Modern Physics 现代物理, 2025, 15(1), 13-20
Published Online January 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/mp
https://doi.org/10.12677/mp.2025.151002

Hans汉斯

基于贝叶斯神经网络的Bratu方程

王鑫宇，庄晓悦，夏树灿*

浙江传媒学院媒体工程学院，浙江 杭州

收稿日期：2024年12月27日；录用日期：2025年1月20日；发布日期：2025年1月27日

摘　要

Bratu方程在描述热传导过程中的温度分布方面扮演着关键角色。本研究通过在一维区间内部署分段传感器阵列，采集了相应的温度数据。在充分考虑各传感器测量误差的基础上，我们利用贝叶斯推断方法对导体的整体温度分布进行了分析。研究首先基于采集到的数据，在不同水平的噪声干扰下进行推断，旨在通过贝叶斯神经网络获得与测试数据点相匹配的温度分布。随后，我们引入了描述热传导特性的Bratu方程，以期获得与该方程相符的温度分布，并据此通过贝叶斯神经网络进行进一步的推断。研究结果表明，相较于仅依赖于数据本身的推断，结合Bratu方程的贝叶斯推断能够显著提高预测的准确性和可靠性。这一发现强调了在热传导问题中，将物理模型与数据驱动方法相结合的重要性。

关键词

Bartu方程，传感器阵列，温度分布，贝叶斯推断

Inference of Bratu's Equation Based on Bayesian Neural Networks

Xinyu Wang, Xiaoyue Zhuang, Shucan Xia*

School of Media Engineering, Zhejiang University of Media and Communications, Hangzhou Zhejiang

Received: Dec. 27th, 2024; accepted: Jan. 20th, 2025; published: Jan. 27th, 2025

Abstract

The Bratu equation plays a pivotal role in describing the temperature distribution during heat conduction. In this study, we deployed a segmented sensor array within a one-dimensional interval to collect corresponding temperature values. Considering the measurement errors of each sensor, we utilized Bayesian inference to analyze the overall temperature distribution of the conductor. Initially,

*通讯作者。

文章引用: 王鑫宇, 庄晓悦, 夏树灿. 基于贝叶斯神经网络的 Bratu 方程[J]. 现代物理, 2025, 15(1): 13-20.
DOI: 10.12677/mp.2025.151002

we performed inference based on the collected data under various levels of noise interference, aiming to obtain a temperature distribution that aligns with the test data points through a Bayesian neural network. Subsequently, we incorporated the Bratu equation, which describes the characteristics of heat conduction, in the hope of achieving a temperature distribution that conforms to this equation and further inferred using the Bayesian neural network. The results indicated that the Bayesian inference combined with the Bratu equation significantly outperformed inference based solely on data. This finding underscores the importance of integrating physical models with data-driven approaches in heat conduction problems.

Keywords

Bratu Equation, Sensor Array, Temperature Distribution, Bayesian Inference

1. 引言

Liouville-Bratu-Gelfand 方程的边界值问题(BVP)的一维问题被称作 Bratu 问题[1]。通常，Bratu 问题涉及以下形式的微分方程：

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\lambda e^u=0 \tag{1}$$

其中 $u=u(x)$是未知函数，λ 是一个正常数。边界条件通常为：

$$u(0)=u(1)=0 \tag{2}$$

2. 对数据集的贝叶斯推断原理

在热传导领域，准确预测材料内部的温度分布对于设计有效的热管理系统至关重要。本研究采用 N 个高精度传感器，对一维稳态热传导过程中的温度分布 $u(x)$进行数据采集。这些传感器被部署在热传导路径上，以监测不同位置的温度变化。每个传感器的测量精度 $\sigma^{(i)}$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ \mathrm{N}$，是预先确定的，反映了在理想条件下传感器的最大不确定性。

在实际的数据采集过程中，每个传感器会产生独立的测量误差 $\epsilon^{(i)}$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ \mathrm{N}$。这些误差可能源于传感器的固有不准确性、环境变化、外部干扰等因素。我们假设这些测量误差是独立同分布的(i.i.d.)，即它们不仅相互独立，而且遵循相同的统计分布。例如，若误差服从正态分布，则可表示为 $\epsilon^{(i)}\sim\mathcal{N}\left(0,\sigma^2\right)$，其中 σ^2 代表误差的方差。

在 Bratu 方程的背景下，这种数据采集方法的应用涉及到对非线性偏微分方程的数值解进行不确定性量化。Bratu 方程在热传导问题中有广泛的应用，如在描述固体推进剂放热反应和宇宙膨胀过程等物理现象。通过在特定点 x 处观测 $u(x)$的值，我们可以对解的不确定性进行量化，这对于理解和预测 Bratu 方程在实际应用中的行为至关重要。

我们把相关数据采集通过数学描述为：传感器采集得到的数据集 u 构成的集合 D 具有噪声，即

$$D=\left\{\left(x^{(i)},\bar{u}^{(i)}\right)\middle|\bar{u}^{(i)}=u\left(x^{(i)}\right)+\epsilon^{(i)}\right\}_{i=1}^{N} \tag{3}$$

这里 $\epsilon^{(i)} \sim \mathcal{N}\left(0,\sigma^{(i)^2}\right)$ 且 i.i.d.。

我们计划通过贝叶斯神经网络来对材料内部的温度进行整体不确定量化，假设用贝叶斯神经网络来得到的数值为 $\tilde{u}^{(i)}(x,\theta)$，其中 θ 为贝叶斯网络中的权重，偏置等参数，它们服从先验概率 $P(\theta)$。那么相应的似然函数为

$$P(D|\theta)=\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^{(i)^2}}}\exp\left(-\frac{\left(\tilde{u}^{i}(x,\theta)-\bar{u}^{(i)}\right)^2}{2\sigma^{(i)^2}}\right) \tag{4}$$

根据贝叶斯定理，有

$$P(\theta|D)=\frac{P(D|\theta)P(\theta)}{P(D)} \tag{5}$$

这里 $P(\theta|D)$ 可以看成是通过数据得到参数的概率，即后验概率。在求解后验概率(5)的过程中，由于 $P(\theta)$ 为先验概率，可以事先给定，而 $P(D|\theta)$ 则可以通过方程(4)计算得到，那么难度就集中在边缘分布 $P(D)$ 上。幸运的是在测量数据给定的情况下 $P(D)$ 可看作是一个定值，那么就有

$$P(\theta|D)\propto P(D|\theta)P(\theta)$$

我们对 $P(\theta|D)$ 中的 θ 进行抽样得到 $\left\{\theta^{(i)}\right\}_{i=1}^{M}$，进而得到相应的贝叶斯神经网络值 $\left\{\tilde{u}^{(i)}(x,\theta)_{i=1}^{M}\right\}$，从而可以得到整体对于 $u(x)$的贝叶斯推断，推断的统计特性用均值和方差来显示，以便用来评估贝叶斯神经网络求解的预测值和不确定量化。

3. 基于 Bratu 方程数据集的贝叶斯推断

我们构造含有噪声的测试数据集 D，进而进行贝叶斯推断。

3.1. 含有噪声数据集 D

我们首先给出 Bratu 方程的数学特征，进而给出相应的测试数据集。

3.1.1. Bartu 方程的数学特征

Bratu 问题的解析解为以下形式的函数：

$$u(x)=2\ln\left(\frac{\cosh(\alpha)}{\cosh(\alpha(1-2x))}\right) \tag{6}$$

其中 α 满足的超越方程

$$\cosh(\alpha)=\frac{4}{\sqrt{2\lambda}}\alpha \tag{7}$$

通过数值方法[2]求解超越方程(7)可得，如果 $\lambda_c=3.513830719$，则当

$$\lambda>\lambda_c,\ \lambda=\lambda_c,\ \lambda<\lambda_c,$$

方程(7)分别有 0, 1, 2 个解。有关超越方程(7)的图形可见图 1(a)，图 1(b)和图 1(c)。由图 1(b)可以看得出来，当 $\lambda=\lambda_c$ 时，$\cosh(\alpha)$ 的图形和 $\frac{4}{\sqrt{2\lambda}}\alpha$ 的图形相切于一点，即超越方程(7)有唯一解，此时可以唯一确定 α = 1.195298433303833。

把唯一确定的 α 的值带入 Bratu 方程解(6)，即可得到完整的 $\left(x, u\left(x\right)\right)$ 相图，见图 2。

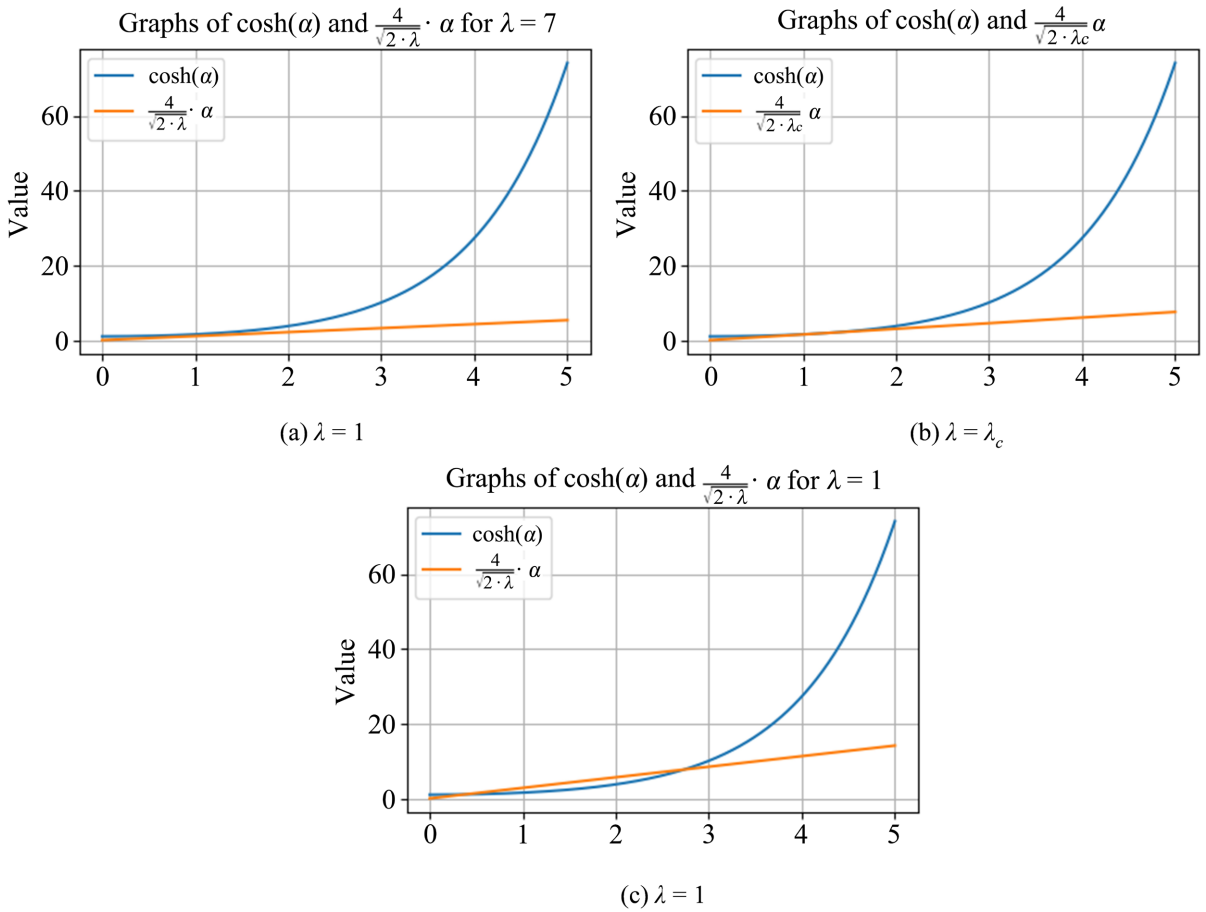


Figure 1. Graphical representation of the transcendental equation (7) for various values of λ
图 1. λ 取不同数值时超越方程(7)的图形

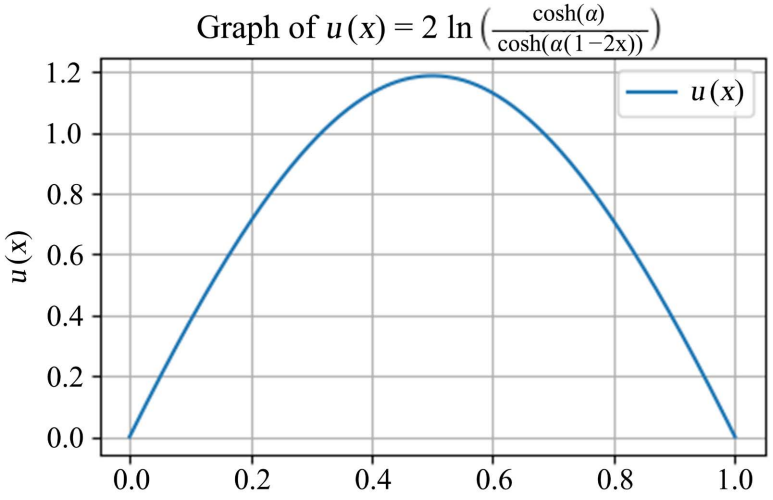
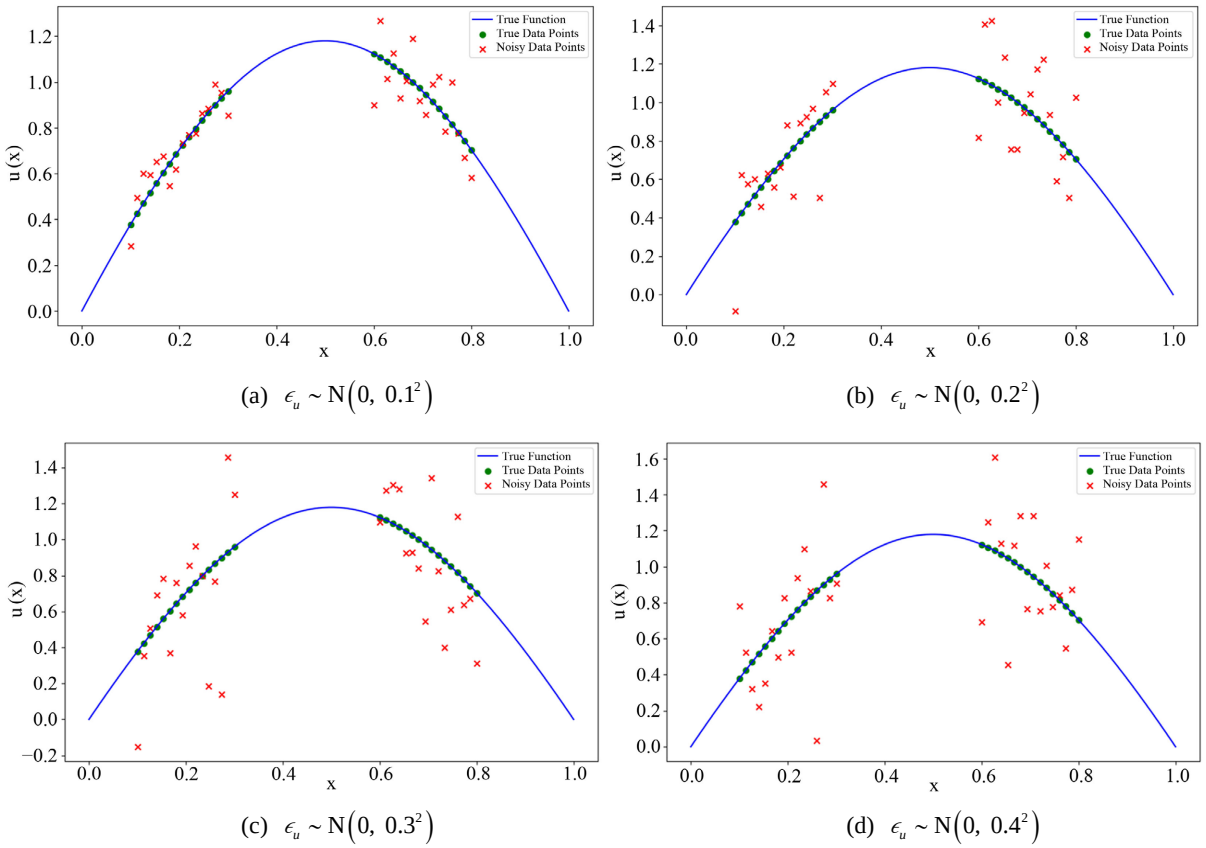


Figure 2. The graph of $u\left(x\right)$ when $\lambda = \lambda_c$
图 2. $\lambda = \lambda_c$ 时，$u\left(x\right)$ 的图形

3.1.2. 测试数据集的构成

我们根据 Bratu 方程的解析解(6)，在区间$[0.1,\ 0.3]\cup[0.6,\ 0.8]$均匀采集 32 个点，并对相应的$u\left(x^{(i)}\right)$根据方程(3)进行加噪，进而构建测试数据集 D，其中噪声ϵ_u分别为 N$(0, 0.1^2)$，N$(0, 0.2^2)$，N$(0, 0.3^2)$和 N$(0, 0.4^2)$。具体的数据集形式可见图 3。



(a) $\epsilon_u \sim \mathrm{N}\left(0,\ 0.1^2\right)$　(b) $\epsilon_u \sim \mathrm{N}\left(0,\ 0.2^2\right)$

(c) $\epsilon_u \sim \mathrm{N}\left(0,\ 0.3^2\right)$　(d) $\epsilon_u \sim \mathrm{N}\left(0,\ 0.4^2\right)$

Figure 3. The dataset of $u\left(x^{(i)}\right)$ and $\overline{u^{(i)}}$ for different values of ϵ_u

图 3. 取值不同的ϵ_u下$u\left(x^{(i)}\right)$和$\overline{u^{(i)}}$数据集

3.2. Bartu 方程数据集的贝叶斯推断

我们构建贝叶斯神经网络的具体框架为 1 × 16 × 16 × 1，激活函数采用 tanh，采样方法为 HMC。

3.2.1. 单纯数据集 D 的贝叶斯推断

直接对数据集 D 进行贝叶斯推断，此时损失函数为贝叶斯网络生成的数据集的值同含有噪声数据集的值之差，即

$$Loss=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2\sigma^{(i)^2}}\left(\tilde{u}^{(i)}(x,\theta)-\overline{u}^{(i)}(x,\theta)\right)^2$$

我们给出函数真实值，推断的均值以及二倍标准差，图形可见图 4。

从图 4 可以观察到，基于测试数据的贝叶斯推断基本上能够捕捉到温度的变化趋势。在导体边缘未进行测量的区域，两端的温度偏差较为显著；而在数据密集的区域，推断结果与实际数据的吻合度较高。

通过对比图 4(a)至图 4(d)，我们可以发现，随着传感器精度的降低，贝叶斯推断的不确定性范围(带宽)变得更为宽广，这反映出整个监测系统的可靠性有所下降。

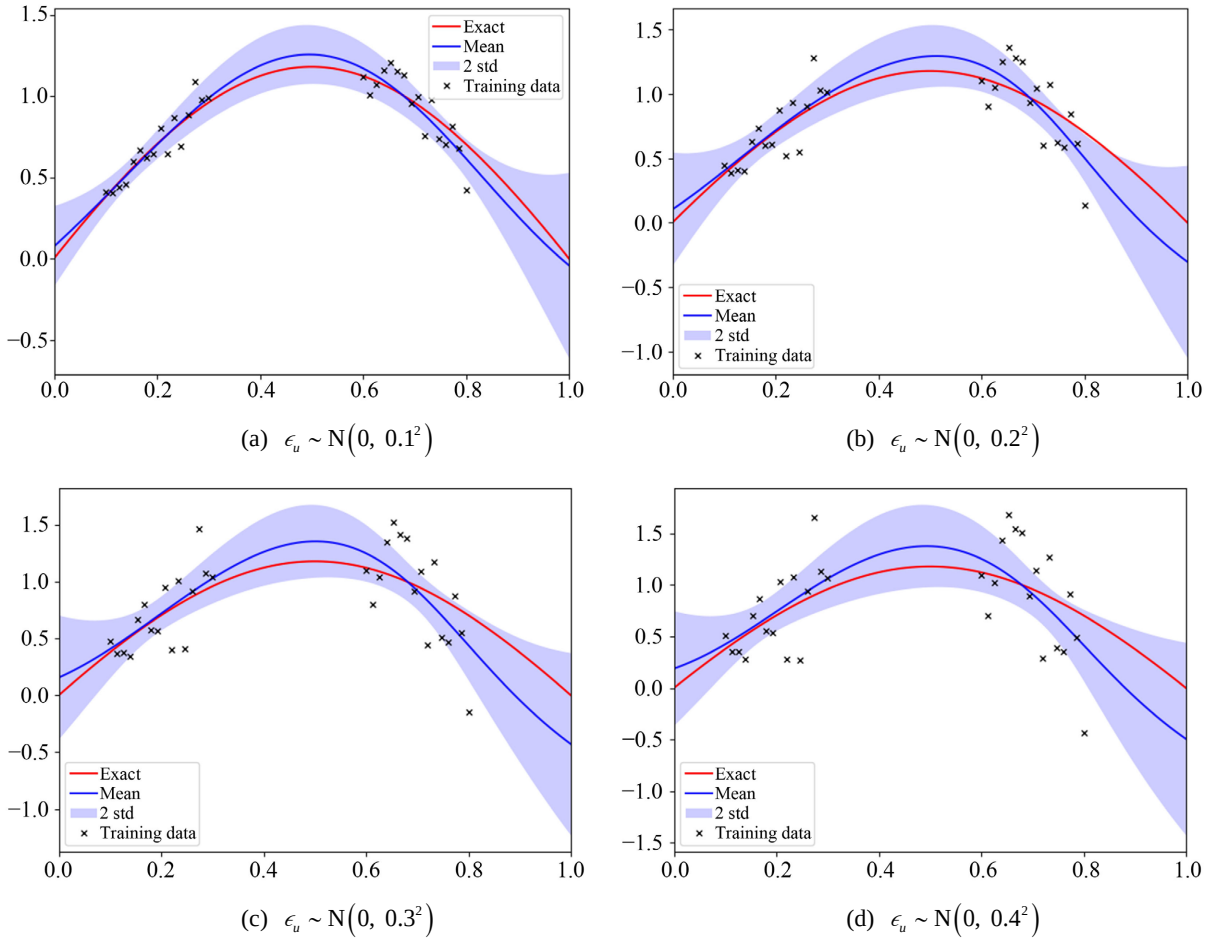


Figure 4. Bayesian Inference based on the dataset
图 4. 基于数据集的贝叶斯推断

3.2.2. 基于 Bartu 数据集和方程的贝叶斯推断

在上一节中，我们通过采样方法成功获取了数据集 D，并直接对变量 u 进行了贝叶斯推断。这种推断完全依赖于所采集的数据，而没有充分考虑传热的特性，也就是说，没有将 Bratu 方程(见公式(1))纳入考虑。现在，我们将在不增加额外检测点的前提下，结合 Bratu 方程(见公式(1))来进行贝叶斯推断。

假设贝叶斯神经网络得到的数据为 $\tilde{u}^{(i)} \coloneqq \tilde{u}^{(i)}(x,\theta)$，$i=1,\cdots,N$，则我们希望这个数据满足

$$\frac{d^2\tilde{u}^{(i)}}{dx^2}+\lambda e^{\tilde{u}^{(i)}}=0,\ i=1,\cdots,N \tag{8}$$

此时，损失函数定义为[3]-[5]

$$Loss=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2\sigma^{(i)^2}}\left(\left(\tilde{u}^{(i)}(x,\theta)-\bar{u}^{(i)}(x,\theta)\right)^2+\left(\frac{d^2\widetilde{u^{(i)}}}{dx^2}+\lambda e^{\widetilde{u^{(i)}}}\right)^2\right)$$

我们给出函数真实值，推断的均值以及二倍标准差，图形可见图 5。

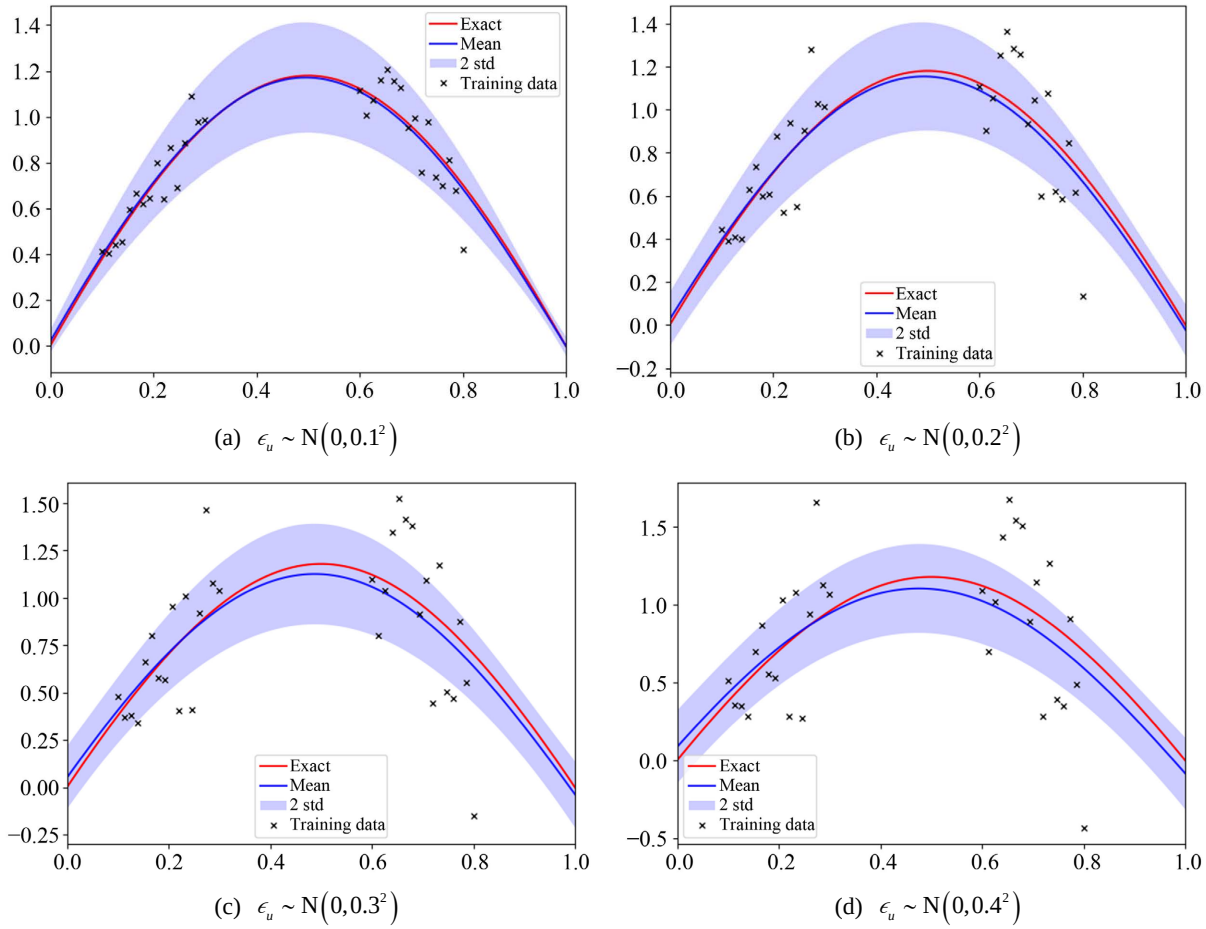


Figure 5. Bayesian Inference based on the dataset and Bratu equation
图 5. 基于数据集和 Bratu 方程的贝叶斯推断

观察图 5 可以发现，结合测试数据和 Bratu 方程进行的贝叶斯推断能够较为准确地捕捉温度变化的趋势。在导体边缘未布置测量点的区域，两端的温度偏差已经显著降低；而在数据较为集中的区域，推断结果与实际观测数据的一致性较高。通过对比图 5(a)至图 5(d)，我们注意到，随着传感器精度的降低，贝叶斯推断的不确定性范围(即带宽)变得更加宽广，这表明监测系统的可靠性有所减弱。进一步比较图 5 与图 4，我们可以看出，借助热传导模型，贝叶斯推断在预测温度分布方面能够实现更高的精确度。

4. 结论

我们的研究通过采集含有噪声的数据集，并结合热传导特性，构建了一个基于 Bartu 方程的贝叶斯神经网络模型来进行推断。数值仿真结果表明，虽然仅基于数据集的推断能够在一定程度上捕捉到一维温度分布的特征，但将热传导特性纳入考虑的贝叶斯推断能够更准确地模拟出整体的温度分布。展望未来，我们的研究方向将聚焦于：进一步优化贝叶斯神经网络算法，提高其在处理复杂热传导问题时的准确性和效率，特别是在处理高噪声数据时的表现，以及探索如何在微观和宏观尺度之间建立桥梁，实现跨尺度的热传导模拟，以更全面地理解和预测材料在不同尺度下的行为。通过这些研究方向的深入探索，我

们期望能够进一步提升贝叶斯推断在热传导分析中的应用潜力，为相关领域的研究和工程实践提供更有力的支持。我们相信，通过不断的技术创新和跨学科合作，我们能够开发出更高效、更精确的热传导模拟工具，为能源、材料科学、航空航天等领域的发展做出重要贡献。

致　谢

感谢张立溥教授的指导和鼓励。

参考文献

[1] Mohsen, A. (2014) A Simple Solution of the Bratu Problem. *Computers & Mathematics with Applications*, **67**, 26-33.

[2] Yun, B. (2011) Solving Nonlinear Equations by a New Derivative-Free Iterative Method. *Applied Mathematics and Computation*, **217**, 5768-5773.

[3] Chung, K.L. and Erdös, P. (1952) On the Application of the Borel-Cantelli Lemma. *Transactions of the American Mathematical Society*, **72**, 179.

[4] de Jong, A.J. (1992) Moduli of Abelian Varieties and Dieudonné Modules of Finite Group Schemes. PhD Thesis, University of Utrecht.

[5] Kôsaku, Y. (1980) Functional Analysis. 6th Ed., Springer-Verlag, 132-136.