Modern Physics 现代物理, 2024, 14(6), 215-227
Published Online November 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/mp
https://doi.org/10.12677/mp.2024.146025

Hans汉斯

一种带速度差异项的Dirac方程及验证

张文模[1]，陈志鹏[2]

[1]泉州技师学院交通工程学部(筹)，福建 泉州
[2]泉州有志成云电子产品有限公司，福建 泉州

收稿日期：2024年10月26日；录用日期：2024年11月19日；发布日期：2024年11月26日

摘 要

近年来，在粒子物理学领域，研究者们发现理论模型所预测的结果与实验观测之间存在着不容忽视的差异。这种现象引发了学术界对现行量子场论方程的有效性和完整性的深入思考。量子场论是现代物理学的基石之一，它在描述微观粒子的行为方面取得了巨大的成功。然而，当理论预测与实验数据不一致时，这不仅仅是一个具体问题的出错，而更可能暗示着现有理论框架中潜在的根本性问题。这种差异可能指向了量子场论的某些基础假设或基本方程需要重新审视的需要。

关键词

动量，能量，相对论，量子力学，精细结构常数

A Dirac Equation with Velocity Difference Terms and Its Verification

Wenmo Zhang[1], Zhipeng Chen[2]

[1]Transportation Engineering Department (Preparation), Quanzhou Technician Institute, Quanzhou Fujian
[2]Quanzhou Youzhi Chengyun Electronics Co. Ltd., Quanzhou Fujian

Received: Oct. 26th, 2024; accepted: Nov. 19th, 2024; published: Nov. 26th, 2024

Abstract

In recent years, in the field of particle physics, researchers have found that the predictions of theoretical models have significant discrepancies with experimental observations. This phenomenon has sparked in-depth academic reflection on the effectiveness and completeness of the current quantum field theory equations. Quantum field theory is one of the cornerstones of modern physics and has achieved great success in describing the behavior of microscopic particles. However, when theoretical predictions do not match experimental data, it is not just a specific problem that has

文章引用: 张文模, 陈志鹏. 一种带速度差异项的 Dirac 方程及验证[J]. 现代物理, 2024, 14(6): 215-227.
DOI: 10.12677/mp.2024.146025

gone wrong, but more likely a hint that there are fundamental issues within the existing theoretical framework that require re-examination. This discrepancy may point to the need to re-evaluate some of the basic assumptions or fundamental equations of quantum field theory.

Keywords

Momentum, Energy, Relativity, Quantum Mechanics, Fine-Structure Constant

1. 引言

在追求科学探索的道路上，对思维和创新的任何束缚都是不应当被容忍的。正如著名物理学家史蒂文•温伯格所指出的，标准模型并非一个封闭且完备的理论体系。尤其值得注意的是，标准模型在只考虑有限项时与实验结果的高度吻合令人印象深刻。然而，随着更多选项的纳入，理论与实验之间的差异开始显现，有时甚至会导致不合理的无限大结果。在过去的一百年中，物理学和数学领域的领军人物一直在为量子场论寻求更稳定的基础，并探索非扰动的数学结构，但这一目标迄今仍未实现。在这样的背景下，本文提出了一种含有速度差异项的 Dirac 方程的新探索，它为解决标准模型中存在的无限大问题提供了一条可能的新途径。

2. 一些物理问题，一个理想状态的实验

2.1. 宇宙常数问题

量子场论(QFT)构成了粒子物理学的标准模型的基础架构，其中量子电动力学(QED)以前所未有的精确度预测了各种物理量。然而，量子场论也以其理论中的分歧问题而著称，其中最著名的问题之一便是真空能量密度的问题。在量子场论中，每个量子场都存在着发散的零点能量，将所有模式的能量相加会导致预测出极其巨大的真空能量密度值。

这种分歧可以通过费曼图来形象化，例如，一个光子可以产生一个虚拟的电子－正电子对，随后这对粒子会湮灭(即真空极化现象)。另一个例子是电子发射并重新吸收一个虚光子。根据广义相对论的预测和实验观察，真空的能量密度实际上非常小，两种估计值之间的差异可能达到 120 个数量级。

这个问题，通常称为宇宙常数问题或真空灾难，是现代物理学中最棘手的未解之谜之一。

2.2. 精细结构常数问题

长期以来，精细结构常数 α，其近似值为 1/137.036，已被科学界广泛接受。然而，在 1997 年，悉尼新南威尔士大学的约翰•韦布教授及其研究团队进行了一项开创性的研究。他们分析了从遥远类星体发出并经过 120 亿光年旅程到达地球的光线。这些光线在穿越主要由铁、镍、铬构成的星云时，部分光子被星云原子吸收，但这一现象与他们基于精细结构常数 α 的计算结果存在偏差。

唯一合理的解释似乎是，在光线穿越星云的过程中，物理量 α 发生了变化。由于精细结构常数 α 由基本物理量 e (电荷的量)、$\hbar$ (约化普朗克常数)和 c (光速)的组合 $\alpha = e^2/\hbar c$ 决定，确定是这三个基本量中的哪一个发生了变化，从而引起了 α 的改变，已成为当前物理学领域亟待解决的重要问题。

2.3. 电子的一些问题

1) 自 1960 年起，哈佛大学的专家团队和著名教授们便投身于一项具有里程碑意义的实验研究。经过数年的辛勤探索，他们在 1964 年取得了一个突破性的发现：电子具有可测量的体积。然而，这一结论在 1966 年受到了挑战。丁肇中先生领导的研究小组，在经过 8 个月的深入实验后，提出了一个革命性的观点：电子实际上并没有固定的测量尺寸。

他们的实验基于电子之间的碰撞原理，观察到一个现象：当一个电子与另一个电子发生碰撞时，接收到的能量越大，电子的测量半径似乎就越小。这一发现引发了对电子性质的重新思考。

然而，这个实验是否能够证明量子电动力学的完全正确性呢？显然，答案是否定的。量子电动力学的某些方面可能需要进一步的验证和修正。至今，电子的确切性质仍然是物理学界探索的一片未知领域，充满了神秘和挑战。

2) 电子的形状一直是物理学家研究的重点之一。根据最新的研究结果，电子的电荷分布被证实了基本完美的圆球形。在 2023 年，美国国家标准与技术研究院联合科罗拉多大学天体物理联合实验室的研究人员进行了一项新的测量实验，这项实验将测量的精确度提高到了创纪录的水平。

2.4. 一个理想状态的实验

在完全真空的环境下，当一对具有相同属性但自旋方向相反的高能电子和正电子以同等速度相遇并发生碰撞时，会发生一种称为湮灭的现象。这种现象中，电子和正电子在相互接触的瞬间转化成两个光子。这一转化过程似乎在几乎静止的状态下发生。根据经典牛顿物理学，湮灭发生时的电子－正电子对应有零动量。但在量子物理学中，转化成光子的电子无法处于静止状态，因为光子总是以光速运动。这引起了关于动量守恒的问题：当物质粒子(例如电子)转化为能量(例如光子)时，如何保持整个系统的动量不变？

量子理论指出，在粒子湮灭过程中，系统总动量(包括粒子和光子的动量)应保持恒定。如果电子－正电子对的初始动量为零，那么转化为光子的动量如何产生？解答这一疑问需要结合狭义相对论和量子理论。尽管电子－正电子对的总动量为零，但根据质能守恒定律，它们的质量(即静止能量)可以转化为光子的能量。根据爱因斯坦的质能等价公式($E = mc^2$)，这部分能量被转化为光子释放。在这种情况下，静止的能量实际上可被视为一种“潜在的动量”。由于光子不能处于静止状态，它们的动量与能量直接相关。因此，尽管电子－正电子对的初始动量为零，但由它们转化而来的光子具有相应的动量，使得整个过程符合动量守恒定律。对于上述的实验我们可以理解为物质粒子转化为能量的瞬间静能量与光子动量时取值区间为(m_0c^2, mc)之间。

但对于不考虑能量的点状粒子，可以使用牛顿动量来进行描述。因此，在现实物理世界中，理论上应但是这两种情况的综合。

3. 关于光的德布罗意物质波与电子德布罗意物质波区别与相似点

在真空中，光的德布罗意波呈现出无色散的波动特性，这特性表现为光的德布罗意波相速度与群速度相等。而对于一个孤立电子的波动性则被视为多个平面波(无色散波)的综合体，这些平面波互相叠加而成。依据量子力学的原理，每一种平面波都对应着电子特定的动量和能量状态。电子的波动特性，亦即波包，是通过这些平面波的合成实现的。构成电子波包的不仅是单一频率的波，而是多个具有不同动量(进而不同波长和频率)的平面波的叠加。这样的叠加效果导致波包随时间和空间发生扩散，表明即便在无外部势场(例如电磁场)存在的情况下，电子波包也会因为构成波的相互干涉而展现出色散现象。

对于一个单色平面波一般情况下可以写为：

$$\psi_k\left(r,t\right)=A_k\mathrm{e}^{i(k\cdot r-\omega t)} \tag{1}$$

假设我们有 N 个平面波，每个波参数是不同的，则总波函数可以写成：

$$\psi_k\left(r,t\right)=\sum_{n=1}^{N}A_n\mathrm{e}^{i(k_n\cdot r-\omega_n t)} \tag{2}$$

对于真空中的光子而言由德布罗意波相波与(群波)都可以得到下面线性关系式：

$$\begin{aligned}&c=\lambda u\\&\rightarrow E=pc=mc^2\end{aligned} \tag{3}$$

方程(3)在描述真空中的光的德布罗意物质波是合适的，但对于实物粒子，如电子等，需要使用更加复杂的理论来描述其能量与动量之间的线性关系。

由光的德布罗意物质波，我们可以仿造得到一个类似物质粒子如电子的相波方程：

$$\begin{aligned}&\begin{cases}v\Rightarrow\lambda u\\E\Rightarrow pv\end{cases}\\&p\Rightarrow mc^2/v\end{aligned} \tag{4}$$

(⇒ 这个符号表示为两个方程具有结构或是形式上的相似性不代表两方程完全等价)

中国传媒大学黄志洵教授[1]在论文中指出，光的德布罗意物质波在真空中表现出相速度与群速度之间的一致线性关系。然而，对于如电子等实物粒子，其德布罗意物质波的相速度却是超光速的，并且相速度与群速度之间存在非线性关系，两者之间存在显著差异。这种超光速现象并未得到充分关注，因为在传统理解是德布罗意波的相速度既不是信息传递速度，也不是粒子运动速度。这一现象揭示了物质波与电磁波(光波)之间的根本区别。光波在真空中的传播速度为($Vp=c$)，如果($Vp>c$)，则称为“异常传播”。正如费曼所言，“世上没有人真正理解量子力学”，黄教授对此现象也感到困惑。这种差异不仅挑战了我们对波动现象的传统认识，也促使我们重新审视物质波的波速与粒子特性之间的关系。

对于(4)式电子等实体粒子而言并不成立，原因在于构成电子波包的不仅是单一频率的波，而是多个具有不同动量(进而不同波长和频率)的平面波的叠加。它尚未经过量子化处理。因此，不能简单地将电子等实物粒子与光子等无质量粒子进行类比运算。不过，我们将在后续的讨论中引入量子化的方法来解决这个问题。

由薛定谔方程量子化条件可以知道：

$$\begin{aligned}&E=hu\Rightarrow E=\frac{hut}{t}\\&\Rightarrow i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}\end{aligned}\quad,\quad\begin{aligned}&p^2=\frac{\left(hut\right)^2}{\left(vt\right)^2}\Rightarrow p^2=\frac{\left(hut\right)^2}{x^2}\\&\Rightarrow-\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\end{aligned} \tag{5}$$

对于(5)式我们注意到对于薛定谔方程是由(3)式真空中光子的相速度(或真空中光子群速度)量子化后代入牛顿动量能量定理得到的：

$$E\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \tag{6}$$

在真空中电子波包的行为展示了力学与光学之间深刻的相似性。首先，就像光在介质中传播时表现出的色散现象一样，电子波包中的色散效应表明了波速如何随波长或频率的变化而变化。虽然其物理机制可能有所不同，但这种相似性强调了波动现象在力学和光学中的普遍性。无论是光子还是电子，它们都可以被视为波粒二象性的体现。在电子波包中，电子不再被简单地视为粒子，而是具有波动特性，这

与光的行为类似。此外，电子波包的行为也涉及波包的干涉和衍射效应，这与光学中的干涉和衍射现象相对应。这些现象都是波动理论中普遍存在的，无论是在光学还是在力学中，都具有重要的物理意义。

因此，虽然电子波包的性质与光子波束在某些方面不同，但它们之间的相似性强调了力学与光学之间的深刻联系，为我们理解自然界中波动现象的普遍性提供了重要见解。

4. 建立带速度差异项 Dirac 方程

4.1. 带速度差异项的 Dirac 方程[2]

由能量动量关系式与牛顿动量关系可知：

$$\begin{cases} E^2 - E_0^2 = \dfrac{m_0^2 c^4}{1 - v^2/c^2} - m_0^2 c^4 = m^2 v^2 c^2 \\ p = mv \end{cases}, \tag{7}$$

若能量动量关系式代入牛顿动量得：

$$E^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4 \tag{8}$$

可得到 Driac 得出：

$$cap\psi + \left(\beta mc^2\right)\psi = E\psi \tag{9}$$

该方程仅考虑了电子的粒子性质，通常我们会将电子视为点粒子，从而忽略电子等粒子的其他物理特性。

由于真空中的光德布罗意相波与群波相等，若将方程(4)代入方程(7)，来比较真空中光子的相波(群波)与实物粒子之间能量动量的关系，我们可以得到两者比较的结果：

$$\begin{aligned} &\begin{cases} E^2 - E_0^2 = \dfrac{m_0^2 c^4}{1 - v^2/c^2} - m_0^2 c^4 = m^2 v^2 c^2 \\ E \Rightarrow pv \end{cases}, \\ &\Rightarrow E^2 \Rightarrow \frac{v^4}{c^4} c^2 p^2 + m_0^2 c^4 \end{aligned} \tag{10}$$

在方程(5)中，动量(P)被描述为德布罗意相波的动量，或者是真空中光的动量。然而，在将这个动量应用于描述实物粒子的情境中时，需要进行量子化处理。这是因为(5)式是经典物理学趋近于真空中光学的近似描述，而电子的量子力学特性，即便是组成波包的每个平面波自身表现为无色散，电子的个体波包却展示出色散效应。

在讨论(5)式中的相速度量子化条件时，我们已经对相波的频率和波长进行了量子化处理，以适应量子力学的框架。考虑到这一点，我们可以合理地将速度也纳入量子化的框架中。

$$\begin{aligned} &E = hu \Rightarrow E = \frac{hut}{t} \\ &\Rightarrow i\hbar \frac{\partial(\psi)}{\partial t} \end{aligned}, \quad \begin{aligned} &v^2 = \frac{(vt)^2}{t^2} \\ &v^2 \Rightarrow \frac{\partial^2(\varsigma)}{\partial t^2} \\ &\left(\frac{v}{c}\right)^2 \Rightarrow \frac{\partial^2(\varsigma)}{c^2 \partial t^2} \end{aligned} \tag{11}$$

并且仿照 Driac 方程与克莱因高登方程可得：

$$
\begin{aligned}
&E^{2} \Rightarrow \frac{v^{4}}{c^{4}} c^{2}(p)^{2}+m^{2}{}_{0} c^{4} \\
&\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}
cap \dfrac{\partial^{2} \varsigma}{c^{2} \partial t^{2}} \psi+\left(\beta m c^{2}\right) \psi=E \psi \\
-\hbar^{2} \dfrac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}=\left(-\left(\dfrac{\partial^{2} \varsigma}{c^{2} \partial t^{2}}\right)^{2} \hbar^{2} c^{2} \nabla^{2}+m^{2} c^{4}\right) \psi
\end{array}\right.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

上式为带速度差异项 Dira 方程与克莱因高登方程。

对于真空中的光子或者是忽略色散的电子等量子化方程，我们通常引用狄拉克方程。然而，在实际情况中，物理定律应当结合方程（9）与方程（12）来完整表述。

对于波粒二象性，我们可以这样理解：在一种简化的情境中，我们假设不需要考虑物质的能量与其粒子属性的相互作用。在这种情况下，我们可以将此视为波粒二象性中的粒子性方面，这使我们能够专注于物质在特定空间位置的集中性，揭示出其类粒子的行为特征。此时，我们的关注点主要在于粒子的点态特性，而非其波动性质。

然而，在考虑物质的质能关系和物质间的相互作用时，波粒二象性的波动性方面变得更为重要。在这个视角下，物质不仅仅局限于特定空间位置，它展现出波动特性，能够在与精细结构常数平方相关的有限空间范围内传播并产生干涉效应。这种波动特性揭示了物质的能量波动与其粒子特性之间的相互影响。

通过这种理解，我们强调了物质在微观层面上的双重本质：物体既可以像粒子一样具有局部化的性质，又可以像波一样展现出传播和干涉的特性，使得我们能够更好地理解和描述物质在微观层面的行为。

至于群体粒子物质波，可以视为趋近于真空中光子(能量)的线性条件的概率。这意味着，尽管在个体粒子的水平上，我们可能无法完全应用光子的线性关系，但在群体水平上，这种趋势可能会更加显现，并且可以通过概率的形式来描述。这种概率性质使得我们能够更好地理解大量粒子的集体行为，并将其与真空中光子的行为进行类比和比较，从而揭示出粒子物质波在集体层面上的行为特征。

4.2. 带温度差异项的 Dirac 方程

由爱因斯坦普朗克温度可知：

$$
T=T_{0} \Big/ \sqrt{1-(v/c)^{2}} \tag{13}
$$

可得到：

$$
\begin{aligned}
&\frac{T^{2}-T_{0}^{2}}{T^{2}}=(v/c)^{2} \\
&\Rightarrow E^{2} \approx\left(\frac{T^{2}-T_{0}^{2}}{T^{2}}\right)^{2} c^{2} p^{2}+m_{0}^{2} c^{4}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

由(14)仿照狄拉克开方形式可得到：

$$
\frac{T^{2}-T_{0}^{2}}{T^{2}}=\frac{aT-\beta T_{0}}{T}=a-\frac{\beta T_{0}}{T} \tag{15}
$$

(式中 a 为狄拉克矩阵)

参考上面的量子化条件我们可以尝试把温度进行量子化：

$$E = hu \Rightarrow E = \frac{hut}{t} \qquad , \qquad \frac{T^2 - T_0^2}{T^2} = \frac{\left(a - \frac{\beta T_0}{T}\right)t}{t}$$
$$\Rightarrow i\hbar\frac{\partial(\psi)}{\partial t} \qquad \frac{T^2 - T_0^2}{T^2} \Rightarrow \frac{\partial(\Gamma)}{c^2\partial t} \tag{16}$$

量子化后可写为：

$$cap\frac{\partial\Gamma}{c^2\partial t}\psi + \left(\beta mc^2\right)\psi = E\psi \tag{17}$$

上述方程中包含了温度项，那么这个方程在描述粒子行为时可以考虑温度与自旋等因素之间的关系。这样的方程可能被用来描述一些特殊情况下的物理系统，比如超导体等，其中温度对粒子的自旋状态可能会产生影响。在超导体等系统中，温度可以影响到超导性质的展现和特性。

5. 波函数的意义[3]

对于方程(12)中的速度波函数 $\partial\varsigma$ 代表了，在某一时刻，在空间的某个位置，粒子出现在这个位置所能达到的速度概率幅。波函数的绝对值的平方表示了粒子在某个位置具有某个速度的概率密度，即在某个时间点自由粒子在特定位置所能达到速度的可能性。

对于(17)式也是同样的道理。

6. 关于物质波扩散率

赵国求教授[4]在他的文中提到，薛定谔曾通过波包模型试图描述电子的粒子性质，但实验数据并未支持这一理论。他指出，波包在时间进程中会展现出扩散现象，即所谓的“长胖”。此外，尝试使用经典波的“点模型”来构建波包并解释电子的粒子性会导致逻辑循环，因为在定义经典波时，粒子概念已经被先入为主地使用了。电子波作为一种概率波，与经典波在本质上存在区别，因此使用经典波模型来描述电子的行为显然是不适当的。综上所述，薛定谔的波包理论在实验验证和理论一致性方面存在一定的挑战。

由相对论能量动量公式得：

$$\begin{cases} E^2 = \left(mv_i\right)^2 c^2 + m_0^2 c^4 \\ \left(mc\right)^2 = \left(mv_i\right)^2 + \left(m_0 c\right)^2 \\ p_4^2 = \left(mv_i\right)^2 + p_0^2 \end{cases} \tag{18}$$

并(18)式可以得到：

$$\Rightarrow \begin{cases} E^2 \approx \dfrac{v^4}{c^4} c^2 \left(p_i\right)^2 + m_0^2 c^4 \\ p_4^2 = \left(\dfrac{\partial^2 \varsigma}{c^2 \partial t^2}\right)^2 p_i^2 + p_0^2 \end{cases} \tag{19}$$

参照赵国求教授写法由(19)式两边同时除以 $\hbar^2$ 可得到球模型曲率三角形(注： $k = 1/\lambda$)：

$$\begin{cases} {k_4}^2 = \left(\dfrac{\partial^2(\varsigma)}{c^2 \partial t^2}\right)^2 {k_i}^2 + {k_0}^2 \\ {k_4}^2 - {k_0}^2 = \left(\dfrac{\partial^2(\varsigma)}{c^2 \partial t^2}\right)^2 {k_i}^2 \end{cases} \tag{20}$$

由于电子是 1/2 自旋所以(20)式必需完成开方才能和事实相符，即：

$$ak_4 - \beta k_0 = \frac{\partial^2(\varsigma)}{c^2\partial t^2}k_i \tag{21}$$

式中 k_4 为运动电子的物质波球模型曲率，k_0 为静止电子的物质波球模型曲率（康普顿波长的倒数），k_i 为电子德布罗意物质波的扩散率，a,β 为狄拉克矩阵。

对于基态来说，电子的扩散率为：

$$\Delta k = \frac{\partial^2(\varsigma)}{c^2\partial t^2}k_i \tag{22}$$

且由实验值可以知道，电子的基态运动速度为：

$$\frac{\partial^2\varsigma}{c^2\partial t^2} = \left(\frac{v_0}{c}\right)^2 = a^2 \tag{23}$$

(式中 a^2 为精细结构常数的平方)

1) 按(23)式可以明确的知道，在电子的基态下，**其扩散率与精细结构常数的平方成正比**，这表明电子的物质波不会导致无限扩散，而是在一定范围内受到限制。**这一发现与实验观测是相一致的，其中精细结构常数的平方已经被实验证明是电子发射和吸收光子的基本概率**。这种关联性揭示了电子行为的量子特性，进而为我们提供了一种理解电子行为的模型。特别是，我们可以借助球模型来解释电子的运动和相互作用，从而更深入地理解电子的性质和行为。对于电子等实体粒子双四维球模型赵国求教授的相关论文书籍有更多详细论证。

2) 电子等粒子的扩散率也反映了物质粒子波粒二象性的显著程度。粒子表现出显著波动性时，其扩散行为会变得更复杂，表明粒子的“尺寸”并非固定不变。丁肇中先生的实验验证了这一点，显示粒子的“尺寸”受到环境等相互作用的影响，例如，电子的扩散行为差异显示了其波动特性的作用。这一现象源于量子力学中的波动性与粒子性，挑战了经典物理对粒子尺寸的理解，并表明物质波动现象越明显的粒子，其尺寸大小也越不固定。

7. 关于新理论的验证[5] [6]

氢原子 Dirac 能级的解是大家所熟悉的，任何一本高等量子力学教材都有介绍。我们就关于带速度差异项 Dirac 方程计算氢原子能级，看方程是否与实验相符合。

类氢原子的带速度差异项的 Dirac 方程为：

$$\left[c\left(\alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z\right)\frac{\partial^2\varsigma}{c^2\partial t^2} + \beta mc^2 - \frac{Ze^2}{r}\right]\psi = E\psi \tag{22}$$

方程(22)两边左 $\alpha\cdot r/r$ 得：

$$c\left(\frac{r\cdot p}{r}\right)\frac{\partial^2\varsigma}{c^2\partial t^2}\psi + \frac{ic}{r}(\sigma\cdot L)\frac{\partial^2\varsigma}{c^2\partial t^2}\psi - mc^2\left(\beta\frac{a\cdot r}{r}\right)\psi - \frac{Ze^2}{r}\left(\frac{a\cdot r}{r}\right)\psi = E\left(\frac{a\cdot r}{r}\right)\psi \tag{23}$$

现在用一个辅助定理：

$$(\sigma\cdot L+\hbar)^2 = L^2 + \hbar^2 - \hbar\sigma\cdot L + 2\hbar\sigma\cdot L = \left(j+\frac{1}{2}\right)^2\hbar^2 = k^2\hbar^2 \tag{24}$$

由 Dirac 书上证明 $(\sigma\cdot L+\hbar)$ 与 $(a\cdot p)$ 反对易，因此 $\hbar k = \beta(\sigma\cdot L+\hbar)\cdot\beta(\sigma\cdot L+\hbar)$ 也具有哈密顿算符对易这一相同特征，对于方程(23)可以写成下式：

$$\frac{c\hbar}{i}\frac{\partial^2\varsigma}{c^2\partial t^2}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{ic}{r}(\beta k\hbar-\hbar)\frac{\partial^2\varsigma}{c^2\partial t^2}\psi-mc^2\left(\beta\frac{a\cdot r}{r}\right)-\frac{Ze^2}{r}\left(\frac{a\cdot r}{r}\right)\psi=E\left(\frac{a\cdot r}{r}\right)\psi \tag{25}$$

可得：

$$\frac{c\hbar}{i}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)\frac{\partial^2\varsigma}{c^2\partial t^2}\psi=\left(E+\frac{Ze^2}{r}\right)\left(\frac{a\cdot r}{r}\right)\psi+mc^2\beta\left(\frac{a\cdot r}{r}\right)\psi-\frac{ick\hbar}{r}\beta\frac{\partial^2\varsigma}{c^2\partial t^2}\psi \tag{26}$$

将上式两边乘以$(\hbar c/i)\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)$得：

$$\begin{aligned}&-\hbar^2c\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)\frac{\partial^2\varsigma}{c^2\partial t^2}\psi\\&=\frac{c\hbar}{i}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)\left[\left(E+\frac{Ze^2}{r}\right)\left(\frac{a\cdot r}{r}\right)+mc^2\beta\left(\frac{a\cdot r}{r}\right)\psi-\frac{ick\hbar}{r}\beta\frac{\partial^2\varsigma}{c^2\partial t^2}\right]\psi\end{aligned} \tag{27}$$

上式可写成：

$$\begin{aligned}&-\hbar^2c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{\partial^2\varsigma}{c^2\partial t^2}\psi\\&+\left(m^2c^4-E^2-\frac{2Ze^2}{r}E-\frac{Z^2e^4}{r^2}+\frac{c^2\hbar^2}{r^2}\frac{\partial^2\varsigma}{c^2\partial t^2}\right)\psi\\&-\frac{c^2\hbar^2}{r^2}k\beta\frac{\partial^2\varsigma}{c^2\partial t^2}\psi-\frac{ic\hbar Ze^2}{r^2}\cdot\left(\frac{a\cdot r}{r}\right)\psi=0\end{aligned} \tag{28}$$

可设：

$$\begin{aligned}&k^2-\frac{Z^2e^4}{c^2\hbar^2}\equiv g^2,k=g\sin\theta,\\&k=g\sin\theta,\frac{iZe^2}{\hbar c}=g\sin\theta,\\&\Gamma\equiv\beta\sin\theta+\frac{a\cdot r}{r}\cos\theta=\frac{k}{g}\beta+i\frac{Ze^2}{\hbar cg}\left(\frac{a\cdot r}{r}\right)\end{aligned} \tag{29}$$

显然$\Gamma^2=1$，再令$(1+\Gamma)\psi=\psi$

于是，方程(28)变成为

$$\begin{aligned}&-\hbar^2c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{\partial^2\varsigma}{c^2\partial t^2}\psi\\&+\left(m^2c^4-E^2-\frac{2Ze^2}{r}E+\frac{c^2\hbar^2}{r^2}g^2\frac{\partial^2\varsigma}{c^2\partial t^2}\right)\psi\\&-\frac{c^2\hbar^2}{r^2}g\Gamma\frac{\partial^2\varsigma}{c^2\partial t^2}\psi=0\end{aligned} \tag{30}$$

用Γ乘(30)式两端，得：

$$\begin{aligned}&-\hbar^2c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\Gamma\frac{\partial^2\varsigma}{c^2\partial t^2}\psi\\&+\left(m^2c^4-E^2-\frac{2Ze^2}{r}E+\frac{c^2\hbar^2}{r^2}g^2\frac{\partial^2\varsigma}{c^2\partial t^2}\right)\Gamma\psi\end{aligned}$$

$$-\frac{c^2\hbar^2}{r^2}g\Gamma\frac{\partial^2\varsigma}{c^2\partial t^2}\psi=0 \tag{31}$$

由(30)与(31)式相加，得：

$$\begin{aligned}&-\hbar^2c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)(1+\Gamma)\frac{\partial^2\varsigma}{c^2\partial t^2}\psi\\&+\left(m^2c^4-E^2-\frac{2Ze^2}{r}E+\frac{c^2\hbar^2}{r^2}g^2\frac{\partial^2\varsigma}{c^2\partial t^2}\right)(1+\Gamma)\psi\\&-\frac{c^2\hbar^2}{r^2}g(1+\Gamma)\frac{\partial^2\varsigma}{c^2\partial t^2}\psi=0\end{aligned} \tag{32}$$

$$-\hbar^2c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{\partial^2\varsigma}{c^2\partial t^2}\psi+\left[\left(m^2c^4-E^2-\frac{2Ze^2}{r}E+\frac{c^2\hbar^2}{r^2}\frac{\partial^2\varsigma}{c^2\partial t^2}\right)g(g-1)\right]\psi=0 \tag{33}$$

将方程(33)同薛定谔方程比较，非相对论方程为：

$$\begin{aligned}&-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right)\psi\\&-\frac{Ze^2}{r}\psi+\varepsilon\psi=0\end{aligned} \tag{34}$$

式中 $E=-\varepsilon$ 且：

$$\varepsilon=\frac{mZ^2e^4}{2n^2\hbar^2} \tag{35}$$

也就是说对于方程：

$$-a\frac{\partial^2\varsigma}{c^2\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{l(l+1)}{r^2}-\frac{b}{r}+c\right)\psi=0 \tag{36}$$

同时可知：

$$c\frac{\partial^2\varsigma}{c^2\partial t^2}=\frac{b^2}{4an^2}\frac{\partial^2\varsigma}{c^2\partial t^2}=\frac{b^2}{4a(n_0+1)^2}\frac{\partial^2\varsigma}{c^2\partial t^2} \tag{37}$$

由(37)式可知方程(33)的本征值为：

$$m^2c^4-E^2=\frac{4Z^2e^4E^2}{4\hbar^2c^2(n_0+g+1)^2}\frac{\partial^2\varsigma}{c^2\partial t^2}，\quad n_0+j-\frac{1}{2}=n \tag{38}$$

由(38)式可写为：

$$\frac{m^2c^4}{E^2}-1=\frac{Z^2a^2}{(n_0+g+1)^2}\frac{\partial^2\varsigma}{c^2\partial t^2},\left(a=\frac{e^2}{\hbar c}\right) \tag{39}$$

即由(39)式得：

$$\left(\frac{mc^2}{E}\right)^2=1+\frac{Z^2a^2}{\left(n-j+\frac{1}{2}+g-1\right)^2}\frac{\partial^2\varsigma}{c^2\partial t^2} \tag{40}$$

再定义 $E=mc^2+\varepsilon$，利用(40)式得：

$$\varepsilon = mc^2\left[\left(1+\frac{Z^2a^2}{\left(n-j+\frac{1}{2}+g-1\right)^2}\frac{\partial^2\varsigma}{c^2\partial t^2}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right] \tag{41}$$

由 Dirac 方程可得：

$$\varepsilon = mc^2\left[\left(1+\frac{Z^2a^2}{\left(n-j+\frac{1}{2}+g-1\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right] \tag{42}$$

完整的氢原子由(41)与(42)式相加，分别对应波与粒两种属性的能级相加。

若设：

$$\begin{aligned}&|K|=(j+1/2)=1,2,3,\cdots\\&n_r=0,1,2,3,\cdots\end{aligned} \tag{43}$$

利用(43)式也可写成：

$$E = mc^2\left(1+\frac{Z^2a^2}{\sqrt{K^2-a^2}+n_r}\frac{\partial^2\varsigma}{c^2\partial t^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{44}$$

(α 展示了电子在氢原子第一玻尔轨道上的运动速度与真空中光速的比值)

对于氢原子基态通过实验可以得到：$\frac{\partial^2\varsigma}{c^2\partial t^2}=(v_0/c)^2=a^2$：

$$E = mc^2\left(1+\frac{Z^2a^4}{\sqrt{K^2-a^2}+n_r}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{45}$$

在基态时对精细结构 做幂级数 $a\approx 1/137$ 展开：

$$\left(\sqrt{K^2-a^2}+n_r\right)^{-2}\approx\left(n_r+|K|-\frac{a^2}{2|k|}\right)^{-2}\approx\frac{1}{n^2}\left[1+\frac{a^2}{n|K|}\right] \tag{46}$$

(式中 $n=n_r+|K|=1,2,3,\cdots$)

(46)式表示为：

$$E = mc^2\left[1+\frac{a^4}{n^2}\left(1+\frac{a^2}{n|K|}\right)\right]^{-1/2} \tag{47}$$

上式还可以写成：

$$\begin{aligned}E_{nK}-mc^2&=-\frac{mc^2a^2}{2n^2}\left[1+\frac{a^4}{n^2}\left(\frac{n}{|K|}-\frac{3}{4}\right)+Oz\left(a^4\right)\right]\\&=-\frac{e^2}{2a}\frac{1}{n^2}\left[1+\frac{a^4}{n^2}\left(\frac{n}{|K|}-\frac{3}{4}\right)+Oz\left(a^4\right)\right]\end{aligned} \tag{48}$$

式中 $\left(a=\hbar/me^{2}, Bohr\text{半径}\right)$，或用量子数 j 替代 $|K|$ 可得：

$$E_{nK}-mc^{2}=-\frac{e^{2}a^{2}}{2n^{2}}\left[1+\frac{a^{4}}{n^{2}}\left(\frac{n}{j+1/2}-\frac{3}{4}\right)+Oz\left(a^{4}\right)\right] \tag{49}$$

对于首项：

$$E_{n}=-\frac{ea^{2}}{2a}\frac{1}{n^{2}} \quad (n=1,2,3,\cdots\text{为玻尔能级}) \tag{50}$$

第二项：

$$\Delta E=-\frac{a^{4}}{2n^{4}}E_{n} \tag{51}$$

理论值：$\Delta E=-\frac{a^{4}E_{n}}{2n^{4}}=4.47\times10^{-6}\left(\mathrm{eV}\right)$，实验值：$\Delta E=4.376\times10^{-6}\left(\mathrm{eV}\right)$

这一项在算得兰姆实验与实验值仅有微小的差异。

由于速度修正项在基态时等于精细结构常数的平方。并且由量子场论知道精细结构常数平方为狄拉克方程的解的修正，可以知道这个方程后续计算与量子场论计算是大致相等的。因此，对于速度的修正项可以视为简单的费曼图中电子“自能修正”。这种修正与电子场论中电子与自身以及其自身能量带来的量子涨落之间的相互作用计算结果相似。这表明了量子电动力学(QED)那套理论在本文中也是适用的，并且无需引入虚粒子。另外，由于粒子具有有限的质量，电子的自能修正是有限值，因此避免了必须截断无穷大和进行重整化等一系列困难。

8. 关于固体物理学中的赝狄拉克方程(狄拉克点)

对于赝狄拉克方程在描述准粒子行为方面被确认为唯一有效的理论工具。这些材料中的电子在低能激发状态下表现出的特性类似于相对论中的光子，尽管其传播速度远低于真空中的光速。这一发现强调了传统非相对论量子力学在解释这类电子行为上的局限性，促使我们采用修正后的新框架，该框架类似于描述光子动量与能量关系的($E=pc$)方程。在赝狄拉克方程中，电子在晶体结构中的有效速度(v)取代了光速(c)，尽管这种速度远不及真空中的光速。建立在这一理论框架之上，赝狄拉克方程已经成为描述电子动能的基本方程。这一方程类似于相对论中光子的能量动量关系式，但其中的速度(v)值明显低于光速(c)。为了更全面地解释这些独特的准粒子行为，在狄拉克点上构建了一个类似于($E=pv$)的公式，其中(p)代表动量，(v)代表准粒子在物质中的有效速度。

在一些特定的材料中，譬如石墨烯，赝狄拉克方程展示了电子在狄拉克点附近的独一无二的行为模式。这些点是能量与动量在能带结构中线性关系的关键区域，赋予电子仿佛拥有了光子的“无质量”特性。在石墨烯中，赝狄拉克电子显示出了与真实的狄拉克费米子类似的行为，具有线性色散关系和非零的附加自旋势。这种独特的准粒子行为触发了一系列的奇特现象，包括半整数量子霍尔效应和其他拓扑性质。通过深入研究这些赝狄拉克准粒子，我们可以更深刻地理解材料中的量子行为。

在其他如拓扑绝缘体类的材料中，也展现出了相似的准粒子行为。这些材料的电子能带结构具有独特的拓扑性质，其中，电子波函数在不同能带之间有非零的陈数。这种特殊的拓扑性质带来了边界态的出现，这些状态呈现了真实的狄拉克费米子的相似特性。这些边界态出现在材料的表面或界面上，具有独特的电子传输性质。

9. 总结

本文基于光与物质波之间的相似性，提出了一个引入速度差异项的 Dirac 方程。为了验证该方程的有

效性，我们选择了氢原子的精细结构作为研究对象。此方程不仅能够提供对氢原子精细结构的精确描述，还有可能解决长期以来令著名物理学家沃尔夫冈·泡利困惑的精细结构常数等问题。

参考文献

[1] 黄志洵. 波粒二象性理论的若干问题[J]. 中国工程科学, 2002, 4(1): 54-63.

[2] 喀兴林. 高等量于力学[M]. 第 1 版. 北京: 北京高等教育出版社, 2001.

[3] 曾谨言. 量子力学[M]. 第 4 版. 北京: 科学出版社, 2007.

[4] 赵国求. 双四维时空量子力学基础-量子力学概率的时空起源[M]. 武汉: 湖北科学出版社, 2016.

[5] 狄拉克. 量子力学原理[M]. 喀兴林, 译. 北京: 科学出版社, 1958.

[6] 刘川. 量子场论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2012.