Modern Physics 现代物理, 2020, 10(3), 53-60
Published Online May 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/mp
https://doi.org/10.12677/mp.2020.103006

The Relationship between Maxwell Equations and Lorentz Transformation in the Principle of Relativity

Deqiang Guo[1], Qi Zhang[2]

[1]State Grid Fushun Power Supply Company, Fushun Liaoning
[2]Zhang Qi Institute of Physics, Jiamusi Heilongjiang
Email: 742096830@qq.com

Received: Mar. 24th, 2020; accepted: Apr. 17th, 2020; published: Apr. 24th, 2020

Abstract

It is necessary for Maxwell equations to obey the principle of relativity with the help of Lorentz Transformation in two coordinate systems *K* and *K*' which are equal weight to each other. When the plane wave (including electromagnetic and mechanical wave) from coordinate systems of relative motion at a constant speed with each other spreads *K* to *K*' when the Doppler effect occurs. According to the principle of relativity, only with the help of Lorentz transformation can make the *x* and *t* of the plane wave equation in the coordinate system *K* be covariated to the *x*' and *t*' of the plane wave equation in the coordinate system *K*'.

Keywords

Principle of Relativity, Mexwell's Equatioins, Lorentz Transformation

麦克斯韦方程组在相对性原理中与洛伦兹变换的关系

郭德强[1]，张　琪[2]

[1]国家电网抚顺供电公司，辽宁 抚顺
[2]张琪物理研究所，黑龙江 佳木斯
Email: 742096830@qq.com

收稿日期：2020年3月24日；录用日期：2020年4月17日；发布日期：2020年4月24日

文章引用: 郭德强, 张琪. 麦克斯韦方程组在相对性原理中与洛伦兹变换的关系[J]. 现代物理, 2020, 10(3): 53-60.
DOI: 10.12677/mp.2020.103006

摘　要

麦克斯韦方程组在彼此平权的两个坐标系*K*和*K'*中服从相对性原理需借助洛伦兹变换。当平面波(包括电磁波和机械波)从彼此互作匀速相对运动的坐标系*K*传播到*K'*时会发生多普勒效应。根据相对性原理，只有借助洛伦兹变换才能将在坐标系*K*的平面波波动方程中的*x*和*t*协变为在坐标系*K'*的平面波波动方程中的*x'*和*t'*。

关键词

相对性原理，麦克斯韦方程组，洛伦兹变换

1. 引言

众所周知，麦克斯韦方程组在洛伦兹变换条件下服从相对性原理是理论物理学界的普遍共识，且证明方法很多。本文提出一个普遍观点：任何坐标系都是独立的，麦克斯韦方程组在彼此平权的两个坐标系中服从相对性原理需要借助洛伦兹变换;洛伦兹变换当有平面波(包括电磁波和机械波)从互作匀速直线运动的一个坐标系传播到另一个坐标系时，因发生了多普勒效应，根据相对性原理，平面波波动方程在这两个坐标系中为保持彼此完全相同的数学形式，需要借助的一种转化条件。

2. 洛伦兹变换下的麦克斯韦方程组

相对性原理可表述为：同种物理学方程在独立且平权的任意坐标系中的数学形式都是相同的。取各自独立且彼此平权的坐标系 K 和 K'，根据相对性原理，麦克斯韦方程组在坐标系 K 中的分量形式为：

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=-\frac{\partial B_x}{\partial t} \tag{1}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}=-\frac{\partial B_y}{\partial t} \tag{2}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=-\frac{\partial B_z}{\partial t} \tag{3}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}=J_x+\frac{\partial D_x}{\partial t} \tag{5}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}=J_y+\frac{\partial D_y}{\partial t} \tag{6}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}=J_z+\frac{\partial D_z}{\partial t} \tag{7}$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z}=\rho \tag{8}$$

在坐标系 K'中的分量形式为：

$$\frac{\partial E_z'}{\partial y'}-\frac{\partial E_y'}{\partial z'}=-\frac{\partial B_x'}{\partial t'} \tag{9}$$

$$\frac{\partial E_x'}{\partial z'}-\frac{\partial E_z'}{\partial x'}=-\frac{\partial B_y'}{\partial t'} \tag{10}$$

$$\frac{\partial E_y'}{\partial x'}-\frac{\partial E_x'}{\partial y'}=-\frac{\partial B_z'}{\partial t'} \tag{11}$$

$$\frac{\partial B_x'}{\partial x'}+\frac{\partial B_y'}{\partial y'}+\frac{\partial B_z'}{\partial z'}=0 \tag{12}$$

$$\frac{\partial H_z'}{\partial y'}-\frac{\partial H_y'}{\partial z'}=J_x'+\frac{\partial D_x'}{\partial t'} \tag{13}$$

$$\frac{\partial H_x'}{\partial z'}-\frac{\partial H_z'}{\partial x'}=J_y'+\frac{\partial D_y'}{\partial t'} \tag{14}$$

$$\frac{\partial H_y'}{\partial x'}-\frac{\partial H_x'}{\partial y'}=J_z'+\frac{\partial D_z'}{\partial t'} \tag{15}$$

$$\frac{\partial D_x'}{\partial x'}+\frac{\partial D_y'}{\partial y'}+\frac{\partial D_z'}{\partial z'}=\rho' \tag{16}$$

其中：E 为电场强度，B 为磁感应强度，H 为磁化力，D 为电位移矢量，J 为真实的宏观传导电流密度，ρ 宏观电荷密度。

洛伦兹变换相对于坐标系 K 把以速度为 v 运动转化成在坐标系 K'中去测量。对于麦克斯韦方程组会采取怎样的数学形式，经过长期研究，洛伦兹发现，若将坐标和时间写成洛伦兹变换的形式，在坐标系 K 中的(1)~(8)可以转化为坐标系 K'中的(9)~(16)，前提条件是只要场量也以特殊方式进行协变。

麦克斯韦方程组在洛伦兹变换条件下从坐标系 K 中的(1)~(8)协变为坐标系 K'中的(9)~(16)的证明方法请参见文献[1]，本文只将其中从(1)~(4)协变为(9)~(12)部分内容的证明方法作以简介和分析：

设坐标系 K 与 K'之间互相沿着公共坐标轴 x-x'以速率 v 互作平移，根据洛仑兹正变换：

$$x'=\gamma\left(x-vt\right),\quad y'=y,\quad z'=z,\quad t'=\gamma\left(t-\frac{vx}{c^2}\right).$$

其中

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

得到

$$\frac{\partial}{\partial x}=\gamma\left(\frac{\partial}{\partial x'}-\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}\right) \tag{17}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y'} \tag{18}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'} \tag{19}$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x'}\right) \tag{20}$$

根据洛伦兹逆变换：

$$x = \gamma\left(x' + vt'\right), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right).$$

得到

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right) \tag{21}$$

$$\frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y} \tag{22}$$

$$\frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z} \tag{23}$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) \tag{24}$$

把(17)、(19)、(20)代入(2)，得到

$$\frac{\partial E_x}{\partial z'} - \frac{\partial}{\partial x'}\gamma\left(E_z + vB_y\right) = -\frac{\partial}{\partial t'}\gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right) \tag{25}$$

将(25)与(10)进行对比，可设定

$$E'_x = E_x,$$

$$E'_z = \gamma\left(E_z + vE_y\right) \tag{26}$$

$$E'_y = \gamma\left(E_y + \frac{v}{c^2}E_z\right) \tag{27}$$

反之，把(21)、(23)、(24)代入(10)，得到

$$\frac{\partial E'_x}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\gamma\left(E'_z + vB'_y\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\gamma\left(B'_y + \frac{v}{c^2}E'_z\right) \tag{28}$$

将(28)与(2)进行对比，可设定

$$E_x = E'_x,$$

$$E_z = \gamma\left(E'_z - vE'_y\right) \tag{29}$$

$$E_y = \gamma\left(E'_y - \frac{v}{c^2}E'_z\right) \tag{30}$$

把(17)、(18)、(20)代入(3)，得到

$$\gamma\frac{\partial}{\partial x'}\left(E_y - vB_z\right) - \frac{\partial E_x}{\partial y'} = -\gamma\frac{\partial}{\partial t'}\left(B_z + \frac{v}{c^2}E_y\right) \tag{31}$$

将(31)与(11)进行对比，可设定

$$E'_x = E_x ,$$

$$E'_y = \gamma\left(E_y - vB_z\right) \tag{32}$$

$$B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right) \tag{33}$$

把(21)、(22)、(24)代入(11)，得到

$$\gamma\frac{\partial}{\partial x}\left(E'_y + vB'_z\right) - \frac{\partial E_x}{\partial y'} = -\gamma\frac{\partial}{\partial x}\left(B'_z + \frac{v}{c^2}E'_y\right) \tag{34}$$

将(31)与(11)进行对比，可设定

$$E_x = E'_x ,$$

$$E_y = \gamma\left(E'_y + vB'_z\right) \tag{35}$$

$$B_z = \gamma\left(B'_z + \frac{v}{c^2}E'_y\right) \tag{36}$$

把(18)、(19)、(20)代入(1)，得到

$$\frac{\partial E_z}{\partial y'} - \frac{\partial E_y}{\partial z'} = -\gamma\left(\frac{\partial B_x}{\partial t'} - \frac{\partial B_x}{\partial x'}\right) \tag{37}$$

把(17)、(18)、(19)代入(4)，得到

$$\gamma\left(\frac{\partial B_x}{\partial x'} - \frac{v}{c^2}\frac{\partial B_x}{\partial t'}\right) + \frac{\partial B_y}{\partial y'} + \frac{\partial B_z}{\partial z'} = 0 \tag{38}$$

(39)与(9)之间，(38)与(12)之间可以进行方程对比和场量协变关系设定。根据文献[1]，把(29)、(35)代入(37)，得到

$$\frac{\partial B_x}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial z'} = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} + \frac{\partial B_x}{\partial t'}\right) \tag{39}$$

再把(30)、(36)代入(38)，得到

$$\frac{\partial B_x}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial z'} = \frac{v}{c^2}\left(\frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} + \frac{\partial B_x}{\partial t'}\right) \tag{40}$$

比较(39)与(40)，若 $v \neq c$，则有

$$\frac{\partial B_x}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial z'} = 0 \tag{41}$$

$$\frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} = -\frac{\partial B_x}{\partial t'} \tag{42}$$

将(41)与(9)，(42)与(12)进行对比，可设定

$$B_x = B'_x$$

麦克斯韦方程组服从相对性原理借助洛伦兹变换的原因有三：

一是坐标系 K 和 K'是各自独立且彼此平权的，麦克斯韦方程组服从相对性原理与坐标系 K 和 K'之间

在任一方向上的平移无关。例如：若设坐标系 K 和 K'之间互沿坐标原点 o-o'连线以速率 v 相对平移，洛伦兹变换将在这个时候产生。

二是通过以上证明过程，可看出，只有同时含有 $\partial/\partial t$ 和 $\partial/\partial x$ 的方程，即(2)和(3)才可直接借助洛伦兹变换进行场量关系协变设定，而未同时含有 $\partial/\partial t$ 和 $\partial/\partial x$ 的方程，即(1)和(4)并不能直接借助洛伦兹变换进行场量关系协变设定。

对于(1)和(4)而言，在推理逻辑上是先把根据洛伦兹正变换得到的(18)、(19)和(20)代入(1)；把(17)、(18)和(19)代入(4)，分别得到(37)和(38)；再把根据洛仑兹逆变换得到的(29)和(35)代入(37)；把(30)和(36)代入(38)，分别得到(39)和(40)。若未先将(2)和(3)协变为(28)和(31)，同样可以将(1)和(4)协变为(39)和(40)。因此，这种证明方法在推理逻辑上是自洽的。

而且对(39)和(40)两式的两边分别相除，也可得到 $v = c$ 。

三是麦克斯韦方程组在洛伦兹变换条件下给出在坐标系 K 和 K'之间麦克斯韦方程组的一系列场量协变关系设定，可以实验进行有效验证。当 $v \ll c$ 时，洛伦兹变换被约化为伽利略变换，根据(32)和(27)，得到的是

$$E'_y = E_y - vB_z \text{，} \quad B'_z = B_z \text{；}$$

根据(33)和(26)，得到的是

$$B'_y = B_y \text{，} \quad E'_z = E_z - vB_y \text{；}$$

伽利略变换可以满足麦克斯韦方程组的协变要求，当坐标系 K 和 K'之间的相对速率 $v \ll c$ 时，麦克斯韦方程组的场量协变关系可通过实验进行验证。

3. 洛伦兹变换下的平面波波动方程

设坐标系 K 和 K'之间互沿坐标轴 x-x'以速率 v 相对平移，有一列平面电磁波平行于坐标轴 x-x'从坐标系 K 中传播到坐标系 K'中。在坐标系 K 中，平面波波动方程为

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{43}$$

把(17)代入(43)的等号左边项，有

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \gamma^2\left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}\right)^2 = \gamma^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \gamma^2\frac{2v}{c^2}\frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial t'} + \gamma^2\frac{v^2}{c^4}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}$$

把(20)代入(43)的等号右边项，有

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \gamma^2\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t'} - v\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2 = \gamma^2\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \gamma^2\frac{2v}{c^2}\frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial t'} + \gamma^2\frac{v^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}$$

于是有

$$\gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x'^2} = \gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial t'^2}$$

最后得到

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} \tag{44}$$

(44)就是平面波在坐标系 K'中的平面波波动方程。

若这列平面波是电磁波，因电磁波属于横波，在坐标系 K 中，当这列平面电磁波沿着坐标轴 x 方向传播时，E 和 B 分别在坐标轴 $y(z)$ 和 $z(y)$ 方向振动。在坐标系 K'中，当平面波沿着坐标轴 x'方向传播时，E' 和 B' 分别在坐标轴 $y'(z)$ 和 $z'(y)$ 方向振动。故在坐标系 K 中，平面电磁波波动方程应表示为

$$\frac{\partial^2 E_{y(z)}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_{y(z)}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 E_{z(y)}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_{z(y)}}{\partial t^2}.$$

在坐标系 K'中，平面电磁波波动方程应表示为

$$\frac{\partial^2 E'_{y(z)}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial E'_{y(z)}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 E'_{z(y)}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial E'_{z(y)}}{\partial t^2}.$$

洛伦兹变换当坐标系 K 与 K'之间互沿坐标轴 x-x'以速率 v 相对平移并有平面波平行于坐标轴 x-x'从坐标系 K 向 K'传播时，满足描述这列平面波的波动方程根据相对性原理在坐标系 K 与 K'中保持数学形式相同的一种协变条件。原因有二：

一是即使在坐标系 K 的原点 O 处波源发射一个球面波，当这个球面波传播到坐标系 K'时，在坐标系 K'的坐标轴 x'观察，只能是平面波。这列平面波在坐标系 K'中会发生多普勒效应。

二是球面波或平面波的波动方程从数学上看，利用洛伦兹变换在坐标系 K 和 K'中都符合协变要求，其数学形式在这两个坐标系中是相同的。但从物理学上看，只有平面波波动方程才能利用洛伦兹变换在坐标系 K 和 K'中唯一并真正实现协变要求，其数学形式在这两个坐标系中是相同的。

电磁波(光波)和机械波(声波)的纵向多普勒原理可统一表为

$$\nu' = \nu\sqrt{\frac{c \pm v}{c \mp v}}$$

其中：ν 为波在坐标系 K 中的频率，ν'为波在坐标系 K'中的频率，c 为波在在坐标系 K 和 K'中的传播速率，v 为坐标系 K 与 K'之间的相对速率。

声多普勒效应发生在声发射物与声接收物在流体介质中存在相对运动的条件下，流体介质都有粘性。当固体的声发射物或声接收物在流体介质中运动时，其壁面及周围的流体介质在粘性作用下会形成有流速梯度的边界层。从数学角度讲，静止在边界层内的坐标系与静止在自由流体介质内的坐标系是各自独立且彼此平权的。

因坐标系 K 与 K'之间沿着坐标轴 x-x'以速率 v 相对运动既可看作是相互靠近，也可看作是相互远离，故洛伦兹正变换可表为下面两种数学形式。

$$x' = \gamma(x \pm vt) \tag{45}$$

$$t' = \gamma\left(t \pm \frac{vx}{c^2}\right) \tag{46}$$

若设

$$x = ct \tag{47}$$

用(47)替换(45)中的 t，则得到

$$x' = x\sqrt{\frac{c \mp v}{c \pm v}}$$

用(47)替换(46)中的 x，则得到

$$t' = t\sqrt{\frac{c \mp v}{c \pm v}}$$

(48)和(49)与洛伦兹变换之间是可相互转换的，在平面波波动方程的坐标系协变中是完全等价的。

4. 结论

本文遵从相对性原理，提出麦克斯韦方程组服从相对性原理需借助洛伦兹变换的观点，又从推理逻辑角度上对(1)、(2)、(3)、(4)分别协变为(25)、(31)、(39)、(40)的证明方法的自洽合理性做出详细表述。在坐标系 K 与 K'之间，互沿坐标轴 x-x'，以速率 v 相对运动过程中，有平面波(包括电磁波和机械波)在坐标系 K 与 K'之间传播并发生了多普勒效应。本文提出洛伦兹变换是将在坐标系 K 的平面波波动方程中的 x 和 t 协变为在坐标系 K'的平面波波动方程中的 x'和 t'的一种数学条件的观点，扩展了洛伦兹变换的适用领域。

致　谢

敬请各位读者对于本文给予纠错指正。

参考文献

[1] (英) W.G.V.罗瑟. 相对论导论[M]. 北京: 科学出版社, 1980.