Modern Physics 现代物理, 2014, 4, 21-26
Published Online March 2014 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/mp
http://dx.doi.org/10.12677/MP.2014.42004

Quaternion Unilateral Transformations in 4-Dimensional Space-Time

Guangtao Ding

College of Physics and Electronic Information, Anhui Normal University, Wuhu
Email: dgt695@sina. com

Received: Jan. 4th, 2014; revised: Feb. 1st, 2014; accepted: Feb. 9th, 2014

Abstract

New transformations of space-time coordinates preserving the invariance of 4-dimensional interval-unilateral quaternion transformations are studied. The quaternions of left and right unilateral transformations for a reference system of uniform motion with constant velocity are derived. Some results in kinematics of the unilateral transformations are given. Two important differences between the unilateral transformation and Lorentz transformation are discussed.

Keywords

Special Relativity; Quaternion; Invariance of 4-Dimensional Interval; Unilateral Space-Time Transformation

四维时空的单边四元数变换

丁光涛

安徽师范大学物理与电子信息学院，芜湖
Email: dgt695@sina. com

收稿日期：2014年1月4日；修回日期：2014年2月1日；录用日期：2014年2月9日

摘　要

研究新的保持四维间隔不变性的时空坐标变换，即四元数形式单边变换。导出对匀速平动参考系的左右

两种单边变换四元数，给出对应的运动学结果。讨论单边变换与Lorentz变换之间的两点重要区别。

关键词

狭义相对论；四元数；4维间隔不变性；单边时空变换

1. 引言

与狭义相对论相关的研究中，四维时空坐标变换的推导和推论是一个经典性课题[1]-[2]，由于四元数与四维时空之间的自然对应关系，故利用四元数来研究四维时空坐标变换是上述研究的一个重要方面[3]-[5]。最近我们利用四元数推导出多种保持四维时空间隔不变的时空变换，其中既包括通常的空间旋转和正常的 Lorentz 变换，也得到某些不同于通常 Lorentz 变换的变换，特别是四元数表示的单边变换[6]。本文将进一步深入研究这种新型的单边变换，得到了匀速平动参考系的左右两种单边变换的四元数，导出了与之相关的运动学，与通常的 Lorentz 变换相比较，部分结论相同，部分结论相异，讨论了其中两个基本的区别。

2. 保持四维时空间隔不变的四元数单边变换

四元数是由实单位 1，三个虚单位 $\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_2$、$\mathbf{e}_3$，和四个数元 a_0, a_1, a_2, a_3 组成的超复数[3]-[6]，

$$\mathbf{A} = a_0 + a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 \tag{1}$$

1 和 $\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_2$、$\mathbf{e}_3$ 通常称为四元数的基。引入四维时空坐标四元数为

$$\mathbf{R} = \mathrm{r}_0 + r_1\mathbf{e}_1 + r_2\mathbf{e}_2 + r_3\mathbf{e}_3 \tag{2}$$

$$r_0 = ct, r_1 = \mathrm{i}x = \mathrm{i}x_1, r_2 = \mathrm{i}y = \mathrm{i}x_2, r_3 = \mathrm{i}z = \mathrm{i}x_3. \tag{3}$$

式中 i 为复数的虚单位。四维时空(元)间隔为

$$ds^2 = \|d\mathbf{R}\| = d\mathbf{R}d\mathbf{R}^T = dr_0^2 + dr_1^2 + dr_2^2 + dr_3^2 = c^2dt^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 \tag{4}$$

光速不变原理导出四维时空间隔不变性，从这种不变性出发可以导出一种新型时空坐标变换——单边变换[6]。其中一种可以称为左单边变换

$$\mathbf{R}'_l = \mathbf{AR} \tag{5}$$

另一种可以称为右单边变换

$$\mathbf{R}'_r = \mathbf{RB} \tag{6}$$

因为 **A** 和 **B** 都是单位四元数，所以有

$$\|\mathbf{dR}'_l\| = \mathbf{dR}_l'^T\mathbf{dR}'_l = \mathbf{dR}^T\mathbf{A}^T\mathbf{AdR} = \mathbf{dR}^T\mathbf{dR} = \|\mathbf{dR}\| \tag{7}$$

$$\|\mathbf{dR}'_r\| = \mathbf{dR}'_r\mathbf{dR}_r'^T = \mathbf{dRBB}^T\mathbf{dR}^T = \mathbf{dRdR}^T = \|\mathbf{dR}\| \tag{8}$$

即变换(5)和(6)都保持四维时空间隔不变，这就是说，满足光速不变原理。

下面确定匀速平动参考系的变换四元数 **A** 和 **B**。设运动参考系 K' 与静止参考系 K 的时空原点重合，空间坐标轴平行， K' 以匀速度 V 沿 x_1 轴平动。在左单边变换式中

$$\mathbf{A} = a_0 + a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 \tag{9}$$

$$a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2=1 \tag{10}$$

根据四元数乘法法则得到

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_l'&=\mathbf{AR}=r_0'+r_1'\mathbf{e}_1+r_2'\mathbf{e}_2+r_3'\mathbf{e}_3\\&=\left(a_0r_0-a_1r_1-a_2r_2-a_3r_3\right)+\left(a_0r_1+a_1r_0+a_2r_3-a_3r_2\right)\mathbf{e}_1\\&\quad+\left(a_0r_2+a_2r_0+a_3r_1-a_1r_3\right)\mathbf{e}_2+\left(a_0r_3+a_3r_0+a_1r_2-a_2r_1\right)\mathbf{e}_3\end{aligned} \tag{11}$$

对运动系 K' 原点，由于 $r_0'=ct', r_1'=r_2'=r_3'=0, r_0=ct, r_1=\mathrm{i}Vt, r_2=r_3=0$, 故代入变换式(11)得到

$$\mathbf{R}_l'=r_0'+r_1'\mathbf{e}_1+r_2'\mathbf{e}_2+r_3'\mathbf{e}_3=ct'=\left(a_0ct-\mathrm{i}a_1Vt\right)+\left(\mathrm{i}a_0Vt+a_1ct\right)\mathbf{e}_1+\left(a_2ct+\mathrm{i}a_3Vt\right)\mathbf{e}_2+\left(a_3ct-\mathrm{i}a_2Vt\right)\mathbf{e}_3 \tag{12}$$

由式(10)和(12)解得

$$a_0=\gamma,\ a_1=-\mathrm{i}\beta\gamma,\ a_2=a_3=0 \tag{13}$$

式中

$$\beta=V/c,\ \gamma=1\Big/\sqrt{1-\beta^2}\qquad\left(\text{弃去}\gamma=-1\Big/\sqrt{1-\beta^2}\right) \tag{14}$$

由此得到左单边变换四元数为

$$\mathbf{A}=\gamma-\mathrm{i}\beta\gamma\mathbf{e}_1 \tag{15}$$

代入式(11)，就得到沿 x_1 轴平动运动系的左单边变换式

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_l'&=\mathbf{AR}=ct'+ix_1'\mathbf{e}_1+ix_2'\mathbf{e}_2+ix_3'\mathbf{e}_3\\&=\left(\gamma ct-\beta\gamma x_1\right)+\left(\mathrm{i}\gamma x_1-\mathrm{i}\beta\gamma ct\right)\mathbf{e}_1+\left(\mathrm{i}\gamma x_2-\beta\gamma x_3\right)\mathbf{e}_2+\left(\mathrm{i}\gamma x_3+\beta\gamma x_2\right)\mathbf{e}_3\end{aligned} \tag{16}$$

在右单边变换式中

$$\mathbf{B}=b_0+b_1\mathbf{e}_1+b_2\mathbf{e}_2+b_3\mathbf{e}_3 \tag{17}$$

$$b_0^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2=1 \tag{18}$$

重复上述推导过程，展开式(6)，研究运动系原点的运动，得到

$$b_0=\gamma, b_1=-\mathrm{i}\beta\gamma, b_2=b_3=0 \tag{19}$$

即右单边变换四元数为

$$\mathbf{B}=\gamma-\mathrm{i}\beta\gamma\mathbf{e}_1 \tag{20}$$

沿 x_1 轴平动运动系的右单边变换式为

$$\mathbf{R}_r'=\left(\gamma ct-\beta\gamma x_1\right)+\left(\mathrm{i}\gamma x_1-\mathrm{i}\beta\gamma ct\right)\mathbf{e}_1+\left(\mathrm{i}\gamma x_2+\beta\gamma x_3\right)\mathbf{e}_2+\left(\mathrm{i}\gamma x_3-\beta\gamma x_2\right)\mathbf{e}_3 \tag{21}$$

变换(16)和(21)存在区别。

下面以左单边变换为例深入讨论，为此将式(16)写成四维时空坐标变换式如下：

$$ct'=\gamma\left(ct-Vx_1/c\right),\quad x_1'=\gamma\left(x_1-Vt\right),\quad x_2'=\gamma\left(x_2+\mathrm{i}Vx_3/c\right),\quad x_3'=\gamma\left(x_3-\mathrm{i}Vx_2/c\right). \tag{22}$$

可见单边变换与通常的 Lorentz 变换存在相相同点，但是，其中 x_2, x_3 坐标不再保持不变，而是作复变换，这是与通常的 Lorentz 变换不同的特点。

3. 四元数单边变换四维时空几何学和运动学

根据上述单边变换(22)，讨论几个基本的四维时空的几何学和运动学问题，并与通常的狭义相对论的

结论进行比较。

3.1. 尺缩和钟慢

1) 设尺 PQ 静止在运动系 x_1 轴上，其长度为 $\left|x'_{p1}-x'_{q1}\right|$，在固定系的同一时刻测量其两端坐标，根据式(22)第二式得到 $\left|x'_{p1}-x'_{q1}\right|=\gamma\left|x_{p1}-x_{q1}\right|$，因此固定系中尺的长度为

$$\left|x_{p1}-x_{q1}\right|=\gamma^{-1}\left|x'_{p1}-x'_{q1}\right| \tag{23}$$

即运动的尺在其速度方向上的长度小于其静止时的长度。

2) 设尺 PQ 静止在运动系与 x_1 轴垂直平面内，其长度为 $\left[\left(x'_{p2}-x'_{q2}\right)^2+\left(x'_{p3}-x'_{q3}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$，

在固定系中测量其两端坐标，根据式(22)第三、四式得到固定系中尺的长度为

$$\left[\left(x_{p2}-x_{q2}\right)^2+\left(x_{p3}-x_{q3}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\left(x'_{p2}-x'_{q2}\right)^2+\left(x'_{p3}-x'_{q3}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{24}$$

即运动的尺在垂直其速度方向上的长度等于其静止时的长度。换句话说，尽管式(22)第三、四式与通常的 Lorentz 变换不同，但是，得到的尺缩结论是相同的。

3) 设一个钟静止在运动系中，即其坐标 x'_1 不变，从变换(22)的逆变换，容易证明得到

$$t_1=\gamma\left(t'_1+Vx'_1/c^2\right),\ t_2=\gamma\left(t'_2+Vx'_1/c^2\right),$$

即

$$t_2-t_1=\gamma\left(t'_2-t'_1\right), \tag{25}$$

这就是说钟慢的结论也成立。

3.2. 平行方向两个变换的合成和速度合成

引入三个参考系 K,K',K''，它们的空间坐标轴方向平行，时空原点重合，K 系为静止系，K' 系以速度 V' 沿 x_1 轴相对于 K 系平动，K'' 系以速度 V'' 沿 $x'_1\left(x_1\right)$ 轴相对于 K' 系平动，从式(22)出发，容易导出合成变换

$$\begin{aligned} &ct''=\gamma'\gamma''\left[\left(1+\beta'\beta''\right)ct-\left(\beta'+\beta''\right)x_1\right],\ x''_1=\gamma'\gamma''\left[\left(1+\beta'\beta''\right)x_1-\left(\beta'+\beta''\right)ct\right],\\ &x''_2=\gamma'\gamma''\left[\left(1+\beta'\beta''\right)x_2+i\left(\beta'+\beta''\right)x_3\right],\ x''_3=\gamma'\gamma''\left[\left(1+\beta'\beta''\right)x_3-i\left(\beta'+\beta''\right)x_2\right]. \end{aligned} \tag{26}$$

式中

$$\beta'=V'/c,\ \gamma'=1\Big/\sqrt{1-\beta'^2};\ \beta''=V''/c,\ \gamma''=1\Big/\sqrt{1-\beta''^2}. \tag{27}$$

从上述变换容易导出平行速度的合成公式，设 K'' 系相对于 K 系速度为 V，则有

$$\beta=V/c=\left(\beta'+\beta''\right)/\left(1+\beta'\beta''\right)\quad \gamma=1\Big/\sqrt{1-\beta^2}=\gamma'\gamma''\left(1+\beta'\beta''\right) \tag{28}$$

由此得到

$$V=\frac{V'+V''}{1+V'V''/c^2}, \tag{29}$$

这个结果也与通常的狭义相对论相同。

值得注意的是，单边变换保持了通常狭义相对论中“尺缩”、“钟慢”、光速不变以及平行速度合

成等结论，也就是说这种变换同样能够解释支持 Lorentz 变换的实验事实，这种变换同样有条件成为狭义相对论中可能的时空坐标变换。

3.3. 垂直方向两个变换的合成

设上述三个参考系中，K'' 系以速度 V'' 沿 $x_2'(x_2)$ 轴相对于 K' 系平动，再次根据式(22)和类似的从 K' 系到 K'' 系的变换式，导出合成变换

$$\begin{aligned} ct'' &= \gamma'\gamma''\left[ct - \beta' x_1 - \beta'' x_2 - \mathrm{i}\beta'\beta'' x_3\right],\ x_1'' = \gamma'\gamma''\left[x_1 - \beta' ct - \mathrm{i}\beta'' x_3 - \beta'\beta'' x_2\right], \\ x_2'' &= \gamma'\gamma''\left[x_1 - \beta'' ct + \mathrm{i}\beta'' x_3 + \beta'\beta'' x_1\right],\ x_3'' = \gamma'\gamma''\left[x_3 - \beta'\beta'' ct + \mathrm{i}\beta' x_1 - \mathrm{i}\beta'' x_2\right]. \end{aligned} \tag{30}$$

变换式(26)和(30)中，两个参考系是对称的，即变换合成次序是可以任意交换的。再引入第四个参考系 K'''，例如，沿 $x_3'(x_3)$ 轴相对于 K'' 系平动参考系，可以继续导出合成变换，即可以导出沿任意方向平动的参考系的时空坐标变换式。

3.4. 一般情况下的速度合成

从变换式(22)导出其逆变换，并写成微分形式

$$\begin{aligned} dt &= \gamma\left(dt' + Vdx_1'/c^2\right),\ dx_1 = \gamma\left(dx_1' + Vdt'\right), \\ dx_2 &= \gamma\left(dx_2' - iVdx_3'/c\right),\ dx_3 = \gamma\left(dx_3' + iVdx_2'/c\right). \end{aligned} \tag{31}$$

由此得到一般情况下的速度合成法则

$$v_1 = \frac{V + v_1'}{1 + Vv_1'/c^2},\quad v_2 = \frac{v_2' - \mathrm{i}Vv_3'/c}{1 + Vv_1'/c^2},\quad v_3 = \frac{v_3' + \mathrm{i}Vv_2'/c}{1 + Vv_1'/c^2}. \tag{32}$$

式中 v_1, v_2, v_3 是质点在静止系中速度分量，v_1', v_2', v_3' 是质点中运动系中速度分量。上述速度合成法则(32)与通常狭义相对论中从 Lorentz 变换导出的速度合成法则也是相似而又不同。容易看出，式(29)是上式的特殊情况。

从式(32)可以得到

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = \frac{1}{\left(1 + \dfrac{Vv_1'}{c^2}\right)^2}\left[V^2 + 2Vv_1' + v_1'^2 + v_2'^2 + v_3'^2 - \frac{V^2\left(v_2'^2 + v_3'^2\right)}{c^2}\right], \tag{33}$$

由此可见，虽然速度变换式(32)中出现复数，速度大小仍是实数；而且当 $v_1'^2 + v_2'^2 + v_3'^2 = c^2$ 时，从上式直接得到的结果是 $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = c^2$，这再次说明光速恒定。

应当指出，由于式(22)不同于通常的 Lorentz 变换，故无论是四维时空坐标的合成变换式(26)和(30)，还是速度的合成变换式(32)，都与通常的时空坐标合成以及速度合成的 Lorentz 变换不同，然而必须指出的是，以上的四维时空几何学和运动学是自洽的，并没有违背狭义相对论的基本原理。

4. 结论和讨论

本文深入研究了保持四维时空间隔不变的一种新型变换——单边变换，虽然这种变换与通常的 Lorentz 变换存在区别，但是，上述讨论表明这种变换对四维时空中的坐标变换以及相关的运动学构成了一个无矛盾的理论框架，保持了通常狭义相对论中“尺缩”、“钟慢”、光速不变以及平行速度合成等结论，也导出了若干不同的结论。这些差异的根源在于式(22)的特性，一是沿某一方向平动的参考系，出

现了与此方向垂直方向上坐标的变换，二是相关变换中出现复变换。下面就这两点进行讨论和说明。

1) 在很多传统的推导狭义相对论 Lorentz 变换的工作中，实质上都或明或暗地引入一个假设，参考系沿一个方向(如沿 x_1 方向)运动时，与之垂直方向(即沿 x_2, x_3 方向)空间坐标不改变，但是，对此并没有给出有特别说服力的说明[1]-[2]。几何学在某种意义上可以看作是一种物理学，Euclid 几何与刚体概念存在紧密联系，其中正交坐标系实质上是刚性框架，坐标的测量与刚尺相关，在这种图景下上述 $x_2' = x_2, x_3' = x_3$ 的假设，虽然没有逻辑上必然成立的依据，但是在直觉经验上容易使人接受。然而，在相对论中没有刚体存在的基础，取代经典力学中刚体地位的是真空中的光，坐标的测量与真空中电磁波的传播相关，在这种图景下上述假设并没有先验的成立理由。换句话说，如果在 $x_2' = x_2, x_3' = x_3$ 的假设上可以建立一种允许的变换理论，那么式(22)也应当是一种允许的变换理论，这两种理论孰是孰非，还是两者可以并行不悖，最后判定标准是科学实验。

2) 在单边四元数变换式中出现虚数(复数)是允许的。Minkowski 空间本身就是复空间，Lorentz 变换中就已经出现了复数，本文讨论表明，在几何学和运动学中式(22)中复数坐标变换的出现并没有产生矛盾。在数学和物理学发展史表明，如果没有虚数的发现，没有复数理论的发展，近代物理学，如量子理论的发展很难想象，因此，应当重视式(22)后两式出现复数变换理论。一方面这种变换对四维时空几何学和运动学来说，这种变换给出的结果也能够说明导致狭义相对论产生的经典实验事实，这是这种变换有可能成立的必要前提；另一方面，在涉及相对论力学、电磁理论以及其它动力学理论时，单边变换与通常的 Lorentz 变换之间的区别有可能是实质性的区别，并由此产生不同的动力学效应，因此，单边变换的动力学理论是需要继续深入研究的课题。

参考文献 (References)

[1] A 爱因斯坦, HA 洛伦兹, H 闵可夫斯基, H 外尔, 赵志田, 刘一贯译 (1980) 相对论原理. 科学出版社, 北京, 32-43.

[2] W.泡利著, 凌德洪, 周万生译 (1979) 相对论. 上海科学技术出版社, 上海, 1-15.

[3] Girard, P.R. (1984) The quaternion group and modern physics. *European Journal of Physics*, **5**, 25-32.

[4] 许方官 (2012) 四元数物理学. 北京大学出版社, 北京, 16-24.

[5] Alam, M.S. and Bauk, S. (2011) Quaternion Lorentz transformation. *Physics Essays*, **24**, 158-162.

[6] 丁光涛 (2013) 四元数四维间隔不变性和时空坐标变换. *现代物理*, **4**, 99-105.