 COMBIN14 单元模拟。为了模拟轴承，在轴承支撑截面创建中心节点作为主节点，该截面的其他节点为从节点，创建刚性区域，使用 2 个 COMBIN14 单元，与刚性区域的主节点相连，分别创建 x 方向和 y 方向共 2 个的

弹簧，建立轴承在径向平面的位移，最后在弹簧的另一端施加全约束用于模拟固定的轴承座。

Table 1. Material properties of the disc and shaft

表 1. 圆盘和转轴的材料属性

	材质	密度(g/cm ³)	弹性模量(Gpa)	泊松比
圆盘	304 不锈钢	7.93	193	0.3
转轴	合金钢	7.85	210	0.3

3.2. 仿真不平衡振动分析

在转子动平衡研究中，加速度信号能够更加敏感地反映系统的振动状态，尤其在中高频范围内具有较高的分辨能力。因此，本文选取加速度作为主要分析对象，对不同不平衡工况下的时域响应特性进行研究。分别在右侧圆盘同一位置施加 1 g、2 g 和 3 g 不平衡质量，将不平衡质量所在位置记为初始相位。将转速设置为 3000 r/min，对应转频为 50 Hz，信号周期为 0.02 s，得到两测点的加速度时域振动响应信号及对应的一倍频信号，结果如图 3、图 4、图 5 所示。

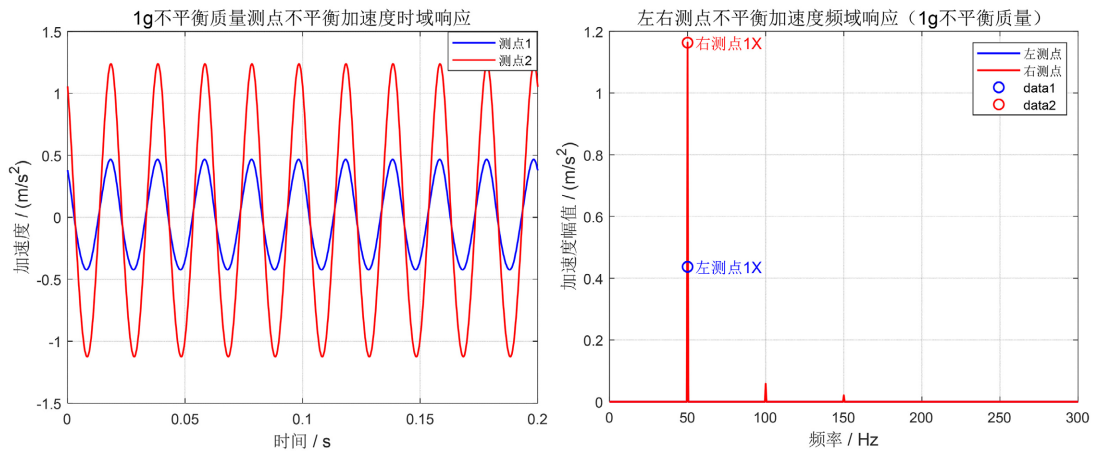


Figure 3. Unbalanced vibration response and its first-order frequency of 1 g unbalanced mass

图 3. 1 g 不平衡质量不平衡振动响应及其 1 倍频

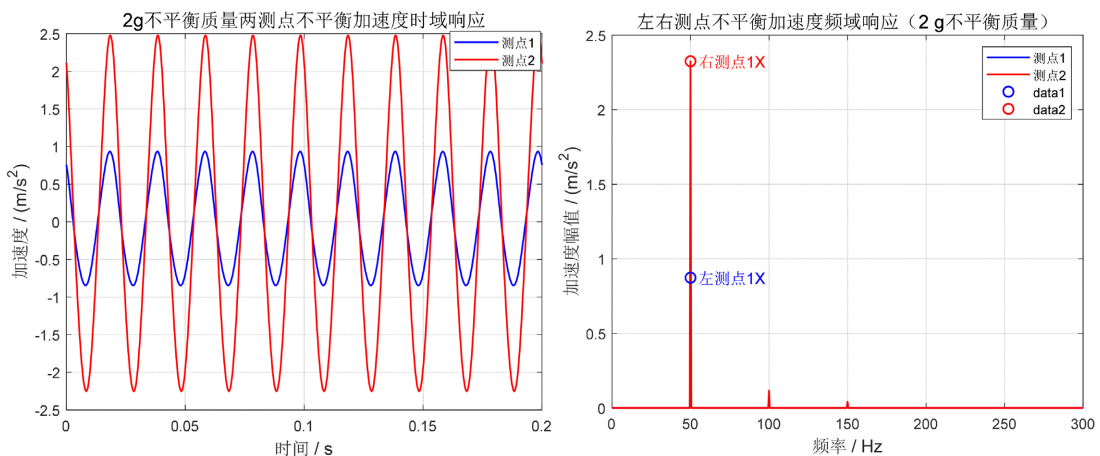


Figure 4. Unbalanced vibration response and its first-order frequency of 2 g unbalanced mass

图 4. 2 g 不平衡质量不平衡振动响应及其 1 倍频

从 1 g 不平衡质量振动响应结果可以看出, 由于测点 2 靠近施加不平衡质量的右侧圆盘, 所以右测点响应明显大于左测点, 且一倍频占主导地位, 其幅值远远高于其他倍频, 说明转子受到的不平衡激励主要来源于转子的质量偏心, 而转子不对中及非线性特性对转子的影响可以忽略不计, 符合转子单侧不平衡激励下的典型仿真响应特征。

当右侧圆盘某一孔处施加 2 g 不平衡质量时, 左右测点振动响应幅值进一步增大, 其中右侧测点对不平衡激励更为敏感。由时域与频域结果可知, 系统振动仍以转频分量为主, 且右测点响应明显高于左测点, 表明单侧圆盘加重不平衡时振动响应具有明显的空间非对称性。

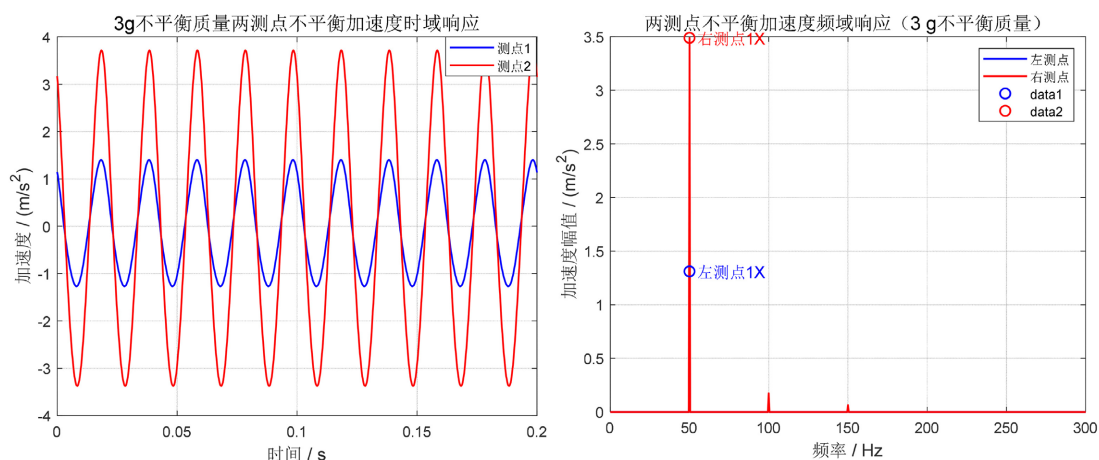


Figure 5. Unbalanced vibration response and its first-order frequency of 3 g unbalanced mass

图 5. 3 g 不平衡质量不平衡振动响应及其 1 倍频

当右侧圆盘某一孔处施加 3 g 不平衡质量时, 左右测点振动响应进一步增大, 且右侧测点响应幅值始终大于左侧测点。时域响应表现为较规则的周期振动, 频域响应则主要集中于转频及其少量倍频成分, 说明随着不平衡量增大, 系统振动水平显著提高。

分析添加 1 g、2 g、3 g 不平衡质量得到的不平衡时域信号可以得到, 由于仿真信号未引入随机噪声及外部扰动因素, 所以信号呈周期性的光滑的周期曲线。随着不平衡质量由 1 g 逐渐增加至 3 g, 加速度信号的幅值明显提高, 且呈现出近似线性增长趋势, 这是由于不平衡离心力与质量成正比, 当不平衡质量增大时, 激励力幅值相应增大, 从而导致系统振动响应增强。

3.3. LM 优化动平衡仿真结果

在获得不平衡响应后, 基于仿真得到的影响系数矩阵, 采用 LM 优化算法对配平量进行求解。以左右两个圆盘作为校正面, 建立多测点残余振动最小化的优化模型, 对不同不平衡工况进行配平计算, 得到两平衡平面的配平量, 如表 2 所示。

Table 2. Magnitude and phase of correction quantities for the two balanced planes

表 2. 两平衡平面校正量大小及相位

不平衡质量	平衡面 1 配平质量(g)	平衡面 1 配平相位(度)	平衡面 2 配平质量(g)	平衡面 2 配平相位(度)
1 g	0.116	201.8	0.905	182.6
2 g	0.239	205.1	1.817	179.3
3 g	0.361	207.4	2.742	184.1

由表中两个平衡平面的配平结果可以得到，在三种工况下右圆盘的配平质量皆明显大于左圆盘，说明系统主要不平衡来源于右侧圆盘位置，右校正面承担主要配平作用，而左校正面起辅助修正作用。

将表 2 中的平衡量添加到两圆盘对应的位置上，对转子进行配平后的响应分析，为进一步分析配平效果，选取左右测点的加速度时域信号作为评价指标，对两测点配平前后振动响应进行对比，各不平衡质量配平效果如图 6、图 7、图 8 所示。

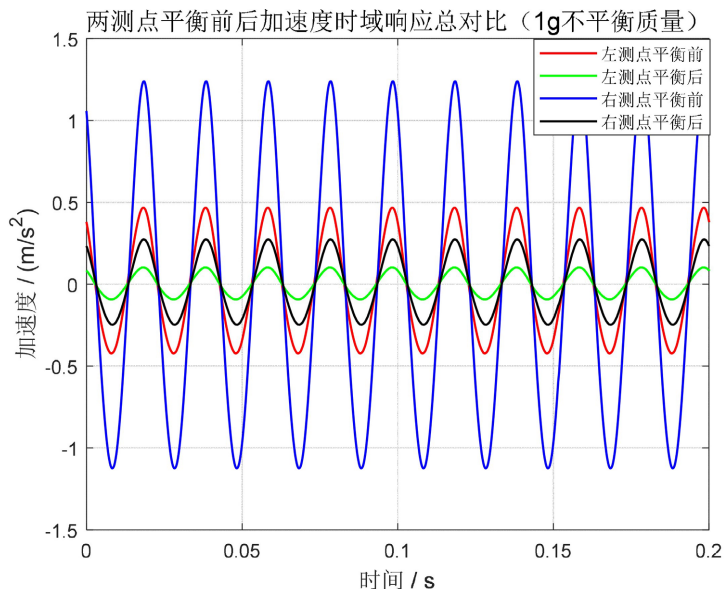


Figure 6. Effect of balancing with 1 g unbalanced mass

图 6. 1 g 不平衡质量配平效果

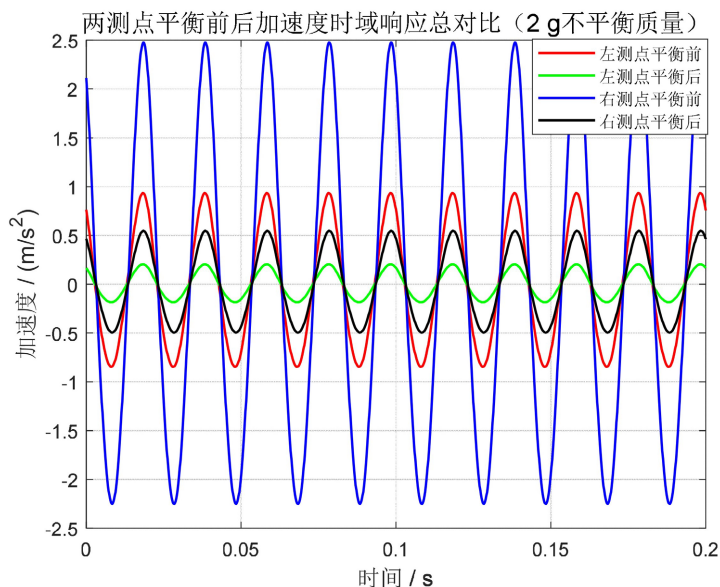


Figure 7. Effect of balancing with 2 g unbalanced mass

图 7. 2 g 不平衡质量配平效果

通过 1 g 和 2 g 不平衡质量的配平效果结果表明，配平后左右测点响应均明显减小，其中右测点振动下降更为显著，说明所采用的配平方法能够有效抑制因靠近不平衡量所在位置所引起的更大的振动响应。

配平后各工况下的加速度时域信号仍保持良好的周期性特征，其振动形式仍以同步旋转激励为主，但振动幅值显著减小。同时，左右测点之间的响应差异明显缩小，表明两校正面配平不仅降低了局部振动水平，而且改善了系统整体振动分布，使转子运行更加稳定。

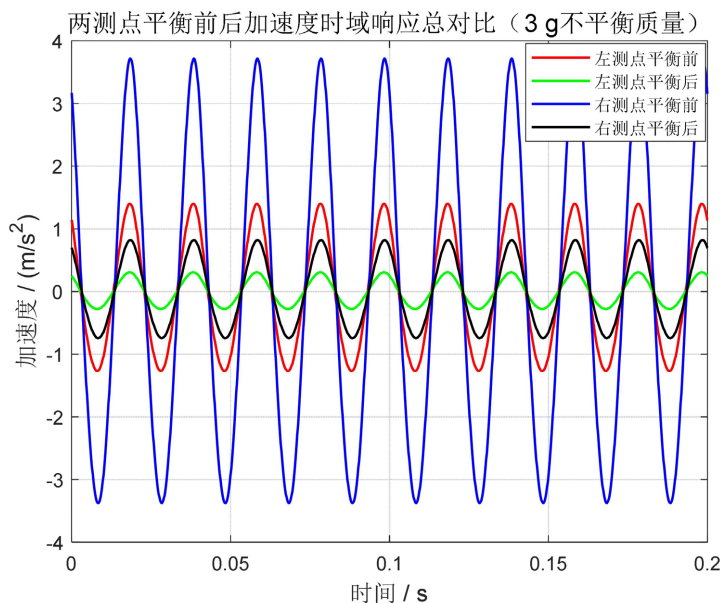


Figure 8. Effect of balancing with 3 g unbalanced mass
图 8. 3 g 不平衡质量配平效果

在 3 g 不平衡质量的情况下，动平衡效率达到最高，测点 2 的降振效果可达到 76%，说明所求得的配平量能够有效抵消原始不平衡激励。

通过不同不平衡质量 1 g、2 g、3 g 工况的振动响应分析，对平衡前后的加速度时域响应信号进行了对比分析。结果表明，随着不平衡质量的增加，动平衡效率显著提高，且在平衡 3 g 不平衡质量时平衡效率达到了 76%，同时验证了所提出的基于仿真影响系数与 LM 优化算法的无试重动平衡方法的有效性。

4. 基于 LM 算法优化的实验验证

4.1. 实验平台搭建

为进一步验证基于仿真影响系数与 LM 优化算法的无试重动平衡方法在实际工况下的有效性，搭建转子动平衡实验平台。实验对象为砂轮机转子系统，由于受到电机转差、负载扰动及转速波动影响，转子实际转速为 2980 r/min。转子两端通过轴承支撑，左右两个圆盘分别作为动平衡校正面，左侧圆盘记为平衡面 1，右侧圆盘记为平衡面 2，两测点选择左右两侧保护罩，将加速度传感器安装到两侧保护罩上，呈 90 度安装，用于采集转子振动响应信号，左侧测点记为测点 1，右侧测点记为测点 2，实验装置各测点与平衡平面位置如图 9 所示。

本次实验所用数据采集装置为东华测试设备 DH5922N 采集器，采集后的数据传输到计算机对应软件进行分析，为保证采集信号的准确性与完整性，采样频率设置为 2 kHz，能够满足转子振动信号采集，动平衡数据采集系统如图 10 所示。配重圆盘上周向均匀布置 24 个螺孔，用于添加不平衡质量以及进行动平衡配平操作。实验过程中，配平质量通过高精度电子秤进行称量，并严格按照计算得到的质量值添加至指定孔位，以保证配平结果的准确性。

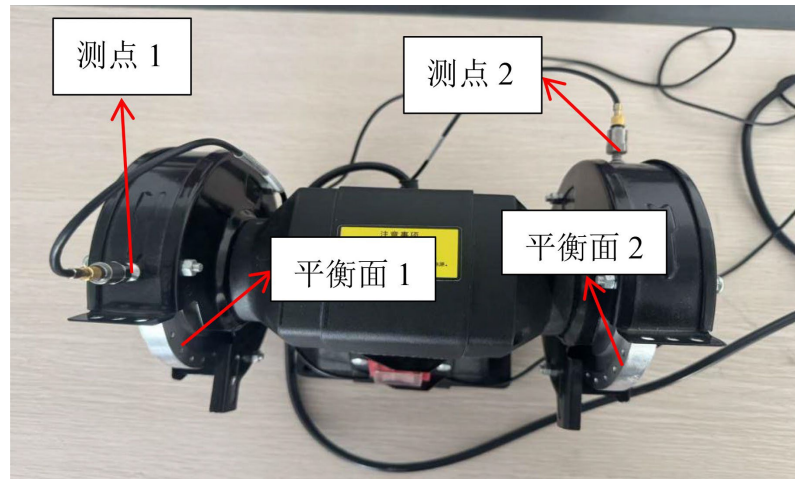


Figure 9. Test points and equilibrium plane positions on the experimental platform
图 9. 实验平台测点与平衡平面位置

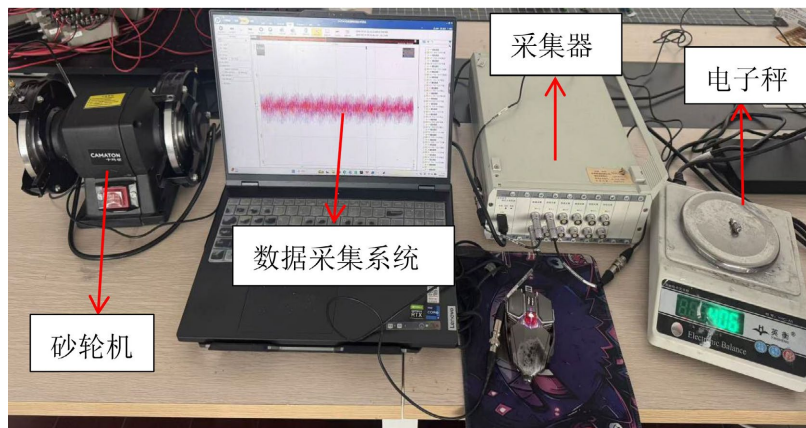


Figure 10. Dynamic balance data acquisition system
图 10. 动平衡数据采集系统

4.2. 动平衡效果分析

在平衡面 1 选定一螺孔位依次添加 1 g、2 g、3 g 不平衡质量，通过两侧加速度传感器，采集转子两端测点的加速度振动响应信号，并结合有限元仿真建立的影响系数矩阵，采用 LM 优化算法对各校正面的配平量进行求解。在获得最优配平质量及其相位后，由于实验装置中配重圆盘仅在周向离散的螺孔位置处允许安装配平质量，无法实现任意角度的连续布置，因此需要对理论计算得到的配平量进行等效处理。

Table 3. Size and phase of balancing quantities on each balance surface after vector synthesis equivalence

表 3. 矢量合成等效后的各平衡面配平量的大小与相位

不平衡质量	平衡面 1 配平质量(g)	平衡面 1 配平相位(度)	平衡面 2 配平质量(g)	平衡面 2 配平相位(度)
1 g	0.886	180	0.132	210
2 g	1.764	180	0.268	210
3 g	2.648	180	0.401	210

具体而言，将 LM 优化得到的配平质量视为复数形式的矢量，通过矢量分解与合成的方法，将其等

效分配至相邻的两个或多个螺孔位置。根据各螺孔的实际角度位置，将目标配平矢量分解为若干离散方向上的分量，并通过调整各孔位的配重质量，使其合成效果尽可能逼近理论最优配平矢量，从而实现配平量在离散空间中的等效表达。各不平衡质量下，通过矢量合成等效后的各配平量的大小与相位如表 3 所示。

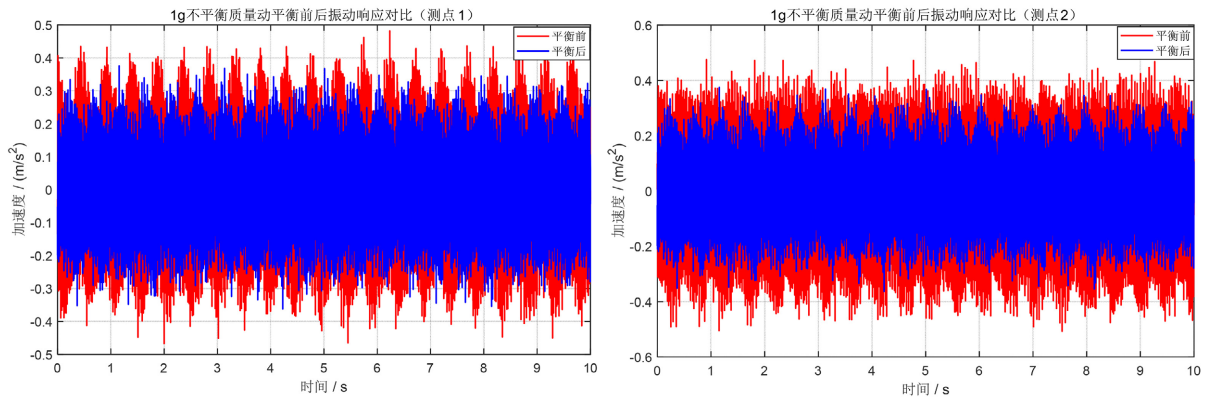


Figure 11. Comparison of vibration response before and after dynamic balancing of 1 g unbalanced mass

图 11. 1 g 不平衡质量动平衡前后振动响应对比

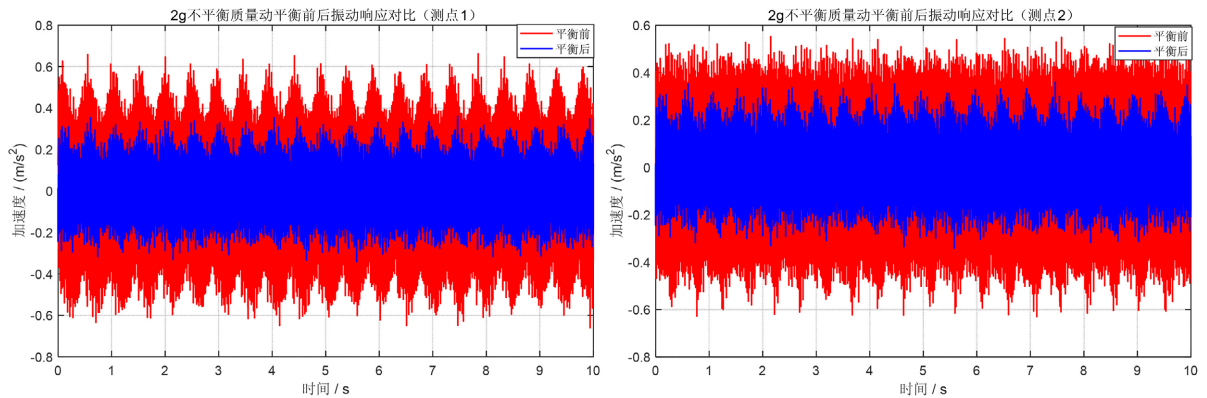


Figure 12. Comparison of vibration response before and after dynamic balancing of 2 g unbalanced mass

图 12. 2 g 不平衡质量动平衡前后振动响应对比

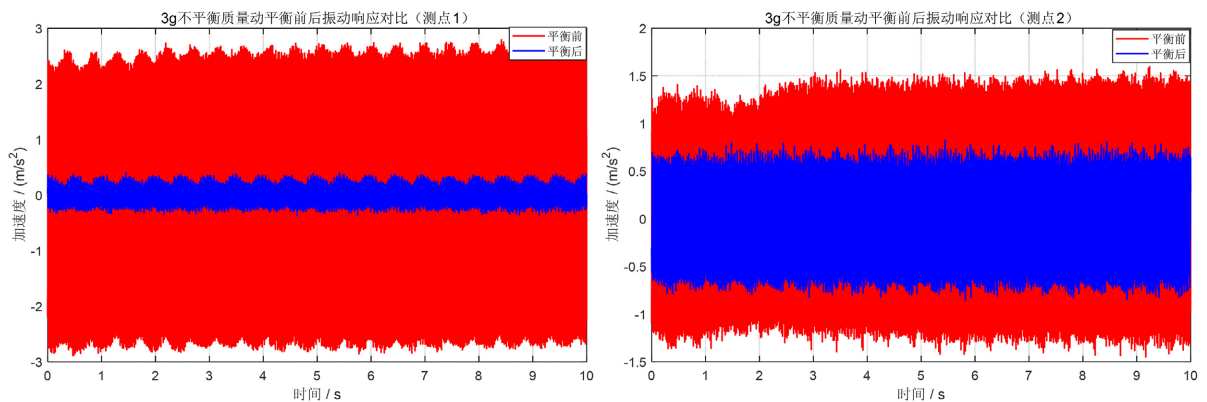


Figure 13. Comparison of vibration response before and after dynamic balancing of 3g unbalanced mass

图 13. 3 g 不平衡质量动平衡前后振动响应对比

通过上表确定各配平孔位所需添加的配平质量后,利用高精度电子秤对配重块进行精确称量,并将其分别安装于左右平衡面对应的螺孔位置,进行配平操作。配重安装过程中需确保连接牢固,以避免因松动或位置偏移引入附加不平衡。完成配平操作后,启动砂轮机转子系统,并逐步将转速提升至额定转速。在转子达到稳定运行状态并保持一定时间后,采集两侧测点的加速度振动响应信号,取前 10 s 振动信号。将配平后的振动响应与配平前的原始振动信号进行对比分析,以评价动平衡效果。不同不平衡质量工况下的配平前后振动响应对比结果分别如图 11、图 12 和图 13 所示。

从 1 g、2 g 和 3 g 三种不平衡质量工况下的实验结果可以看出,随着不平衡质量的增加平衡效率显著提高,尤其在 3 g 不平衡效率时,测点 1 的平衡效率达到最高,达到了 87.3%。在平衡前,由于不平衡质量施加于左侧圆盘,测点 1 的振动响应整体大于测点 2,随着不平衡质量逐渐增加响应对比更加明显。在 3 g 工况下,振动幅值达到最大,说明较大不平衡量会显著加剧转子振动。在采用基于仿真影响系数与 LM 优化算法的无试重动平衡方法进行配平后,各工况下两测点的振动响应均得到有效抑制,时域波形趋于平稳,振动响应显著减弱。同时,左右测点之间的振动差异明显减小,表明动平衡过程不仅降低了局部振动水平,还改善了整个转子系统的振动分布状态。仿真与实验转速相差 20 r/min,但在本研究实验转子工作于刚性转子工况、且远离临界转速条件下,该转速偏差对影响系数和配平结果的影响有限,不影响方法有效性。

5. 结论

本文以砂轮机转子为研究对象,建立了简化后的双圆盘双支承转子有限元模型。其次,提出了一种基于仿真影响系数与 LM 优化算法相结合的无试重动平衡方法。该方法利用有限元模型替代试重实验获取影响系数,并引入 LM 优化算法对配平量进行求解。最后,通过仿真和实验验证,进行了不同不平衡质量 1 g、2 g、3 g 工况的振动响应分析,对平衡前后的加速度时域响应信号进行了对比分析。结果表明,随着不平衡质量的增加,动平衡效率显著提高,且在平衡 3g 不平衡质量时平衡效率达到了 87.3%,同时也验证了该方法在不同不平衡程度下的有效性和适应性。最后验证了所提出的基于仿真影响系数与 LM 优化算法的无试重动平衡方法的有效性。本文研究未进一步考虑测量噪声、模型参数不确定性及轴承支承特性变化等实际复杂因素。因此,对于柔性转子、多跨转子以及复杂工业现场工况下的推广应用仍需进一步研究。

本文所提出的基于有限元仿真影响系数与 LM 优化算法的无试重动平衡方法,已在单一刚性转子实验平台上得到验证。仿真与实验结果表明,该方法在 1 g、2 g 和 3 g 不平衡工况下均具有较好的配平效果,其中 3 g 工况下平衡效率达到 87%以上,验证了方法在本文研究条件下的有效性。

但同时也应看到,本文研究对象主要为结构相对简单的刚性转子系统,且分析过程中未进一步考虑测量噪声、模型参数不确定性及轴承支承特性变化等实际复杂因素。因此,当前结论主要适用于本文实验平台及相近工况,对于柔性转子、多跨转子以及复杂工业现场工况下的推广应用仍需进一步研究。

参考文献

- [1] 徐宾刚,屈梁生,孙瑞祥. 基于影响系数法的柔性转子无试重平衡法研究[J]. 西安交通大学学报, 2000, 34(7): 63-67.
- [2] 宾光富,姚剑飞,江志农,等. 基于有限元模型的转子动平衡影响系数求解法[J]. 振动、测试与诊断, 2013, 33(6): 998-1002+1094.
- [3] 宾光富,何立东,高金吉,等. 基于模态振型分析的大型汽轮机低压转子高速动平衡方法[J]. 振动与冲击, 2013, 32(14): 87-92.
- [4] 章璟璇,唐云冰,罗贵火. 最小二乘影响系数法的优化改进[J]. 南京航空航天大学学报, 2005, 37(1): 110-113.

-
- [5] Han, S., Yang, T., Zhu, Q., Zhao, Y. and Han, Q. (2023) Unbalance Position of Aeroengine Flexible Rotor Analysis and Identification Based on Dynamic Model and Deep Learning. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, **237**, 4410-4429. <https://doi.org/10.1177/09544062221149316>
- [6] Guan, H., Xiong, Q., Ma, H., Yang, Y., Zeng, J., Wang, P., et al. (2024) Study on Dynamic Characteristics of the Gear-Dual-Rotor System with Multi-Position Rubbing. *Mechanism and Machine Theory*, **191**, Article 105501. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2023.105501>
- [7] Zhang, F., Li, X., Han, Q., Zhao, Y., Li, H. and Lin, J. (2025) Study on the Influence of Combined Unbalanced Phase Difference on Rotor Vibration Response and High-Speed Dynamic Balancing. *Journal of Vibration and Control*.
- [8] Yao, J., Yang, F., Su, Y., Scarpa, F. and Gao, J. (2020) Balancing Optimization of a Multiple Speeds Flexible Rotor. *Journal of Sound and Vibration*, **480**, Article 115405. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115405>
- [9] Zhang, Y., Li, M. and Hu, Y. (2020) Model-Based Balancing Method of Rotors Using Differential Evolution Algorithm. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, **751**, Article 012046. <https://doi.org/10.1088/1757-899x/751/1/012046>
- [10] 石常志. 动力涡轮转子系统不平衡辨识及动平衡优化方法研究[D]: [硕士学位论文]. 佛山: 佛山大学, 2025.