

基于贝叶斯推断的畸形波重构及其不确定性量化研究

庄晓悦¹, 苗小雨^{1,2*}, 谢蕊冰¹

¹浙江传媒学院媒体工程学院, 浙江 杭州

²全省影视媒体技术研究重点实验室, 浙江 杭州

收稿日期: 2025年10月26日; 录用日期: 2025年11月19日; 发布日期: 2025年11月25日

摘要

畸形波(Rogue Wave)作为一种极端海洋现象, 因其突发性与巨大破坏力, 已成为海洋学与非线性物理领域的关键研究对象。尽管已有大量研究, 其生成机制仍存在争议。现有重构方法在参数估计精度与完备性方面均显不足。本文提出一种基于贝叶斯推断的畸形波重构框架: 通过解析波场的非线性相互作用, 将动力学机制与统计规律耦合, 不仅给出参数的点估计, 同时量化其不确定性。核心步骤包括: 对未知参数赋予无信息均匀先验, 构建观测数据的似然函数, 并采用马尔可夫链蒙特卡洛(MCMC)算法逼近后验分布。实验结果表明, 所提方法可在强噪声背景下准确恢复畸形波特征, 为海洋灾害预警、等离子体实验优化及光电器件设计提供可靠工具。

关键词

畸形波, 重构, 贝叶斯推论, 后验分布

Rogue Wave Reconstruction Based on Bayesian Inference and Uncertainty Quantification

Xiaoyue Zhuang¹, Xiaoyu Miao^{1,2*}, Ruibing Xie¹

¹College of Media Engineering, Communication University of Zhejiang, Hangzhou Zhejiang

²Zhejiang Key Laboratory of Film and TV Media Technology, Hangzhou Zhejiang

Received: October 26, 2025; accepted: November 19, 2025; published: November 25, 2025

*通讯作者。

文章引用: 庄晓悦, 苗小雨, 谢蕊冰. 基于贝叶斯推断的畸形波重构及其不确定性量化研究[J]. 现代物理, 2025, 15(5): 43-52. DOI: 10.12677/mp.2025.155006

Abstract

Rogue waves, as extreme marine phenomena, represent a critical research focus in oceanography and nonlinear physics due to their sudden occurrence and immense destructive potential. Despite extensive research, the formation mechanisms of rogue waves remain debated. Traditional reconstruction methods exhibit limitations in both the accuracy of parameter estimation and comprehensiveness. This study proposes an innovative rogue wave reconstruction framework based on Bayesian inference. By analyzing the nonlinear interactions of wave fields and integrating dynamical mechanisms with statistical patterns, our approach not only generates point estimates of parameters but also quantifies their associated uncertainties. Key steps include defining parameters with uniform prior distributions, constructing likelihood functions for observed data, and applying Markov Chain Monte Carlo (MCMC) for posterior distribution approximation. Experimental results demonstrate that the proposed method can effectively recover rogue wave characteristics from noisy data, offering a valuable tool for ocean disaster early warning, plasma experiment optimization, and optical device design.

Keywords

Rogue Wave, Reconstruction, Bayesian Inference, Posterior Distribution

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在极端海洋现象研究中, 畸形波(Rogue Wave)因其惊人的破坏力, 一直是海洋学与非线性物理学的核心议题。这类反常波以突发性强、峰值远高于周边波群而著称。尽管其存续时间极短, 却凭借巨大能量对海洋工程设施和航行安全构成重大威胁。早在 19 世纪已有零星的畸形波目击记录, 但直到 1995 年北海 Draupner E 平台记录到一次极端事件——波谷深度达 25 米、峰高逾 60 米——学术界才正式启动对该现象生成与演化机制的系统性研究[1]-[3]。

随着研究的深入, 畸形波作为极端现象的共性特征已在多个学科中逐步显现[4]。这类源于海洋学的瞬态极端波, 在非线性光学与等离子体物理等领域展现出显著的跨学科相似性。例如, 在非线性光学中, 光场中突发的超高强度超短脉冲已被证实与海洋畸形波具有相同的调制不稳定性起源[5]。在光纤传输过程中, 一种与海浪类似的能量聚焦机制可引发脉冲幅度的异常增长, 进而在光域内形成“光畸形波”现象。基于非线性薛定谔方程(NLSE)的理论框架, 不仅能够精确刻画光畸形波的时空演化特性, 还推动了抗极端干扰光纤器件的发展, 显著提升了高速通信系统的稳定性[6]。

回归海洋学研究的本源, 针对各异水深条件所构建的基于方程的模型(如非线性薛定谔方程)已揭示畸形波生成的物理本质。通过解析波场内部的非线性相互作用, 这类模型可定量刻画受浅海底地形影响所致的波形畸变机制, 以及深海环境中随机波之间的能量耦合模式。此外, 统计研究的突破性进展表明, 畸形波发生概率与波谱特性之间存在内在关联: 当海浪能量谱呈现特定非线性分布时, 极端波高事件的概率呈指数级增长[7]。这种将动力学机制与统计规律相融合的研究范式, 正为构建更精准的海洋极端波预警体系奠定理论基础。

然而, 尽管研究取得显著进展, 关于畸形波生成机制的争议仍未平息。有研究指出, 调制不稳定性并非畸形波出现的唯一通道, 弱非线性随机波场的线性叠加亦可诱发其发生[8]。实验观测进一步表明,

在某些场景下,非线性相互作用与非高斯统计特性对畸形波的形成具有决定性影响[7]。此外,精确重构畸形波对海洋灾害预警、等离子体实验优化及新型光子器件设计至关重要。传统重构方法主要聚焦数据驱动的波形恢复,可归纳为物理模型优化与信号处理创新两大路径[9] [10],然而在参数估计的完备性与精度方面仍显不足。

贝叶斯推断近期在波动物理模型不确定性处理中展现出显著优势,为极端事件分析提供了新的可能[11][12]。该方法将含噪点估计下的孤子重构推进为“物理-环境”耦合的概率反演框架,不仅输出最可能波形,同时量化由未知海洋或光纤条件引入的不确定性,从而构建起一套适用于跨尺度孤子研究的通用方法论。

鉴于当前的研究进展与实际需求,我们提出一种基于贝叶斯推断的畸形波重构框架。该方法通过分析含扰动的畸形波解数据,并融合贝叶斯技术,不仅实现了参数重估计,同时提供点估计及参数不确定性量化,相较于传统方法可为畸形波重构提供更全面、可靠的信息。

本文结构安排如下:第1节阐述畸形波重构的研究背景、方法体系与面临的挑战;第2节详细介绍一类特定的畸形波解,为后续分析奠定理论基础;第3节深入探讨用于畸形波重构的贝叶斯推断方法;第4节展示贝叶斯推断在畸形波重构中的实验结果,并进行全面分析与讨论;第5节总结研究成果,并展望未来的研究方向。

2. 畸形波及其波形

本节提出一种 $(2+1)$ 维畸形波数学模型,其波函数 $u(x, y, z)$ 用振幅与相位的乘积形式表示:

$$u(x, y, z) = A(x, y, z) \exp[i\phi(x, y, z)] \quad (1)$$

振幅 $A(x, y, z)$ 与相位 $\phi(x, y, z)$ 分别由下式给出:

$$A(x, y, z) = w_0 \sqrt{1 + 4\zeta_0 y + \alpha z^2} \cdot \left| \frac{1 - 4(1 + 4i\gamma(x - \beta_0 y - s_0 y^2))}{1 + 4(x - \beta_0 y - s_0 y^2)^2 + 4\gamma^2 y^2} \right|$$

$$\phi(x, y, z) = \phi_0 y + \beta z$$

其中, w_0 决定波的初始宽度与振幅; γ 调控传播方向及特性; β_0 影响 y -方向相位变化与传播速度; s_0 关联 y -方向空间调制; ζ_0 掌控时间调制; ϕ_0 影响 y -方向相移; α 与 β 共同控制振幅与相位的时间演化。上述参数联合刻画了畸形波的初始形态及其随时间的演化规律,通过调节这些参数,即可生成不同类型的畸形波。

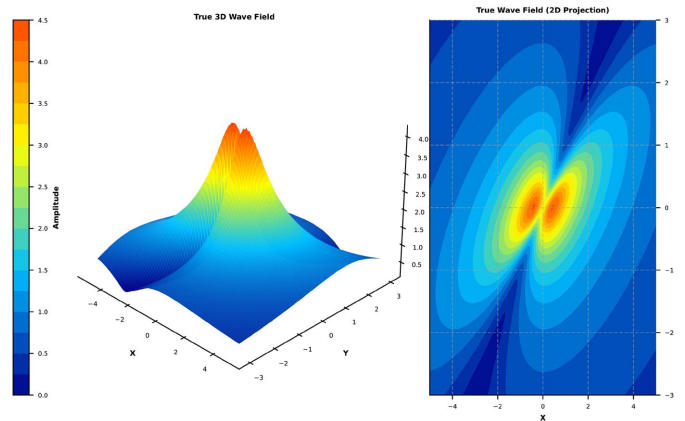


Figure 1. The rogue wave field for $w_0 = 1$, $\gamma = 1$, $\beta_0 = 1$, $s_0 = 0$, $\zeta_0 = 0$, $\phi_0 = 0$

图 1. $w_0 = 1$, $\gamma = 1$, $\beta_0 = 1$, $s_0 = 0$, $\zeta_0 = 0$, $\phi_0 = 0$ 的畸形波场图

令 $z=0$ ，将模型简化为初始状态，从而更清晰地审视畸形波的初始形貌与特征。通过系统调节参数，可激发线状畸形波、离散局域畸形波等多种波形，这些参数共同决定了波的初始形态及其随后的时空演化过程。

进一步，我们取定一组参数： $w_0=1$ ， $\gamma=1$ ， $\beta_0=1$ ， $s_0=0$ ， $\zeta_0=0$ ， $\phi_0=0$ ，构造出一条具体的畸形波剖面。图 1 给出了该畸形波在 $z=0$ 平面上的波形分布，基于该波形提取的数据将作为后续贝叶斯反演分析的基础。接下来，我们从图 1 中提取均匀分布的数据集，并对受扰动数据集进行贝叶斯推断分析。最终利用参数后验均值重构出畸形波波形。

3. 基于贝叶斯推断的畸形波重构

贝叶斯推断以贝叶斯定理为核心，通过将先验分布与观测数据的似然函数相融合，推导出参数的后验分布。本文旨在利用包括先验知识与经验观测在内的全部可用信息，对参数进行更精确的刻画。

3.1. 贝叶斯推断理论基础

贝叶斯推断运用贝叶斯定理将先验知识与观测数据相融合，实现对参数的概率化估计。该定理的数学表达式为：

$$p(\theta|D) = \frac{p(D|\theta)p(\theta)}{p(D)}$$

这里， $p(\theta|D)$ 表示后验概率，反映在给定观测数据 D 的条件下参数 θ 的概率分布； $p(D|\theta)$ 为似然函数，表示在给定参数 θ 时观测到数据 D 的概率； $p(\theta)$ 为先验概率，反映获取数据前对 θ 的认知； $p(D)$ 是边际似然，在贝叶斯框架中作为归一化常数，确保后验概率的有效性。由于 $p(D)$ 与参数 θ 无关，在实际计算中常被省略，由此得到比例关系式：

$$p(\theta|D) \propto p(D|\theta)p(\theta)$$

由此可见，后验概率与似然函数和先验概率的乘积成正比，清晰展示了贝叶斯推断中数据驱动的参数更新机制。

3.2. 基于贝叶斯方法的畸形波重构模型构建

下面给出基于方程(1)的贝叶斯模型构建步骤。

3.2.1. 参数定义与先验分布

● 在畸形波重构中，目标参数 θ 包括控制波幅、空间分布、非线性结构与相位特征的关键量 $\{w_0, \gamma, \beta_0, s_0, \zeta_0, \phi_0\}$ 。为引入先验知识，我们为每个参数指定先验分布。由于缺乏显著的先验信息，统一采用均匀分布作为先验：

$$w_0, \gamma, \beta_0, s_0, \zeta_0, \phi_0 \sim \text{Uniform}(\cdot)$$

● 假设每个参数在指定区间内具有相等的概率。

3.2.2. 似然函数构建

● 令 D_n 表示含噪声的观测数据， p_θ 表示模型的预测结果。似然函数 $p(D_n|\theta)$ 描述了在参数 θ 下获得观测数据 D_n 的概率，其表达式为：

$$p(D_n|\theta) = \prod_{i,j} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(D_{n_{ij}} - D_{\theta_{ij}})^2}{2\sigma^2}\right)$$

● 这里, $D_{n_{ij}}$ 是函数噪声观测数据 D_n 的一个元素, i 和 j 为数据索引; 参数向量 θ 包含 $w_0, \gamma, \beta_0, s_0, \zeta_0, \phi_0$ 。基于 θ , 模型在位置 (i, j) 处的预测值记为 $D_{\theta_{ij}}$, 对应于观测值 $D_{n_{ij}}$ 来评估模型预测与实际观测之间的差异。噪声方差 σ^2 用于量化噪声离散程度。 $\prod_{i,j}$ 表示对所有 i 和 j 求乘积, 表示二维观测数据集 D_n 的整体似然值。归一化常数 $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$ 确保概率密度函数的积分等于 1, 而 $\exp\left(-\frac{(D_{n_{ij}} - D_{\theta_{ij}})^2}{2\sigma^2}\right)$

则反映了观测值与预测值之间的差异对概率的影响程度。

● 为简化计算, 我们通过对似然函数 $\ell(\theta)$ 取对数, 引入对数似然函数:

$$\ell(\theta) = \log p(D_n | \theta) = -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i,j} (D_{n_{ij}} - D_{\theta_{ij}})^2 - \frac{N}{2} \log(2\pi\sigma^2)$$

● 这里 N 表示数据点总数(二维数据集, 满足 $N = i \times j$)。由于常数 $-\frac{N}{2} \log(2\pi\sigma^2)$ 不影响参数估计, 对数似然函数可简化为:

$$\ell(\theta) = -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i,j} (D_{n_{ij}} - D_{\theta_{ij}})^2$$

3.2.3. 后验分布计算

● 通过将先验分布与似然函数相结合, 计算出参数的后验分布:

$$p(\theta | D_n) \propto p(D_n | \theta) p(\theta)$$

● 在实际应用中, 由于 $p(D_n | \theta)$ 与 $p(\theta)$ 的复杂性, 后验分布往往难以直接求解。因此, 我们采用马尔可夫链蒙特卡罗(MCMC)方法对后验分布进行近似估计。MCMC 通过构建马尔可夫链生成参数 θ 的样本, 从而估计后验分布的统计特性。

3.3. MCMC 采样

首先概述采样步骤的具体步骤, 随后介绍采样近似方法。

3.3.1. MCMC 采样步骤

● 初始化: 为参数 θ 选取初始值 $\theta^{(0)}$, 启动马尔可夫链。

● 建议步骤: 在第 t 次迭代中, 从建议分布 $q(\theta' | \theta^{(t)})$ 中生成一个建议参数 θ' 。常见的选择是以当前参数为中心的高斯分布 $\theta' \sim q(\theta' | \theta^{(t)}) = \mathcal{N}(\theta^{(t)}, \Sigma)$, 其中 Σ 为协方差矩阵, 用于控制参数更新的步长与方向。

● 接受步骤: 计算接受概率 α

$$\alpha = \min\left(1, \frac{p(D_n | \theta') p(\theta')}{p(D_n | \theta^{(t)}) p(\theta^{(t)})}\right)$$

生成一个在区间 $[0, 1]$ 上均匀分布的随机数 u 。如果 $u < \alpha$, 接受建议参数 θ' 作为下一状态 $\theta^{(t+1)}$; 否则保持当前状态, 即 $\theta^{(t+1)} = \theta^{(t)}$ 。

● 迭代: 重复上述步骤直至达到预设采样数 N , 生成样本序列 $\{\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots, \theta^{(N)}\}$ 。

3.3.2. MCMC 采样近似

在实际应用中, 通常采用 MCMC 方法从后验分布 $p(\theta | D_n)$ 中生成样本 $\{\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots, \theta^{(s)}\}$, 随后利用

这些样本计算后验预测分布：

$$p(D_{new} | D_n) \approx \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S p(D_{new} | \theta^{(s)})$$

具体通过以下步骤实现：

- 从后验分布 $p(\theta | D_n)$ 中抽取 S 个样本 $\theta^{(s)}$ 。
- 对每个样本 $\theta^{(s)}$ ，计算新观测值 D_{new} 的似然度 $p(D_{new} | \theta^{(s)})$ 。
- 对所有样本的似然度取平均，以近似后验预测分布。

通过该贝叶斯推论框架，本研究实现了畸形波参数的概率重构。我们不仅获得了最优参数估计，还通过后验分布量化了参数的不确定性，为深入研究畸形波特性提供了坚实的理论基础。

4. 结果分析与讨论

在对图 1 所示观测数据的分析中，各参数的先验分布及建议分布的初始值设置如下表 1。

Table 1. Model parameters' prior distributions and proposal initial values
表 1. 模型参数的先验分布与建议初始值

参数	先验分布	建议初始值	参数	先验分布	建议初始值
w_0	$U(0.5, 1.5)$	1.0	s_0	$U(-0.1, 0.1)$	0.02
γ	$U(0.5, 1.5)$	0.95	ζ_0	$U(-0.1, 0.1)$	0.01
β_0	$U(0.8, 1.2)$	1.05	ϕ_0	$U(-0.2, 0.2)$	0.01

所有参数均采用均匀先验分布 U ，建议分布初始化为以给定值为中心的高斯分布。

以下研究展示了在扰动 $\sigma = 0.1$ 条件下的贝叶斯推理结果。

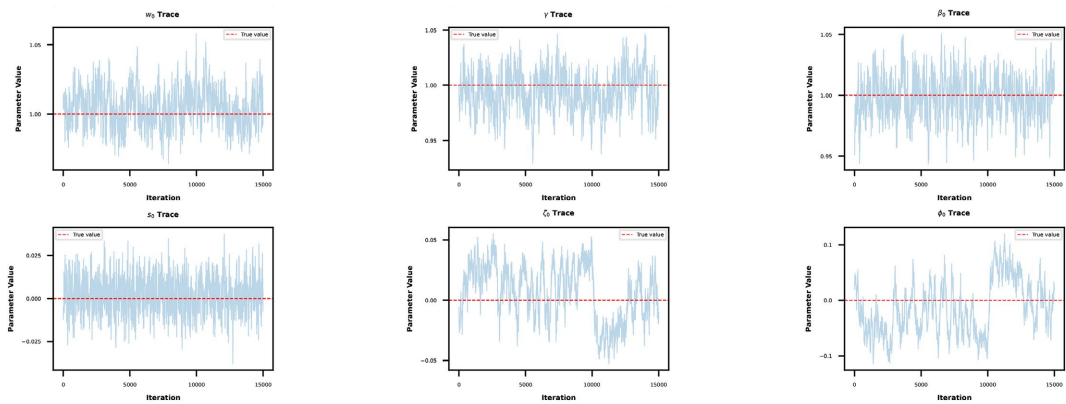


Figure 2. MCMC parameter trajectories for $\sigma = 0.1$
图 2. $\sigma = 0.1$ 的 MCMC 参数轨迹

图 2 展示了 6 个参数的 MCMC 采样轨迹。横轴表示迭代次数，纵轴表示参数取值。每个子图中，蓝色线条描绘了参数值随迭代次数的变化过程，红色虚线标识了真实参数值。轨迹曲线在初始阶段呈现出波动特征，但随着迭代次数的增加逐渐稳定在真实值附近。这表明 MCMC 采样过程随着迭代次数的增加而收敛。

图 3 展示了模型在两个不同空间位置的拟合效果。左图显示的是在 $x = 0.1, y = 0.0$ 处的拟合情况，右图则对应 $x = 2.1, y = -1.2$ 。图中黑色散点表示带有噪声的观测数据，蓝色曲线代表真实值，红色曲线显

示预测均值，灰色阴影区域表征预测不确定性区间。预测均值曲线在两个位置均与真实信号轮廓高度吻合，且大部分数据点都落在不确定性范围内，这表明模型具有优异的拟合能力和可靠的预测性能。

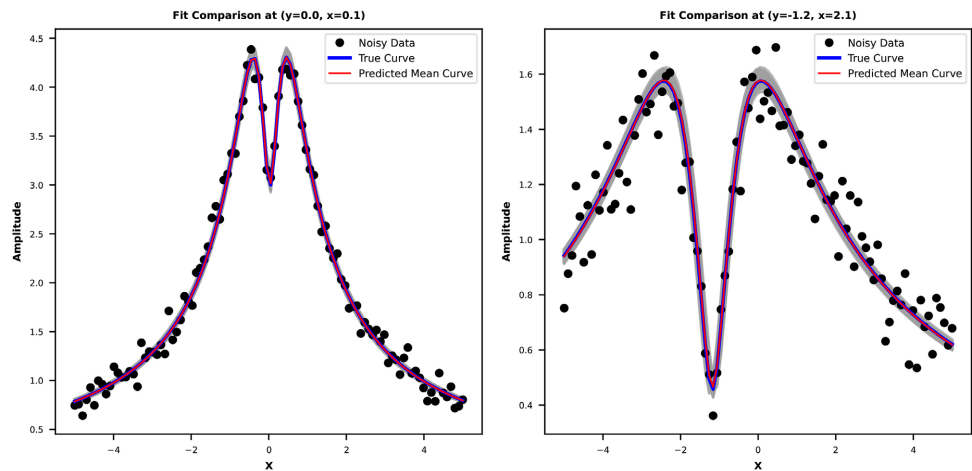


Figure 3. Model fit at two positions
图 3. 两个不同空间位置上的模型拟合

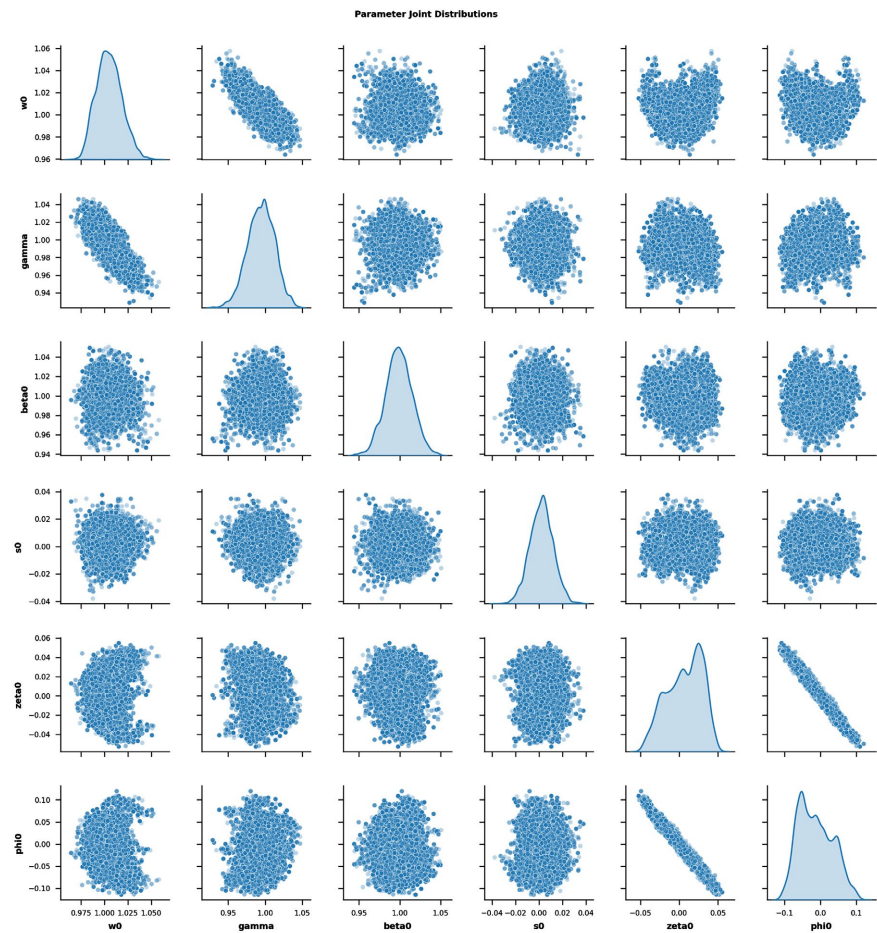


Figure 4. Parameter joint and marginal distributions
图 4. 参数联合分布与边缘分布

图 4 展示了 6 个参数的联合分布与边缘分布。对角子图为各参数的一维核密度估计，非对角子图为参数对的二维散点图。可以观察到 w_0 与 γ 、 ϕ_0 与 ζ_0 之间存在显著的负相关性，这体现在散点呈现明显的下降趋势。其他参数对则表现出无明确线性关系的分散分布，表明参数间相互依赖性较弱。

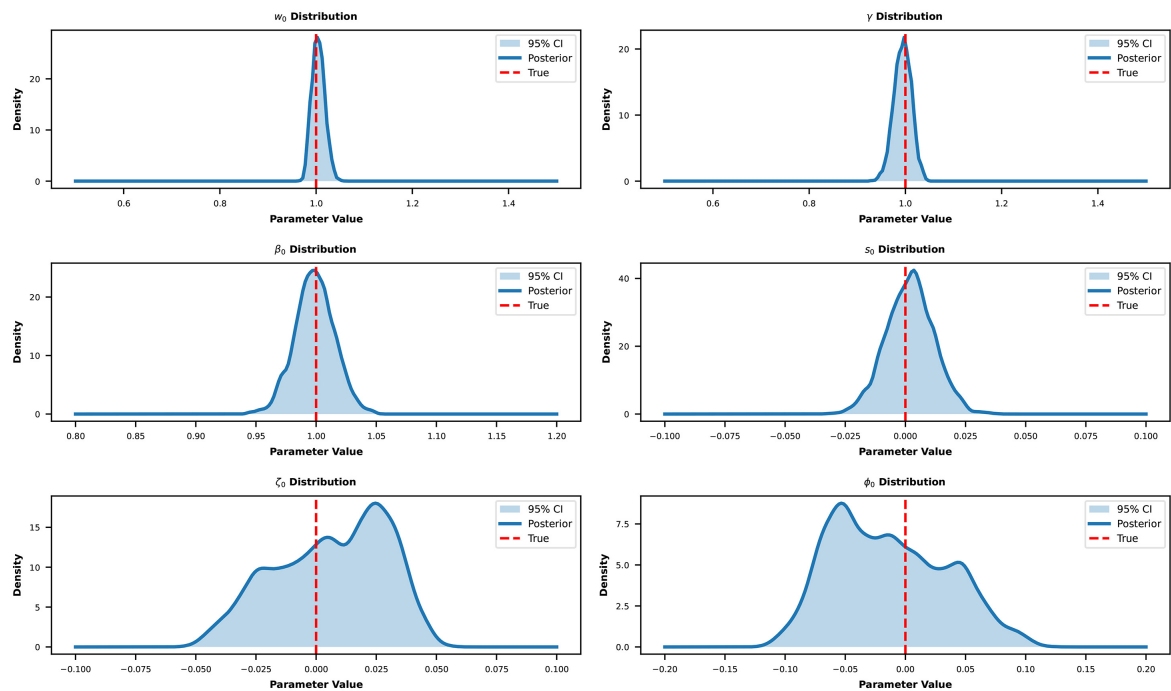


Figure 5. Posterior density estimates with 95% CIs
图 5. 含 95%置信区间的后验密度估计

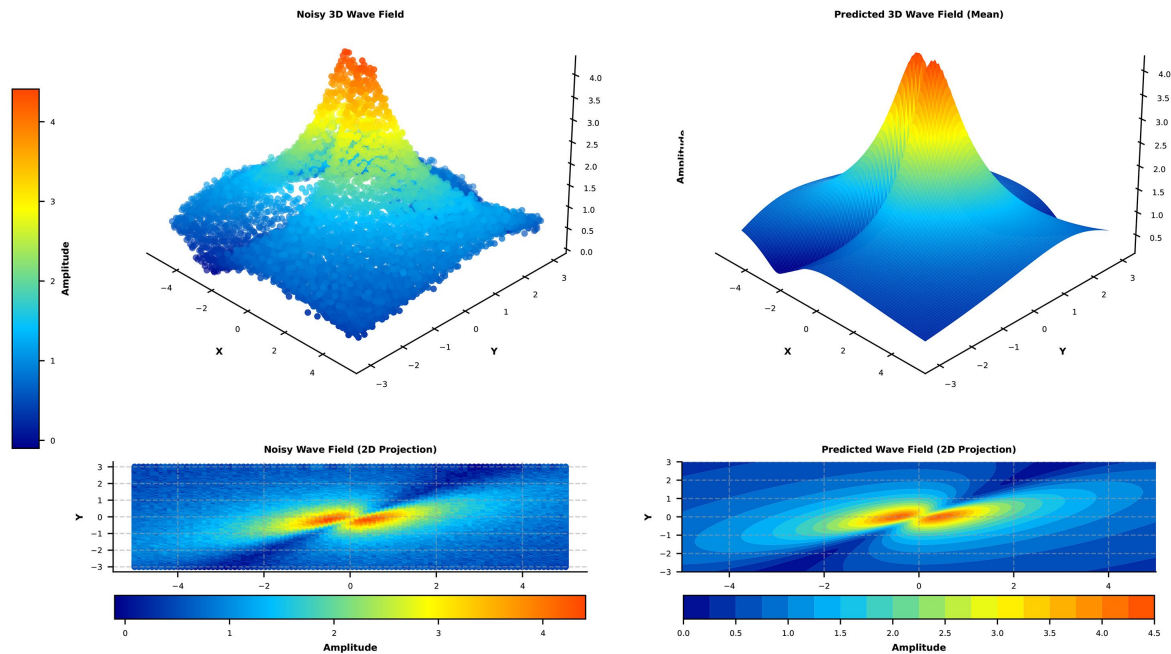


Figure 6. Noisy data and 3D wavefield reconstruction
图 6. 含噪声数据及三维波场重建

图 5 展示了各参数的后验密度估计及 95%置信区间。参数 w_0 与 γ 呈现出以真实值为中心的尖锐单峰密度分布,表明后验估计具有较高的精确性和准确性。虽然 β_0 的密度分布略宽,但其峰值仍接近真实值,反映出可接受的估计精度。 s_0 对称集中于零附近,偏差极小。相比之下, ζ_0 和 ϕ_0 的密度分布范围较宽且偏离零点,表明这两个参数的估计不确定性较高。整体结果凸显了参数恢复的准确性,且不确定性在可控范围内。

图 6 展示了畸形波场数据集的贝叶斯推断结果。左侧子图(三维散点图与二维平面图)呈现了含噪声观测值的空间分布,清晰捕捉到其在三维空间及二维平面中的形态特征。右侧子图(三维曲面图与二维平面图)显示了基于 MCMC 样本的预测波场均值。这些可视化结果证实,贝叶斯方法能够有效消除数据噪声,并高保真地重建真实波场特性。

Table 2. Parameter estimation results under $\sigma = 0.1$
表 2. 当 $\sigma = 0.1$ 时参数估计结果

参数	真实值	估计均值	估计标准差	置信区间下限	置信区间上限
w_0	1.0	1.00486	0.01350	0.98110	1.03254
γ	1.0	0.99422	0.01803	0.95773	1.02866
β_0	1.0	0.99869	0.01648	0.96680	1.03144
s_0	0.0	0.00191	0.00989	-0.01773	0.02156
ζ_0	0.0	0.00654	0.02284	-0.03864	0.04199
ϕ_0	0.0	-0.01396	0.04726	-0.08886	0.07938

表 2 对比了参数真实值与 $\sigma = 0.1$ 条件下的贝叶斯估计结果。参数估计均值与真实值高度吻合,表明估计准确性良好;绝大多数置信区间均覆盖真实值,进一步验证了估计的可靠性。其中,参数 w_0 、 γ 、 β_0 和 s_0 的标准差较低,表明估计精度较高。而 ζ_0 和 ϕ_0 的变异性略高,反映出较高的不确定性。总体而言,结果充分证实了所提出的贝叶斯方法在不同精度要求下估计模型参数的有效性。

5. 总结

本文提出了用于畸形波重构的贝叶斯推理框架,通过融合先验知识与观测数据实现了有效的参数估计。研究结果表明,该方法能够从含噪声数据集中准确提取畸形波的关键特征,为海洋灾害预警、等离子体实验优化与先进光学器件设计等应用提供了新思路。后续研究将着重于模型优化以提升对不确定性参数的估计精度,并探索贝叶斯推理在更复杂实际场景中的应用。

基金项目

本文为浙江传媒学院青年教师提升计划项目成果,由全省影视媒体技术研究重点实验室(2024E10023)资助。

参考文献

[1] Nikolkina, I. and Didenkulova, I. (2011) Rogue Waves in 2006-2010. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, **11**, 2913-2924. <https://doi.org/10.5194/nhess-11-2913-2011>

[2] Adcock, T.A.A. and Taylor, P.H. (2014) The Physics of Anomalous (‘Rogue’) Ocean Waves. *Reports on Progress in Physics*, **77**, Article 105901. <https://doi.org/10.1088/0034-4885/77/10/105901>

[3] He, Y., Wang, J., He, J., Li, Y., Feng, X. and Chabchoub, A. (2025) Lifetime Characterisation of Extreme Wave Localisations in Crossing Seas. *Journal of Fluid Mechanics*, **1008**, A3. <https://doi.org/10.1017/jfm.2025.155>

-
- [4] Chen, S., Baronio, F., Soto-Crespo, J.M., Grelu, P. and Mihalache, D. (2017) Versatile Rogue Waves in Scalar, Vector, and Multidimensional Nonlinear Systems. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **50**, Article 463001. <https://doi.org/10.1088/1751-8121/aa8f00>
 - [5] Dudley, J.M., Genty, G., Mussot, A., Chabchoub, A. and Dias, F. (2019) Rogue Waves and Analogies in Optics and Oceanography. *Nature Reviews Physics*, **1**, 675-689. <https://doi.org/10.1038/s42254-019-0100-0>
 - [6] Mathis, A., Froehly, L., Toenger, S., Dias, F., Genty, G. and Dudley, J.M. (2015) Caustics and Rogue Waves in an Optical Sea. *Scientific Reports*, **5**, Article No. 12822. <https://doi.org/10.1038/srep12822>
 - [7] Onorato, M., Osborne, A.R., Serio, M. and Bertone, S. (2001) Freak Waves in Random Oceanic Sea States. *Physical Review Letters*, **86**, 5831-5834. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.86.5831>
 - [8] Fedele, F., Brennan, J., Ponce de León, S., Dudley, J. and Dias, F. (2016) Real World Ocean Rogue Waves Explained without the Modulational Instability. *Scientific Reports*, **6**, Article No. 27715. <https://doi.org/10.1038/srep27715>
 - [9] Fujimoto, W. and Waseda, T. (2020) Ensemble-Based Variational Method for Nonlinear Inversion of Surface Gravity Waves. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, **37**, 17-31. <https://doi.org/10.1175/jtech-d-19-0072.1>
 - [10] Ducrozet, G., Bonnefoy, F. and Ferrant, P. (2016) On the Equivalence of Unidirectional Rogue Waves Detected in Periodic Simulations and Reproduced in Numerical Wave Tanks. *Ocean Engineering*, **117**, 346-358. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2016.03.027>
 - [11] Keener, R.W. (2010) Theoretical Statistics: Topics for a Core Course. Springer, 239-277.
 - [12] Thrane, E. and Talbot, C. (2019) An Introduction to Bayesian Inference in Gravitational-Wave Astronomy: Parameter Estimation, Model Selection, and Hierarchical Models. *Publications of the Astronomical Society of Australia*, **36**, e010. <https://doi.org/10.1017/pasa.2019.2>