Modern Physics 现代物理, 2015, 5, 23-28
Published Online January 2015 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/mp
http://dx.doi.org/10.12677/mp.2015.51003

Hans汉斯

Velocity, Energy and Momentum's Distribution Based on Two Coordinate System

Jincheng He, Xiaobo Li, Feng Luan

College of Engineering Technology, Chengdu University of Technology, Leshan
Email: 759155750@qq.com

Received: Jan. 10th, 2015; accepted: Jan. 22nd, 2015; published: Jan. 28th, 2015

Abstract

In this paper, the distribution of velocity in Cartesian coordinates and spherical coordinates deduces on the basis of the distribution of energy and momentum, and calculates the most probable speed in both coordinates and the most probable energy, average speed, average energy and average momentum and other related physical quantities. Through the analysis results, we found that: in the both coordinates, the calculation result was consistent with scalar, vector calculation results were different. This paper also studied the scope of Maxwell distribution and the reason why the most probable energy Maxwell energy distribution corresponding speed and the most probable speed of Maxwell velocity distribution values were not equal.

Keywords

Maxwell Distribution, Both Coordinates, Velocity, Energy, Momentum

两种坐标系下速度(率)、能量、动量的分布

何锦成，李小波，栾　锋

成都理工大学工程技术学院，乐山
Email: 759155750@qq.com

收稿日期：2015年1月10日；录用日期：2015年1月22日；发布日期：2015年1月28日

摘　要

本文以速度的分布为基础，推导出了在直角坐标系和球坐标系下能量和动量的分布，并计算出在两种坐标系下的最概然速率和最概然能量、平均速度、平均能量和平均动量等相关物理量。通过对计算结果的分析我们发现：在两类坐标系下，标量的计算结果是一致的，矢量的计算结果是不同的。本文还介绍了麦克斯韦分布的适用范围，以及麦克斯韦能量分布的最概然能量对应的速率与麦克斯韦速率分布的最概然速率数值不相等的原因。

关键词

麦克斯韦分布，两种坐标，速度，能量，动量

1. 引言

任何(宏观)物理系统的温度都是组成该系统的原子和分子的微观运动的结果。这些粒子有不同速度的范围，而任何单个粒子的速度都因与其它粒子的碰撞而不断变化。然而，对于大量粒子来说，如果系统处于或接近处于平衡，则处于一个特定的速度范围的粒子所占的比例却几乎不变。麦克斯韦-玻尔兹曼分布具体说明了这个比例。它以詹姆斯・麦克斯韦和路德维希・玻尔兹曼命名。本文由数学理论出发推导出麦克斯韦分布函数的不同形式。麦克斯韦分布函数在分子动理论和热中子能谱分布中有广泛应用，它研究中有极其重要意义。

2. 推导麦克斯韦速度分布函数

2.1. 推导直角坐标系下麦克斯韦分布

设系统内有一定量微观粒子处于平衡态，其总数为 N，$\mathrm{d}N(\boldsymbol{v})$ 为速度在 $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}+\mathrm{d}\boldsymbol{v})$ 的粒子数，如图 1 所示。速度在直角坐标系下三个速度分量分别为 v_x，v_y，v_z。由文献[1] [2]的结论：

$$\frac{\mathrm{d}N(\boldsymbol{v})}{N}=f(\boldsymbol{v})\mathrm{d}\boldsymbol{v}=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left[-\frac{m\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)}{2kT}\right]\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y\mathrm{d}v_z \tag{1}$$

其中，k 为玻尔兹曼常数，T 为平衡时介质温度。

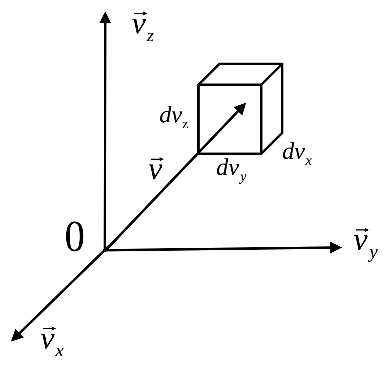

Figure 1. Cartesian coordinates
图 1. 直角坐标系

(1)式左右两端对 y,z 分别在 $(-\infty,+\infty)$ 积分求得在 x 方向的麦克斯韦速度分布如下：

$$\frac{\mathrm{d}N(\boldsymbol{v}_x)}{N}=f(\boldsymbol{v}_x)\mathrm{d}\boldsymbol{v}_x=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2}\exp\left[-\frac{mv_x^2}{2kT}\right]\mathrm{d}v_x \tag{2}$$

其中，$\mathrm{d}N(v_x)$ 表示速度分量 v_x 在 $v_x\sim v_x+\mathrm{d}v_x$ 上的粒子数。

将它推广到三维空间，得任意 i 方向速度 v_i 分布函数：

$$\frac{\mathrm{d}N(\boldsymbol{v}_i)}{N}=f(\boldsymbol{v}_i)\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2}\exp\left[-\frac{mv_i^2}{2kT}\right]\mathrm{d}v_i \tag{3}$$

已知：

$$E=\frac{mv^2}{2}\Rightarrow \mathrm{d}E=mv\mathrm{d}v\Rightarrow \mathrm{d}v=\frac{\mathrm{d}E}{\sqrt{2mE}} \tag{4}$$

将(4)式带入(1)式，得：

$$\frac{\mathrm{d}N(E)}{N}=f(E)\mathrm{d}E=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left[-\frac{E_x+E_y+E_z}{kT}\right]\frac{\mathrm{d}E_x\mathrm{d}E_y\mathrm{d}E_z}{\sqrt{(2m)^3E_xE_yE_z}} \tag{5}$$

假设 x, y, z 三个方向是独立的，得 i 方向能量 E_i 分布函数：

$$\frac{\mathrm{d}N(E_i)}{N}=f(E_i)\mathrm{d}E_i=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2}\exp\left[-\frac{E_i}{kT}\right]\frac{\mathrm{d}E_i}{\sqrt{(2m)E_i}} \tag{6}$$

已知：

$$\boldsymbol{p}_i=m\boldsymbol{v}_i\Rightarrow \mathrm{d}\boldsymbol{p}_i=m\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i \tag{7}$$

代入(3)得动量 $\boldsymbol{p}_i$ 的分布函数

$$f(\boldsymbol{p}_i)=\left(\frac{1}{2m\pi kT}\right)^{1/2}\exp\left[-\frac{p_i^2}{2mkT}\right] \tag{8}$$

求在直角坐标系的物理量

i 方向的最概然速度，令：

$$\frac{\mathrm{d}N(\boldsymbol{v}_{ip})}{N}=0\Rightarrow \boldsymbol{v}_{ip}=0 \tag{9}$$

i 方向的平均速度

$$\boldsymbol{v}_{iav}=\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{v}_i f(\boldsymbol{v}_i)\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i=0 \tag{10}$$

i 方向 $\boldsymbol{v}_i^2$ 的平均值

$$\boldsymbol{v}_{iav}^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{v}_i^2 f(\boldsymbol{v}_i)\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i=\frac{kT}{m} \tag{11}$$

对应

$$E_{iav}=\frac{kT}{2}\Rightarrow E_{av}=\frac{3kT}{2} \tag{12}$$

i 方向最概然动量，令：

$$f'(\boldsymbol{p}_i)=0 \Rightarrow \boldsymbol{p}_{ip}=0 \tag{13}$$

i 方向动量 $\boldsymbol{p}_i$ 的平均值

$$\boldsymbol{p}_{iav}=\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{p}_i f(\boldsymbol{p}_i)\mathrm{d}\boldsymbol{p}_i=0 \tag{14}$$

i 方向 $\boldsymbol{p}_{iav}^2$ 的平均值

$$\boldsymbol{p}_{iav}^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{p}_i^2 f(\boldsymbol{p}_i)\mathrm{d}\boldsymbol{p}_i=mkT \tag{15}$$

2.2. 推导球坐标系下麦克斯韦分布

考察速率为 $(v,v+\mathrm{d}v)$，对应在速率 v 附近 $\mathrm{d}v$ 厚度球壳内的粒子数为 $\mathrm{d}N(v)$，如图 2 所示。则：

$$\mathrm{d}N(v)=D(v)4\pi v^2\mathrm{d}v \tag{16}$$

将(1)式代入，得：

$$D(v)=\frac{\mathrm{d}N(v)}{\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y\mathrm{d}v_z}=N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left[-\frac{m\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)}{2kT}\right] \tag{17}$$

再将(17)式代入(16)式，得速率分布函数：

$$f(v)=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left[-\frac{mv^2}{2kT}\right]v^2 \tag{18}$$

这与[3]大学物理中分子动理论所给出表达式一致[4]。考察能量为 $(E,E+\mathrm{d}E)$，对应在能量 E 附近 $\mathrm{d}E$ 厚度球壳内的粒子数为 $\mathrm{d}N(E)$。

$$\mathrm{d}N(E)=D(E)4\pi v^2\mathrm{d}v \tag{19}$$

将(4)式代入，得：

$$D(E)=\frac{\mathrm{d}N(E)}{\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y\mathrm{d}v_z}=\frac{\mathrm{d}N(E)}{\frac{\mathrm{d}E_x}{\sqrt{2mE_x}}\frac{\mathrm{d}E_y}{\sqrt{2mE_y}}\frac{\mathrm{d}E_z}{\sqrt{2mE_z}}}=N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left[-\frac{E}{kT}\right] \tag{20}$$

将(19)式代入(18)式，得能量 E 的分布函数：

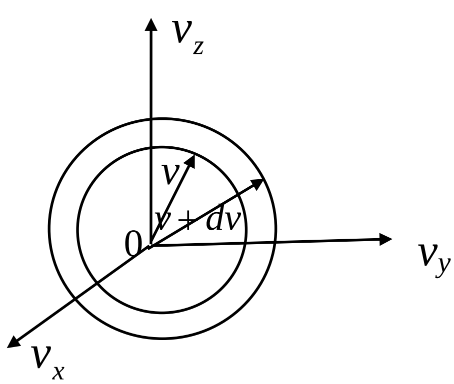

Figure 2. Spherical coordinates
图 2. 球坐标系

$$\frac{\mathrm{d}N(E)}{N}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{kT}\right)^{3/2}\exp\left[-\frac{E}{kT}\right]E^{1/2}\mathrm{d}E \tag{21}$$

这与反应堆物理中热中子能谱所得结果是一致的[5]。

求在球坐标系的物理量

最概然速率 v_p 的值，令：

$$f'(v)=0\Rightarrow v_p=\sqrt{\frac{2kT}{m}}\Rightarrow E_0=kT \tag{22}$$

平均速率 v_{av} 的值

$$v_{av}=\int_0^{+\infty}vf(v)\mathrm{d}v=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \tag{23}$$

速率平方 v^2 的平均值

$$v^2=\int_0^{+\infty}v^2 f(v)\mathrm{d}v=\frac{3kT}{m} \tag{24}$$

最概然能量 E_p，令：

$$f'(E)=0\Rightarrow E_p=\frac{kT}{2} \tag{25}$$

平均能量 E_{av} 的值

$$E_{av}=\int_0^{+\infty}Ef(E)\mathrm{d}E=\frac{3kT}{2} \tag{26}$$

动量 p 最大概率的值，令：

$$f'(p)=0\Rightarrow p_p=\sqrt{2mkT} \tag{27}$$

动量 p 的平均值

$$p_{av}=\int_0^{+\infty}pf(p)\mathrm{d}p=\sqrt{\frac{8mkT}{\pi}} \tag{28}$$

p^2 的平均值

$$p_{av}^2=\int_0^{+\infty}p^2 f(p)\mathrm{d}p=\sqrt{3mkT} \tag{29}$$

2.3. 两种坐标系下计算结果比较

见表 1。

3. 结论

分析两种坐标系下计算结果，见表 1，可以得出如下结论：

1) 平均能量 E_{av}、方均根速度(速率) $\sqrt{v_{av}^2}$ 与方均根动量 $\sqrt{p_{av}^2}$ 都是标量。标量在直角坐标和球坐标下得到的结果是一致的；

2) 最概然速度 $\boldsymbol{v}_{ip}$、平均速度 $\boldsymbol{v}_{av}$、最概然动量 $\boldsymbol{p}_p$ 与平均动量 $\boldsymbol{p}_{av}$ 都是直角坐标下的矢量；而最概然速率 v_p、平均速率 v_{av}、最概然动量 p_p 与平均动量 p_{av} 都是球坐标下的标量。在直角坐标的矢量和球坐标下标量得到的结果是不一致的。

3) 麦克斯韦分布适用范围有一个发展过程。它不仅适用于理想气体的速度或速率分布，同时也适用于非理想气体和多元气体；后来又被推广到固体、液体或任何经典粒子系统；再后来讨论了相对论效应

Table 1. The calculation of each physical in both coordinates
表 1. 两种坐标系下各物理量计算结果

空间直角坐标系				球坐标系	
i 方向最概然速度 $\boldsymbol{v}_{ip}$	0	三个方向最概然速度 $\boldsymbol{v}_{ip}$	0	最概然速度 v_p	$\sqrt{\frac{2kT}{m}}$
i 方向平均速度 $\boldsymbol{v}_{iav}$	0	三个方向平均速度 $\boldsymbol{v}_{av}$	0	平均速度 v_{av}	$\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$
i 方向平均能量 E_{iav}	$\frac{kT}{2}$	三个方向平均能量 E_{av}	$\frac{3kT}{2}$	平均能量 E_{av}	$\frac{3kT}{2}$
i 方向的方均根 $\sqrt{\boldsymbol{v}_{iav}^2}$	$\sqrt{\frac{kT}{m}}$	三个方向的方均根速度 $\sqrt{\boldsymbol{v}_{av}^2}$	$\sqrt{\frac{3kT}{m}}$	方均根速率 $\sqrt{v_{av}^2}$	$\sqrt{\frac{3kT}{m}}$
i 方向最概然动量 $\boldsymbol{p}_{ip}$	0	三个方向最概然动量 $\boldsymbol{p}_p$	0	最概然动量 p_p	$\sqrt{2kTm}$
i 方向平均动量 $\boldsymbol{p}_{iav}$	0	三个方向平均动量 $\boldsymbol{p}_{av}$	0	平均动量 p_{av}	$\sqrt{\frac{8mkT}{\pi}}$
i 方向的方均根动量 $\sqrt{\boldsymbol{p}_{iav}^2}$	$\sqrt{mkT}$	三个方向的方均根动量 $\sqrt{\boldsymbol{p}_{av}^2}$	$\sqrt{3mkT}$	方均根动量 $\sqrt{p_{av}^2}$	$\sqrt{3mkT}$

下的分布函数，并给出了量子统计方法的结果。详细内容见文献[6]此处只作简要说明。

4) 最概然速率 v_p 对应的能量 $E_v = kT$ 与最概然能量 $E_p = \frac{kT}{2}$ 不相等，这一结果可能引起读者疑惑现做如下说明：$\frac{\mathrm{d}N(v)}{N} = f(v)\mathrm{d}v$ 才表示速率为 $v \sim v + \mathrm{d}v$，对应在速率 v 附近 $\mathrm{d}v$ 厚度球壳内的粒子数为 $\mathrm{d}N(v)$ 占总数 N 的份额。文献[7]指出经精确推导，速率在 $v_p \sim v_p + \mathrm{d}v$ 范围内的份额与能量在 $E_p \sim E_p + \mathrm{d}E$ 范围内的份额(概率)是相等的。

致　谢

本文研究过程中得到成都理工大学工程技术学院科研处、核能系和核工程实验中心各位老师的大力帮助，尤其是郦文忠主任、鄢泽林书记、栾锋老师的悉心指导。在此表示衷心的感谢。

参考文献 (References)

[1] 彭朝广 (1990) 麦克斯韦速度分布律的推导. *曲靖师专学报*, **1**, 42-43.

[2] 陈仁烈 (1959) 统计物理引论. 人民教育出版社, 北京.

[3] 马文蔚 (2003) 物理学. 高等教育出版社, 南京.

[4] 吴瑞贤, 章立源 (1987) 热学研究. 四川大学出版社, 成都.

[5] 谢仲生, 张少泓 (2003) 核反应堆物理分析. 原子能出版社, 北京.

[6] 张三慧 (2011) 麦克斯韦速度分布定律的适用范围. *大学物理*, **8**, 10-11.

[7] 张怀德, 苏春清 (1996) 最概然速率对应的动能与最概然动能间的关系. *德州师专学报*, **4**, 29-30.