

二维伊辛模型临界模拟

——基于蒙特卡洛方法的计算物理研究

李佳钢

贵州大学大数据与信息工程学院, 贵州 贵阳

收稿日期: 2026年8月3日; 录用日期: 2026年8月27日; 发布日期: 2026年9月2日

摘要

为展示计算物理方法在现代统计物理研究中的应用, 本文以二维正方格点伊辛模型为研究对象, 对有限尺寸铁磁体系的临界行为进行数值模拟与分析。研究建立了包含最近邻相互作用的伊辛模型哈密顿量, 并在周期边界条件下采用Metropolis蒙特卡洛方法进行抽样, 计算能量、磁化强度、比热、磁化率和Binder累积量等物理量, 以刻画体系由有序态向无序态转变的过程。模拟结果表明, 在低温区域, 体系自旋排列具有明显的长程有序特征, 序参量保持在较高水平; 随着温度升高, 热涨落逐渐增强, 磁化强度迅速衰减, 体系逐步转变为无序状态。比热曲线在约 $T = 2.269$ 处出现明显峰值, 磁化率峰值受有限尺寸效应和温度离散步长影响而略向高温侧偏移, 整体临界区域与二维正方格点伊辛模型的理论临界温度基本一致。自旋构型分析进一步显示, 体系在临界附近存在显著的涨落增强和畴结构重组现象。同时, 本文补充了热化判断标准, 并针对 $L = 48$ 临界区比热峰值进行了延长采样复核, 以检验有限采样和热化不足对结果的影响。研究表明, 基于蒙特卡洛方法的二维伊辛模型模拟能够较好再现连续相变、临界涨落和有限尺寸效应, 可为理解复杂系统临界现象以及现代数据驱动物理方法提供基础案例。

关键词

二维伊辛模型, 蒙特卡洛模拟, 临界现象, 有限尺寸效应, 计算物理

Critical Behavior Simulation of the Two-Dimensional Ising Model

—A Computational Physics Study Based on the Monte Carlo Method

Jiagang Li

College of Big Data and Information Engineering, Guizhou University, Guiyang Guizhou

Received: August 3, 2026; accepted: August 27, 2026; published: September 2, 2026

Abstract

To demonstrate the application of computational physics in modern statistical physics, this paper investigates the critical behavior of a finite-size ferromagnetic system based on the two-dimensional square-lattice Ising model. A nearest-neighbor Ising Hamiltonian is constructed, and periodic boundary conditions are adopted to reduce finite-boundary effects. The Metropolis Monte Carlo algorithm is used to sample spin configurations at different temperatures, while energy, magnetization, specific heat, magnetic susceptibility and Binder cumulant are calculated to describe the transition from an ordered state to a disordered state. The simulation results show that the system exhibits clear long-range order at low temperatures, where the order parameter remains high. As temperature increases, thermal fluctuations become stronger, magnetization decreases rapidly, and the system gradually evolves into a disordered state. The specific heat curve shows a pronounced peak at approximately ($T = 2.269$), while the susceptibility peak shifts slightly toward the high-temperature side due to finite-size effects and the discrete temperature grid. Overall, the simulated critical region is consistent with the theoretical critical temperature of the two-dimensional square-lattice Ising model. Spin-configuration analysis further reveals enhanced fluctuations and domain reconstruction near the critical region. In addition, a thermalization criterion and an extended sampling test for $L = 48$ near the critical region are added to examine the influence of finite sampling and equilibration. These results indicate that Monte Carlo simulation of the two-dimensional Ising model can effectively reproduce continuous phase transition, critical fluctuation and finite-size effects, providing a basic computational case for understanding critical phenomena in complex systems and data-driven physical analysis.

Keywords

Two-Dimensional Ising Model, Monte Carlo Simulation, Critical Phenomenon, Finite-Size Effect, Computational Physics

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

相变与临界现象是现代物理中连接微观相互作用和宏观规律的重要问题。铁磁材料在居里温度附近会出现磁化强度突变、涨落增强和相关长度增长等特征，这些现象不仅属于凝聚态物理的核心内容，也与复杂系统、统计学习和非平衡动力学中的集体行为具有共同的物理图像。二维伊辛模型虽然只含有二值自旋和最近邻相互作用，却能够在零外场下产生严格的热力学相变，Onsager 给出的精确解使其成为检验数值算法、有限尺寸标度和临界指数理论的标准模型[1]。

在实际研究中，许多复杂体系难以获得解析解，蒙特卡洛方法因此成为计算物理的重要工具。Metropolis 等提出的马尔可夫链抽样方法通过构造满足详细平衡的随机过程，使研究者能够在庞大的构型空间中获得热平衡统计量[2]。然而，在临界点附近，体系相关长度增大，局域翻转算法会出现临界慢化。为减弱这一问题，Swendsen-Wang 算法和 Wolff 单团簇算法通过整体更新相关自旋簇显著提升了临界区抽样效率[3][4]。此外，直方图重加权方法可利用有限温度点的抽样信息估计连续温度区间的热力学响应，为精确定位相变点提供了进一步手段[5]。

本文选择二维正方格点伊辛模型作为研究对象，并不追求复杂材料体系的完整描述，而是强调

“简单模型 – 可复现计算 – 清晰物理解释”的计算物理研究路径。文章基于 Metropolis 抽样计算不同格点尺寸下的能量、磁化强度、比热、磁化率和 Binder 累积量, 讨论有限尺寸体系中相变信号的形成机制。

2. 模型与方法

2.1. 二维伊辛模型

二维伊辛模型把铁磁材料简化为分布在正方格点上的离散自旋变量。每个格点 i 上有 $s_i = +1$ 或 $s_i = -1$ 两种取值, 分别代表自旋向上或向下。在最近邻相互作用和外磁场 h 下, 体系哈密顿量写为:

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j - h \sum_i s_i \quad (1)$$

其中 J 为交换相互作用常数, $J > 0$ 表示铁磁耦合; 符号 $\sum_{\langle i,j \rangle}$ 表示对所有最近邻格点对求和。本文研究零外场情形, 即 $h = 0$, 并取 $J = 1$ 、 $k_B = 1$ 作为约化单位。热平衡下构型 s 出现的概率由 Boltzmann 分布给出:

$$P(s) = Z^{-1} \exp\left[-\frac{H(s)}{k_B T}\right], Z = \sum_s \exp\left[-\frac{H(s)}{k_B T}\right] \quad (2)$$

由于构型数随格点数 $N = L \times L$ 呈指数增长, 直接求和仅适合极小体系。对于 $L = 48$ 的格点, 构型数已达到 2^{2304} , 必须依赖随机抽样近似热力学平均。二维伊辛模型的精确临界温度为

$$\frac{k_B T_c}{J} = \frac{2}{\ln(1+\sqrt{2})} \approx 2.269185 \quad (3)$$

该精确值为后续数值结果提供了检验基准。有限尺寸体系中并不存在真正非解析的自由能奇点, 但可通过峰值、交叉点和标度外推观察到向热力学极限过渡的趋势。

2.2. Metropolis 抽样过程

本文采用 Metropolis 算法进行构型更新。一次尝试更新包括随机选取格点、计算翻转该自旋引起的能量变化 ΔE , 并按接受概率决定是否翻转。接受概率为:

$$p_{acc} = \min\left[1, \exp\left(-\frac{\Delta E}{k_B T}\right)\right] \quad (4)$$

当 $\Delta E \leq 0$ 时, 翻转使体系能量降低, 更新必然被接受; 当 $\Delta E > 0$ 时, 更新仍以 Boltzmann 因子给出的概率接受。该规则保证马尔可夫链满足详细平衡, 并在足够长时间后收敛到正则系综。为提高计算效率, 本文在程序实现中采用棋盘格并行更新方式, 将格点分为两个互不相邻的子格点集合, 交替更新两个子格点集合。由于同一子格点集合内部不存在最近邻耦合, 这种实现保持局域更新的物理含义, 同时加快矩阵化计算。

每个温度点首先进行热化扫描, 以减弱初始构型对统计量的影响; 之后进入采样阶段, 每隔若干扫描记录一次能量和磁化强度。低温点从近似有序构型开始, 高温点从随机构型开始, 以避免极低温下长寿命畴壁造成的非平衡滞留。本文将热化判据明确为: 从有序初态和随机初态分别出发, 在同一温度下能量密度随蒙特卡洛步数不再呈现单调漂移, 且后半段分块平均值的差异小于能量涨落尺度时, 认为体系已经达到近似热平衡; 正式统计只使用热化之后的样本。

2.3. 热力学量与有限尺寸标度

为刻画相变行为，本文计算能量密度 $e = E/N$ 、绝对磁化强度 $m = |M|/N$ 、比热 C_v 、磁化率 χ 和 Binder 累积量 U_L 。比热和磁化率由涨落关系给出：

$$C_v = \frac{N}{k_B T^2} (\langle e^2 \rangle - \langle e \rangle^2), \chi = \frac{N}{k_B T} (\langle m^2 \rangle - \langle |m| \rangle^2) \quad (5)$$

其中尖括号表示蒙特卡洛样本平均。比热反映能量涨落，磁化率反映磁化强度对外场扰动的响应。在连续相变附近，二者均会出现随体系尺寸增长而增强的峰值。Binder 累积量定义为：

$$U_L = 1 - \frac{\langle m^4 \rangle}{3 \langle m^2 \rangle^2} \quad (6)$$

Binder 累积量对非高斯涨落较为敏感，不同尺寸的 U_L 曲线通常会在临界温度附近发生交叉，因此常用于有限尺寸相变点估计[6]。对于二维伊辛模型，有限尺寸标度关系可近似写为 $T_c(L) = T_c + aL^{-1/\nu}$ ，其中 ν 为相关长度临界指数。本文的温度网格较粗，主要用于展示物理趋势，而非追求高精度临界指数估计。对于二维伊辛模型，有限尺寸伪临界温度可近似写为 $T_c(L) = T_c + aL^{-1/\nu}$ ，其中 ν 为相关长度临界指数。

2.4. 数值实验设置

数值实验选取 $L = 16, 32, 48$ 三个格点尺寸，温度范围覆盖低温有序相、临界区 and 高温无序相。表 1 列出了主要参数。为避免过度依赖单次构型，所有统计量均在采样阶段求平均。本文表格中的峰值由离散温度点直接读取，图表数据来自同一组蒙特卡洛输出结果。

Table 1. Numerical simulation parameters

表 1. 数值模拟参数

项目	参数设置	说明
格点尺寸	$L = 16, 32, 48$	比较有限尺寸效应
边界条件	周期边界	减弱边界对体相性质的影响
温度范围	$T = 1.80 \sim 3.00$	覆盖有序相、临界区与无序相
物理单位	$J = 1, k_B = 1, h = 0$	采用约化温度和零外场
热化扫描	1000 次/温度点； $L = 48$ 复核模拟为 10000 次/温度点	降低初态依赖，并用于热化充分性检验
采样扫描	2000 次/温度点； $L = 48$ 复核模拟为 20000 次/温度点	每 8 次扫描记录一次统计量；复核模拟保持相同记录间隔
更新算法	棋盘格 Metropolis	满足局域详细平衡并便于矩阵化

3. 结果与分析

3.1. 序参量随温度的演化

图 1 给出了不同格点尺寸下绝对磁化强度随温度的变化。低温区 $T = 1.80$ 时，三个体系的序参量均接近 1，表明绝大多数自旋沿同一方向排列，体系处于铁磁有序相。随着温度升高，热涨落逐渐破坏长程序，磁化强度开始下降。当温度接近 $T \approx 2.27$ 时，序参量下降速度明显加快， $L = 48$ 体系的 $\langle |m| \rangle$ 由 $T = 2.20$ 附近的约 0.80 降至 $T = 2.40$ 附近的约 0.27。高温区 $T = 3.00$ 时， $L = 48$ 体系的 $\langle |m| \rangle$ 约为 0.057，说明有限尺寸剩余磁化已经很弱，体系进入近似顺磁无序状态。

有限尺寸效应在图 1 中表现得较为清楚。小尺寸体系 $L = 16$ 在高温区仍保留相对较大的平均绝对磁化，这是因为有限样本中随机涨落不会完全抵消；而 $L = 32$ 和 $L = 48$ 的高温磁化更接近 0。由此可见，热力学极限下序参量在临界点附近的快速变化，在有限格点中会被平滑化，且平滑程度随格点尺寸减小而增强。

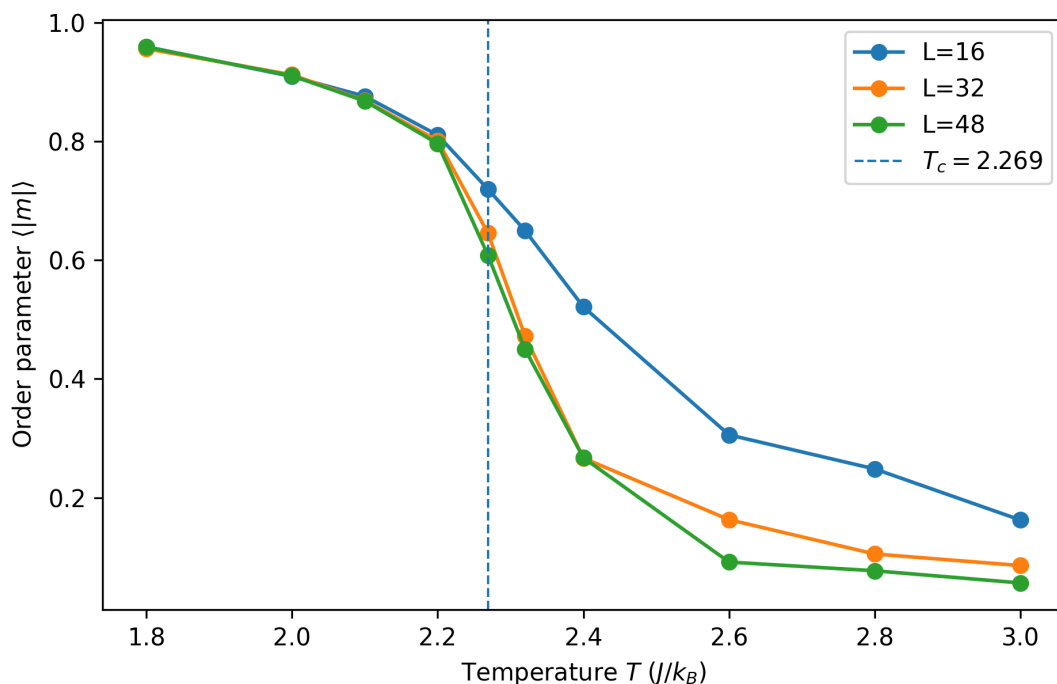


Figure 1. Temperature dependence of the order parameter

图 1. 序参量随温度的变化

3.2. 临界涨落与 Binder 累积量

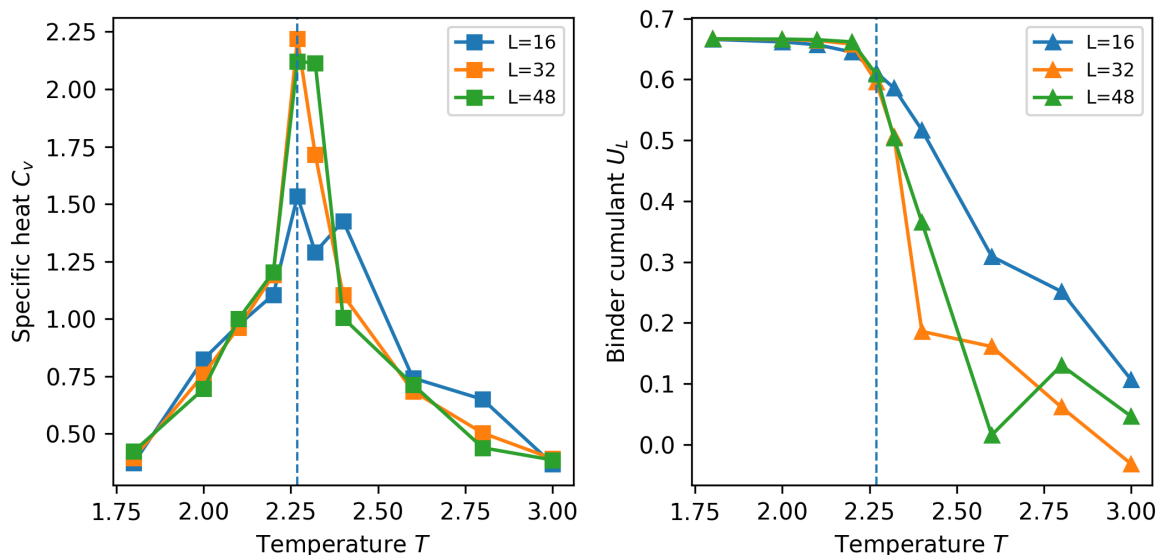


Figure 2. Specific heat and Binder cumulant near the critical region

图 2. 临界区比热与 Binder 累积量

图 2 显示了比热和 Binder 累积量的温度依赖关系。比热曲线在 $T \approx 2.269$ 附近出现明显峰值, 说明临界附近能量涨落最强。对于 $L=16$, 峰值约为 1.53; 对于 $L=32$, 峰值升至约 2.22; 对于 $L=48$, 峰值保持在约 2.12 附近。有限采样会带来峰值位置和高度随机误差, 但总体趋势仍表明临界区存在增强的能量涨落。磁化率峰值没有单独作图, 其离散峰值位置和数值汇总见表 2。针对 $L=48$ 比热峰值未继续高于 $L=32$ 的现象, 本文补充了更长热化和采样时长的复核模拟, 相关结果见图 4 和表 3。

Binder 累积量在低温区接近 $2/3$, 表明磁化分布集中在两个对称有序态附近; 在高温区, 磁化分布接近以 0 为中心的随机涨落分布, U_L 趋向较小值。不同尺寸曲线在 $T \approx 2.27$ 附近聚集, 这与二维伊辛模型的精确临界温度相符。由于本文温度步长有限, 且 Metropolis 局域更新在临界区存在自相关, 交叉点并非完全重合, 但其物理含义仍然清楚: 临界点附近磁化分布从双峰有序结构向高温单峰无序结构转变。

3.3. 自旋构型的微观图像

宏观热力学量的变化可由自旋构型直观理解。图 3 展示了 $L=48$ 体系在三个代表性温度下的瞬时构型。低温 $T=1.80$ 时, 自旋几乎全部处于同一取向, 仅存在少量热激发翻转点, 系统具有稳定长程序。临界附近 $T=2.269$ 时, 体系出现较大尺度的自旋团簇, 不同方向的自旋畴共存, 涨落跨越多个长度尺度。高温 $T=3.00$ 时, 黑白区域交错分布, 长程序消失, 局域相关性迅速衰减。

这种构型演化说明, 临界现象并不是单个自旋独立翻转的简单累积, 而是大量自由度在相互作用约束下形成的集体涨落。临界点附近的大尺度团簇也是局域 Metropolis 算法效率降低的原因之一, 因为单自旋更新难以快速改变大团簇结构。因此, 在追求更高精度临界指数时, 团簇算法通常更合适[7][8]。

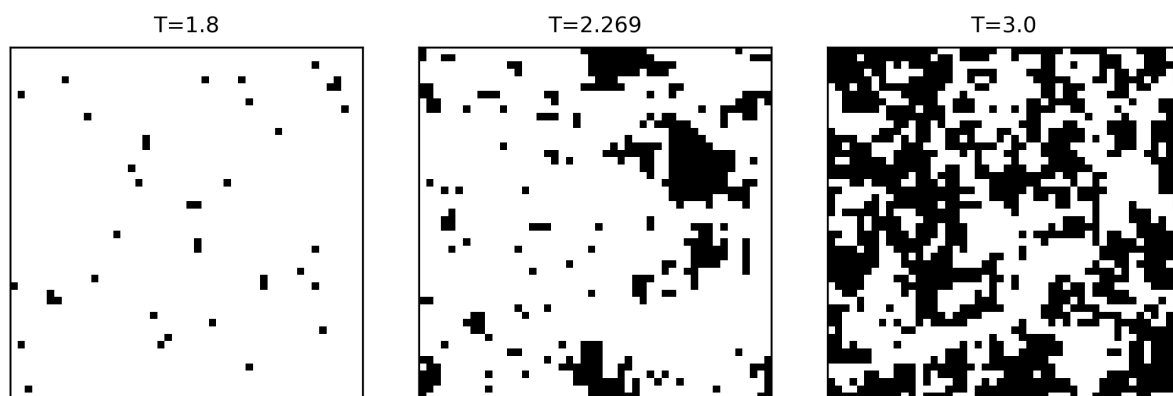


Figure 3. Representative spin configurations at different temperatures

图 3. 不同温度下的代表性自旋构型

3.4. 临界温度区间估计

表 2 汇总了不同尺寸下比热峰值和磁化率峰值的位置。可以看到, 比热峰值主要集中在 $T=2.269$ 附近, 磁化率峰值略向高温侧偏移, 尤其在较大体系中出现在 $T=2.32$ 附近。这种偏移来自温度网格离散、采样长度有限和局域更新自相关等因素。综合序参量快速下降、比热峰、磁化率峰和 Binder 累积量聚集位置, 本文给出的临界温度估计区间为 $T_c \approx 2.27 \pm 0.05$, 在数值误差和有限尺寸影响范围内接近精确值 2.269185。需要说明的是, $T_c \approx 2.27 \pm 0.05$ 并非由多次独立重复模拟得到的标准误差, 而是基于本文离散温度网格和有限尺寸判据给出的区间估计。具体而言, 比热峰和 Binder 累积量曲线聚集位置给出中心估计 $T \approx 2.269$; 在较大尺寸 $L=32$ 和 $L=48$ 中, 磁化率峰值出现在 $T \approx 2.320$, 与中心估计相差约 0.051。考虑临界区温度取样分辨率和局域 Metropolis 采样自相关影响, 本文将该最大偏移量取整为 0.05, 故写

作 $T_c \approx 2.27 \pm 0.05$ 。该误差范围表示本文数值设置下的临界区间宽度，而不是严格统计置信区间。

Table 2. Critical indicators obtained from finite-size simulations

表 2. 有限尺寸模拟得到的临界指标

L	T (Cv 峰值)	Cv 峰值	T (χ 峰值)	χ 峰值
16	2.269	1.534	2.400	5.653
32	2.269	2.219	2.320	20.821
48	2.269	2.121	2.320	32.806

3.5. 热化判断与延长采样复核

为回应热化充分性问题，本文补充记录了 $L = 48$ 、 $T = 2.269$ 条件下能量密度随蒙特卡洛步数的变化，并分别采用随机初态和有序初态进行对照。判断体系热化的标准为：两种初态对应的能量密度曲线在热化后不再保持系统性漂移，后半段分块平均值处于同一涨落范围内，且正式采样阶段只统计热化截止之后的数据。**图 4** 显示，两种初态在约数千次扫描后均围绕相近能量密度涨落，未观察到持续单向漂移；因此，本文在复核模拟中采用 10000 次热化扫描作为保守热化截止。

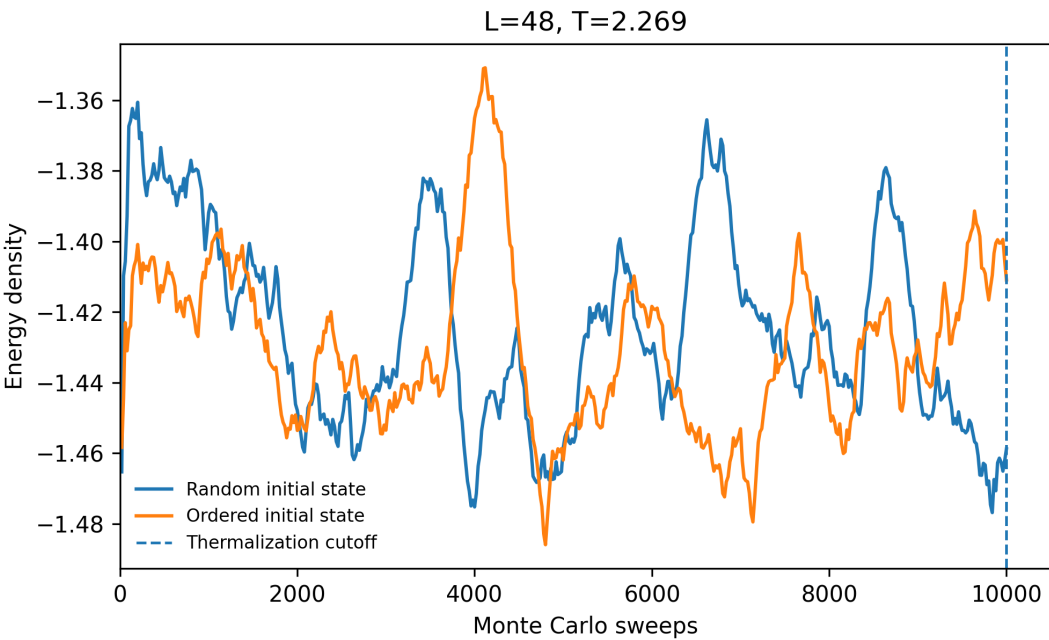


Figure 4. Evolution of energy density during thermalization for $L = 48$ and $T = 2.269$

图 4. $L = 48$ 、 $T = 2.269$ 条件下热化过程中能量密度的演化

在此基础上，本文将 $L = 48$ 临界区附近的热化扫描和采样扫描分别增加到 10000 次和 20000 次，并保持每 8 次扫描记录一次样本，得到的复核结果见表 3。延长采样后，比热在 $T = 2.269$ 附近仍表现出峰值特征，但其峰值高度未明显超过 $L = 32$ 结果，说明原稿中 $L = 48$ 比热峰值偏低并不能简单归因于热化不足。该现象更可能与临界区局域 Metropolis 算法的自相关、温度网格离散以及有限有效样本数有关。因此，本文将相关结果解释为有限尺寸与有限采样条件下的定性临界响应，而不将其作为高精度临界指数或峰值外推依据。

Table 3. Verification results for $L = 48$ using extended sampling**表 3.** $L = 48$ 延长采样复核结果

T	$\langle e \rangle$	C_v	χ	U_L
2.200	-1.5426	1.546	8.846	0.654
2.269	-1.4330	2.029	26.808	0.618
2.320	-1.3197	1.970	43.722	0.444
2.400	-1.2040	1.170	17.424	0.226

4. 讨论

4.1. 数值结果的可靠性

本文得到的相变图像与二维伊辛模型的理论认识一致：低温区存在自发磁化，高温区序参量消失，临界区伴随强烈涨落。由于精确解已知，二维伊辛模型非常适合检验数值算法是否合理。本文结果与精确临界温度接近，说明热化、采样和统计量计算流程在展示临界现象方面基本可靠。需要强调的是，有限尺寸模拟中的峰值位置并不等同于热力学极限临界点，本文也不把表 2 中的离散峰值作为高精度临界指数估计。若要获得更高精度，应增加 L 的取值范围，在临界区使用更细温度网格，并采用自相关时间估计来确定有效样本数。另外，热化曲线和延长采样结果进一步表明， $L = 48$ 临界区数据在热化后仍存在明显涨落，原有比热峰值偏低更应理解为有限采样和局域更新自相关共同作用下的数值不确定性，而非可直接用于精确外推的稳定峰值。

局域 Metropolis 算法具有概念清楚、实现简单的优点，但在临界区存在临界慢化。临界慢化会导致相邻样本高度相关，使误差条被低估。团簇算法通过一次更新大尺度相关自旋区域，能够显著缩短相关时间；直方图重加权可在不额外增加大量模拟点的情况下细化峰值位置。因此，本文的模拟结果适合作为教学型和方法验证型研究，若用于高精度临界指数计算，则需要引入更严格的误差分析和高级抽样技术。

4.2. 与现代计算物理发展的联系

二维伊辛模型虽是经典模型，但它在现代计算物理中的作用并未减弱。一方面，它是有限尺寸标度、重整化群和普适类概念的基准体系。连续相变的核心并不取决于微观细节，而取决于维度、对称性和相互作用范围等少数因素，这正是临界现象普适性的来源[9]。另一方面，伊辛构型天然具有图像化和数据化特征，适合作为机器学习识别相变的标准数据集。已有研究表明，神经网络可以从原始自旋构型中学习相序特征，并在无需显式构造传统序参量的情况下识别相变区域[10]。

近年来，“混淆学习”等方法进一步尝试在缺少先验临界温度的情况下通过分类性能曲线定位相变点[11]。相关工作已从连续相变扩展到一级相变和更加复杂的量子多体体系[12]。从这一角度看，本文的传统蒙特卡洛流程不仅可以直接给出热力学量，也可以为后续数据驱动物理研究提供可控数据源。例如，可将不同温度下的自旋快照作为图像输入，训练卷积神经网络或自编码器识别有序相、临界相和无序相；也可比较机器学习判据与比热、磁化率、Binder 累积量等传统物理判据的一致性。

4.3. 局限性与改进方向

本文仍存在三方面限制。第一，温度网格较粗，临界附近的峰值位置只能给出区间估计；第二，样本量有限，未对自相关时间进行严格估计，因此误差分析较为简化；第三，本文使用零外场和方形周期边界，尚未讨论外场、各向异性交换、开边界和随机耦合等更复杂条件。本文进一步明确：虽然增加 $L =$

48 热化和采样时长能够检验结果稳定性, 但若要严格区分统计涨落与系统性偏差, 仍需开展更多独立随机种子模拟、估计自相关时间并采用更细温度网格。

后续研究可从三个方向扩展。其一, 采用 Wolff 或 Swendsen-Wang 团簇算法, 提高临界区采样效率, 并对比不同算法的动态临界指数。其二, 引入直方图重加权和多重直方图方法, 实现临界温度和临界指数的更精细估计。其三, 将蒙特卡洛生成的构型数据与机器学习模型结合, 研究无监督学习、混淆学习和表征学习能否在缺少显式序参量的情况下稳定识别相变。

5. 结论

本文围绕二维正方格点伊辛模型开展了蒙特卡洛计算物理研究, 构建了从微观哈密顿量到宏观热力学量的完整分析流程。结果显示, 绝对磁化强度在临界区快速下降, 比热和磁化率在 $T \approx 2.27$ 附近出现峰值, Binder 累积量在临界区附近呈现尺寸曲线聚集, 自旋构型也由低温有序逐渐转变为高温无序。这些现象共同表明, 简单的局域相互作用能够产生清晰的集体相变行为。

综合数值结果, 本文将临界温度写作 $T_c \approx 2.27 \pm 0.05$, 其中 2.27 主要来自比热峰值和 Binder 累积量聚集位置, ± 0.05 由较大尺寸磁化率峰值相对于中心估计的最大偏移及温度网格分辨率共同确定。该数值应理解为本文有限尺寸、有限采样和离散温度网格条件下的区间估计, 而不是严格置信区间。补充的 $L=48$ 热化曲线与延长采样复核结果说明, 体系在热化后已达到近似平衡, 但临界区仍受局域 Metropolis 算法自相关和有限有效样本数影响。研究表明, 蒙特卡洛模拟不仅能够验证统计物理基本理论, 也能为复杂系统临界行为、算法效率分析和机器学习辅助相变识别提供可复现的基准平台。

参考文献

- [1] Onsager, L. (1944) Crystal Statistics. I. A Two-Dimensional Model with an Order-Disorder Transition. *Physical Review*, **65**, 117-149. <https://doi.org/10.1103/physrev.65.117>
- [2] Metropolis, N., Rosenbluth, A.W., Rosenbluth, M.N., Teller, A.H. and Teller, E. (1953) Equation of State Calculations by Fast Computing Machines. *The Journal of Chemical Physics*, **21**, 1087-1092. <https://doi.org/10.1063/1.1699114>
- [3] Swendsen, R.H. and Wang, J.S. (1987) Nonuniversal Critical Dynamics in Monte Carlo Simulations. *Physical Review Letters*, **58**, 86-88. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.58.86>
- [4] Wolff, U. (1989) Collective Monte Carlo Updating for Spin Systems. *Physical Review Letters*, **62**, 361-364. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.62.361>
- [5] Ferrenberg, A.M. and Swendsen, R.H. (1988) New Monte Carlo Technique for Studying Phase Transitions. *Physical Review Letters*, **61**, 2635-2638. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.61.2635>
- [6] Binder, K. (1981) Finite Size Scaling Analysis of Ising Model Block Distribution Functions. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, **43**, 119-140. <https://doi.org/10.1007/bf01293604>
- [7] Landau, D.P. and Binder, K. (2014) A Guide to Monte Carlo Simulations in Statistical Physics. 4th Edition, Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/cbo9781139696463>
- [8] Newman, M.E.J. and Barkema, G.T. (1999) Monte Carlo Methods in Statistical Physics. Oxford University Press.
- [9] Stanley, H.E. (1971) Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena. Oxford University Press.
- [10] Carrasquilla, J. and Melko, R.G. (2017) Machine Learning Phases of Matter. *Nature Physics*, **13**, 431-434. <https://doi.org/10.1038/nphys4035>
- [11] van Nieuwenburg, E.P.L., Liu, Y.H. and Huber, S.D. (2017) Learning Phase Transitions by Confusion. *Nature Physics*, **13**, 435-439. <https://doi.org/10.1038/nphys4037>
- [12] Richter-Laskowska, M., Kurpas, M. and Maška, M.M. (2023) Learning by Confusion Approach to Identification of Discontinuous Phase Transitions. *Physical Review E*, **108**, Article 024113. <https://doi.org/10.1103/physreve.108.024113>