Modern Physics 现代物理, 2026, 16(6), 257-268
Published Online November 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/mp
https://doi.org/10.12677/mp.2026.166027

Hans汉斯

复杂能源网络的时延分布式均衡动力学

王玉珏，丘小玲*

贵州大学数学与统计学院，贵州 贵阳

收稿日期：2026年10月5日；录用日期：2026年10月27日；发布日期：2026年11月5日

摘　要

针对复杂能源网络中局部决策、物理邻接作用与信息时延并存的问题，建立以节点可控有功功率为策略的分布式能源博弈模型，并采用直流潮流校核均衡对应的节点相角和线路潮流。物理图与通信图分开建模，以有界端到端信息年龄描述多跳传播造成的状态陈旧，在此基础上构造分布式近端最佳响应算法。在紧凸性与连续性的条件下均衡存在，强单调性保证其唯一性，块响应矩阵给出有界时延下的充分收缩条件。仿真结果表明，算法可在所设条件下收敛到同一均衡；信息年龄增大会减慢收敛，当增强供需失配惩罚时，可减小稳态失配，会压缩理论收缩裕度。结果说明，信息新鲜度和供需调节强度共同影响均衡的形成过程。

关键词

复杂能源网络，分布式纳什均衡，直流潮流

Distributed Equilibrium Dynamics with Delayed Information in Complex Energy Networks

Yujue Wang, Xiaoling Qiu*

School of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang Guizhou

Received: October 5, 2026; accepted: October 27, 2026; published: November 5, 2026

Abstract

This paper studies distributed equilibrium formation in complex energy networks with decentralized decisions, physical adjacency, and delayed information. Each node chooses its controllable active-power injection in a noncooperative game whose local cost includes operating cost, a soft

*通讯作者。

文章引用: 王玉珏, 丘小玲. 复杂能源网络的时延分布式均衡动力学[J]. 现代物理, 2026, 16(6): 257-268.
DOI: 10.12677/mp.2026.166027

system-wide supply-demand mismatch penalty, and a penalty on power differences between physically adjacent nodes. The equilibrium is checked separately with a lossless DC power-flow model. The physical graph and the directed communication graph are modeled independently, while a bounded end-to-end information age represents state staleness caused by multihop communication. Based on this information model, each node performs a proximal best response using delayed source states. Existence follows from continuity on the compact convex strategy set, and strong monotonicity guarantees uniqueness; a complete response-sensitivity matrix provides a sufficient contraction condition under bounded information age. Numerical tests on a six-node network show that the node strategies converge to the same equilibrium under the stated conditions. Larger information age slows convergence. Increasing the supply-demand mismatch penalty reduces the steady mismatch over the tested range, but also narrows the theoretical contraction margin. These results show that information freshness and supply-demand regulation jointly shape the convergence of the distributed equilibrium process in the considered model.

Keywords

Complex Energy Network, Distributed Nash Equilibrium, DC Power Flow

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

能源系统正从单向供能模式向分布式电源、储能装置、可控负荷和局部微电网共同组成的互联结构演变[1] [2]。在这类系统中，各能源单元有各自的运行目标，其功率决策又会通过供需平衡、线路潮流和节点状态影响其他单元。集中式优化需要汇集较完整的网络状态并由中心节点统一计算，当系统规模扩大或通信受限时，通信负担和单点故障风险也随之增加，对通信可靠性提出更高要求。

互联能源网络既存在物理作用，也存在决策耦合。节点功率注入的变化会改变系统供需失配，并通过网络连接引起线路潮流和节点相角重新分配[2]-[4]。与此同时，各能源单元需要在自身运行约束下选择能够降低局部代价的策略。因此，同一运行点既受物理稳态关系约束，也体现各单元之间的非合作决策。本文所称纳什均衡并非热力学平衡，也不等同于电力系统暂态稳定状态，而是指在其他单元策略给定时，任一节点都不能通过单方面调整自身策略进一步降低其代价[5]。

最优潮流、经济调度和分布式优化是能源系统运行研究中的常用方法[1] [2] [6]。集中式最优潮流在网络参数和负荷已知时能够直接计算系统运行点，但依赖全局或近全局信息；分布式优化可以减轻中心计算负担，却通常建立在共同目标函数之上。对于由不同所有者控制、存在局部利益或竞争性资源的能源单元，单一社会成本未必能够反映各参与者的决策机制。纳什博弈从个体最优响应出发描述这种相互影响，并可借助单调博弈和变分不等式工具研究均衡性质[7] [8]。

分布式纳什均衡搜索的困难主要来自信息可得性和耦合结构。节点通常不能实时获得其他节点的当前功率，只能依据通信邻居多跳转发的信息维护局部缓存。由于物理网络与通信网络并不一定一致，不同节点在同一外层迭代时刻可能使用不同历史版本的状态。另一方面，功率更新会受到网络耦合影响，仅有局部代价的凸性并不足以保证整体迭代稳定，还需要分析伪梯度映射的单调性以及块响应之间的耦合强度。

有界陈旧信息是并行和异步分布式迭代中常用的时延抽象[9]，异步近端最佳响应也已用于含延迟对

手信息的纳什博弈[10]。近期研究还考虑了切换网络与未知有界通信时延下的鲁棒分布式纳什均衡搜索[11]，以及权平衡有向图上异质二阶非线性智能体在时变通信时延下的均衡搜索[12]。本文聚焦复杂能源网络中物理邻接图与通信图分离时的均衡动力学，将可控有功功率博弈、端到端信息年龄和近端响应置于同一离散框架中。局部代价保留本地运行项、全网供需失配项和物理邻接图上的空间功率差异项，通信层则用统一有界的信息年龄描述多跳传播造成的状态陈旧。

在上述框架下，能源博弈同时考虑本地运行成本、软供需失配和物理邻接图上的拉普拉斯型功率差异惩罚，均衡对应的节点相角和线路潮流由直流潮流单独计算。物理图与通信图分开建模后，有界端到端信息年龄用于描述节点实际采用的陈旧状态，节点据此执行分布式近端最佳响应。紧凸性与连续性保证均衡存在，强单调性进一步保证其唯一性；块响应的收缩条件用于建立有界信息年龄下的误差递推。六节点算例用于考察信息年龄和供需惩罚权重对收敛迭代次数、稳态失配及理论收缩裕度的影响。

2. 方法

2.1. 互联能源网络的物理描述

考虑由 N 个可控能源节点构成、并通过参考节点与外部主网相连的互联网络，节点集合记为 $V=\{1,2,\cdots,N\}$，物理邻接图记为 $\mathcal{G}_p=(V,E_p)$。节点 i 的可控有功功率注入量记为 p_i，正值表示向网络供能，负值表示吸收功率。为突出分布式均衡动力学，本文将每个节点的策略限定在区间

$$X_i=\left[p_i^{\min},p_i^{\max}\right]$$

联合功率向量为 $p=\mathrm{col}(p_1,\cdots,p_N)$，联合策略空间为 $X=X_1\times\cdots\times X_N$。节点 i 的固定需求记为 d_i，总需求为 $D=\sum_i d_i$。系统供需失配定义为

$$r(p)=\sum_{i=1}^{N}p_i-D$$

在无损直流潮流近似下，以一个参考节点固定相角，其他节点相角向量满足

$$B_r\theta_r=p_r-d_r$$

其中 B_r 为去除参考节点后的节点电纳矩阵，p_r 与 d_r 分别为非参考节点的功率注入和需求向量。线路 (i,j) 上的有功潮流可以表示为

$$f_{ij}=b_{ij}\left(\theta_i-\theta_j\right)$$

其中 b_{ij} 为线路电纳。本文采用标准无损直流潮流近似[2] [3]，该方程仅用于把博弈得到的节点计划注入映射为相角和线路潮流等物理量，并不等同于后文的空间功率差异惩罚，也不是算法的通信更新方程。

由于节点侧供需平衡采用软惩罚而不是硬等式约束，均衡可能满足 $r(p^*)\neq 0$。本文据此采用并网场景：参考节点兼作潮流校核中的平衡节点，由其连接的外部主网补偿 $\Delta p_{\mathrm{slack}}=-r(p^*)$，以满足直流潮流计算所需的总功率守恒。该补偿仅用于物理状态校核，不参与能源节点的博弈更新。

物理网络的无向邻接权重记为 $w_{ij}=w_{ji}\geq 0$，相应的拉普拉斯矩阵为 L_p。由于 $L_p\mathbf{1}=0$，相邻节点功率差异可写为

$$p^{\mathrm{T}}L_p p=\frac{1}{2}\sum_{(i,j)\in E_p}w_{ij}\left(p_i-p_j\right)^2$$

该二次项具有拉普拉斯型扩散结构，用于惩罚物理相邻节点之间过大的注入差异，可视为节点功率空间不均匀性的代理度量。其中图权重取无量纲值，其物理含义与直流潮流中的线路电纳不同。它并不

等同于线路潮流 f_{ij}，实际线路交换仍由上述直流潮流关系独立计算。

2.2. 非合作能源博弈

节点 i 的运行代价定义为

$$J_i\left(p_i,p_{-i}\right)=\frac{a_i}{2}p_i^2+b_ip_i+\frac{\gamma_i}{2}r\left(p\right)^2+\frac{\kappa_i}{2}\sum_{j\in N_i^p}w_{ij}\left(p_i-p_j\right)^2$$

其中 $a_i>0$ 表示本地功率调节成本，b_i 为线性运行系数，$\gamma_i>0$ 为供需失配惩罚系数，$\kappa_i>0$ 为节点注入空间差异惩罚系数，$\mathcal{N}_i^p$ 为节点 i 在物理图中的邻居集合。第一项体现能源单元自身的边际成本；第二项允许不同节点具有不同的基准运行偏好；第三项抑制总供给与总需求之间的偏差；第四项抑制物理相邻节点之间过大的注入不均匀。

本文研究非合作博弈

$$\Gamma=\left(V,\{X_i\}_{i=1}^N,\{J_i\}_{i=1}^N\right)$$

在其他节点策略固定时，节点 i 通过选择 $p_i\in X_i$ 最小化 $J_i\left(p_i,p_{-i}\right)$。联合策略 $p^*\in X$ 称为纳什均衡，当且仅当

$$J_i\left(p_i^*,p_{-i}^*\right)\le J_i\left(v_i,p_{-i}^*\right),\forall v_i\in X_i,i\in V$$

定义伪梯度映射

$$F\left(p\right)=\mathrm{col}\left(\frac{\partial J_1}{\partial p_1},\cdots,\frac{\partial J_N}{\partial p_N}\right)$$

对节点代价函数关于自身策略求偏导可得

$$F_i\left(p\right)=a_ip_i+b_i+\gamma_ir\left(p\right)+\kappa_i\left(d_i^pp_i-\sum_{j\in N_i^p}w_{ij}p_j\right)$$

其中 $d_i^p=\sum_j w_{ij}$ 为物理图加权度。若取统一参数 $\gamma_i=\gamma$、$\kappa_i=\kappa$，则 $F\left(p\right)=Hp+b-\gamma D1$，其中

$$H=\mathrm{diag}\left(a_i\right)+\gamma11^{\mathrm{T}}+\kappa L_p$$

当 $a_i>0$ 且 L_p 半正定时，矩阵 H 对称正定，因而 F 强单调。更一般地，本文假设存在 $\mu>0$，使得

$$\left\langle F\left(p\right)-F\left(q\right),p-q\right\rangle\ge\mu\left\|p-q\right\|_2^2,\forall p,q\in X$$

由于 $\partial^2J_i/\partial p_i^2=a_i+\gamma_i+\kappa_id_i^p>0$，$J_i\left(\cdot,p_{-i}\right)$ 在 X_i 上严格凸，因此纳什均衡可等价表述为变分不等式 $VI\left(X,F\right)$，寻找 $p^*\in X$，使得

$$\left\langle F\left(p^*\right),p-p^*\right\rangle\ge0,\forall p\in X$$

强单调性保证该变分不等式至多有一个解，紧致性与连续性保证解存在，因此 p^* 唯一。这一存在唯一性结论与标准变分不等式理论一致[8] [13]。

2.3. 有界时延下的分布式均衡搜索

2.3.1. 有界时延信息模型

物理邻接图 $\mathcal{G}_p$ 描述节点之间的线路连接关系，线路潮流的电气作用由前述线路电纳和直流潮流方程另行刻画；通信图 $\mathcal{G}_c=\left(V,E_p\right)$ 描述控制器之间的信息传递，二者不要求一致。本文假设 $\mathcal{G}_c$ 强连通，因此

各节点可以经通信邻居多跳获得其他源节点的状态。源状态在传播过程中保留节点标识，接收端据此维护逐源缓存。本文不展开具体的数据包传输协议，而将多跳转发、排队、处理和更新不同步造成的综合时延统一表示为有效端到端信息年龄。节点 i 的局部状态缓存记为

$$\hat{p}^i(t)=\mathrm{col}\left(\hat{p}_1^i(t),\cdots,\hat{p}_N^i(t)\right)$$

节点 i 对源节点 j 的缓存写为

$$\hat{p}_j^i(t)=p_j\left(t-\tau_{ij}(t)\right),0\le\tau_{ij}(t)\le M$$

其中 $\tau_{ij}(t)$ 表示时刻 t 节点 i 实际使用的节点 j 状态的信息年龄，M 为统一时延上界。外层算法按离散轮次更新，因此信息年龄取 0 到 M 之间的整数值。它度量的是源节点产生状态到接收节点将该状态用于决策之间的端到端陈旧程度，单位为外层决策迭代轮次，而非单条链路的物理传播时间。

假设所有有效源信息均能在有限时间内沿 $\mathcal{G}_c$ 传播至各节点，且端到端信息年龄满足统一上界。这样，不同节点可以在同一时刻使用不同历史版本的状态，而收敛分析无需引入具体通信协议。强连通性负责保证多跳传播的拓扑可达性，后续证明实际使用的是统一有效信息年龄上界 M。

对于自身状态取 $\tau_{ii}(t)=0$，即节点始终使用当前 $p_i(t)$ 作为近端中心；对 $j\neq i$ 的陈旧状态则仅通过 $0\le\tau_{ij}(t)\le M$ 加以约束。

本文的外层更新仍按统一离散轮次编号；多跳转发、排队、处理以及局部更新不同步的影响仅通过信息年龄进入模型，因此这里讨论的并不是完全异步的坐标更新算法。数值实验也在相同的有效信息年龄层生成随机时延，使算法、定理和仿真采用一致的时延定义。

2.3.2. 近端最佳响应

在外层时刻 t，节点 i 将缓存的 $\hat{p}_{-i}^i(t)$ 视为固定信息，并求解

$$p_i(t+1)=T_i\left(p_i(t),\hat{p}_{-i}^i(t)\right)=\arg\min_{v_i\in X_i}\left\{J_i\left(v_i,\hat{p}_{-i}^i(t)\right)+\frac{\left(v_i-p_i(t)\right)^2}{2\lambda_i}\right\}$$

其中 $\lambda_i>0$ 为近端参数。近端项限制单次功率调整幅度，从而减轻陈旧状态引起的过冲，同时使局部响应成为正则化子问题。由于 J_i 关于 p_i 强凸，该近端子问题具有唯一解[14]。

对于本文的二次代价，上述近端子问题可以直接计算。令 $\hat{s}_{-i}^i(t)=\sum_{j\neq i}\hat{p}_j^i(t)$，则

$$p_i(t+1)=\Pi_{X_i}\left(\frac{p_i(t)/\lambda_i-b_i-\gamma_i\left(\hat{s}_{-i}^i(t)-D\right)+\kappa_i\sum_{j\in N_i^p}w_{ij}\hat{p}_j^i(t)}{a_i+\gamma_i+\kappa_i d_i^p+1/\lambda_i}\right)$$

其中 Π_{X_i} 表示投影到节点功率区间，且 $\hat{s}_{-i}^i(t)=\sum_{j\neq i}\hat{p}_j^i(t)$。闭式响应可以由节点本地直接计算，不需要中心节点求解全网优化问题。由于供需失配项依赖全局功率和，节点仍需通过通信邻居的多跳传播维护各源节点的延迟状态，并在本地对逐源缓存求和；本文不另外引入平均共识或聚合器动态。物理空间差异项只使用物理邻居状态。对于非二次代价，近端子问题可改用本地一维凸优化器或局部近端迭代求解。

2.3.3. 分布式算法流程

算法 1 列出各节点在外层迭代中的具体步骤。

算法 1. 有界时延分布式近端均衡搜索

步骤 1：初始化 $p_i(0)\in X_i$；为统一处理初始时延，分析中令 $p(s)=p(0)$，$s=-M,\cdots,-1$。

步骤 2：通过通信邻居获得其他源节点的延迟状态，并形成满足 $\hat{p}_j^i(t)=p_j\left(t-\tau_{ij}(t)\right)$、$0\le\tau_{ij}(t)\le M$ 的本地缓存。

步骤 3：冻结 $\hat{p}^{i}_{-i}(t)$，按照近端子问题或其闭式响应求解本地近端最佳响应。

步骤 4：更新 $p_i(t+1)$，并将新的本地状态继续通过通信图传播。

步骤 5：若达到预设最大迭代次数则停止；否则返回步骤 2。

算法中的“均衡”由各能源单元的局部代价共同决定，物理网络状态则通过功率平衡和直流潮流方程单独校核。通信图只规定信息传播路径，$\tau_{ij}(t)$ 描述节点实际用于决策的状态陈旧程度；两者都不改变物理潮流方程。

2.4. 收敛性分析

2.4.1. 块响应的收缩性质

近端响应 T_i 同时依赖近端中心 v_i 和对手状态 z_{-i}，因此收缩分析必须同时计入两类输入的变化。对任意 (v_i, z_{-i}) 与 $(\tilde{v}_i, \tilde{z}_{-i})$，由闭式响应及投影算子的非扩张性[15]，有

$$\left|T_i(v_i, z_{-i}) - T_i(\tilde{v}_i, \tilde{z}_{-i})\right| \le \alpha_i \left|v_i - \tilde{v}_i\right| + \sum_{j\neq i} \beta_{ij} \left|z_j - \tilde{z}_j\right|$$

对于本文的二次代价模型，令

$$A_i = a_i + \gamma_i + \kappa_i d_i^{p} + 1/\lambda_i, \alpha_i = \frac{1/\lambda_i}{A_i}$$

$$\beta_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\left|\gamma_i - \kappa_i w_{ij}\right|}{A_i}, & j \in N_i^{p}, \\ \dfrac{\gamma_i}{A_i}, & j \notin N_i^{p}, j \neq i. \end{cases}$$

其中 α_i 描述近端中心 $p_i(t)$ 自身变化对下一步响应的影响，β_{ij} 描述节点 j 的状态变化对节点 i 响应的影响。记修正后的响应矩阵 $R = [r_{ij}]$，其中 $r_{ii} = \alpha_i$、$r_{ij} = \beta_{ij}$ $(j \neq i)$。本文采用如下收缩条件：$q = \|R\|_{\infty} = \max_i \left(\alpha_i + \sum_{j\neq i} \beta_{ij}\right) < 1$。该条件与强单调性描述的是不同层面的问题。在策略集紧凸且伪梯度连续从而保证均衡存在的基础上，强单调性进一步保证其唯一性；$q<1$ 则直接要求完整近端响应映射在无穷范数下收缩，从而支撑陈旧信息下的延迟递推。对本文二次模型，$q_i<1$ 等价于 $\sum_{j\neq i} \left|\gamma_i - \kappa_i w_{ij}\right| < a_i + \gamma_i + \kappa_i d_i^{p}$（理邻居取 $w_{ij}=0$）。近端参数 λ_i 会改变收缩因子 q_i 的数值，但不能替代本地曲率对网络耦合强度的约束。

2.4.2. 有界时延下的误差递推

记均衡误差及其有限历史窗口为

$$e(t) = \left\|p(t) - p^{*}\right\|_{\infty}, V(t) = \max_{t-M\le s\le t} e(s)$$

由于 p^{*} 是近端响应的不动点，即 $p_i^{*} = T_i\left(p_i^{*}, p_{-i}^{*}\right)$，且延迟缓存满足 $\hat{p}_j^{\,i}(t) = p_j\left(t - \tau_{ij}(t)\right)$、$0 \le \tau_{ij}(t) \le M$，由前述响应灵敏度界可得

$$\left|p_i(t+1) - p_i^{*}\right| \le \alpha_i \left|p_i(t) - p_i^{*}\right| + \sum_{j\neq i} \beta_{ij} \left|\hat{p}_j^{\,i}(t) - p_j^{*}\right| \le qV(t)$$

对所有节点取最大值，得到

$$e(t+1) \le qV(t)$$

该递推式给出了陈旧信息下离散系统的误差关系。有界时延不改变响应映射本身，但会扩大单次递推涉及的历史区间。完整响应矩阵 R 及其行和 q 决定收缩强度，时延上界 M 则决定历史窗口长度。

定理 1

对于 2.2 节所述二次能源博弈，在 2.4.1 节响应灵敏度界成立的基础上，若 X_i 为非空紧凸区间，F 在 X 上连续且强单调，通信图 $\mathcal{G}_c$ 强连通且有效信息年龄满足 $0 \le \tau_{ij}(t) \le M$，局部近端响应满足前述灵敏度界，并且 $q = \|R\|_\infty < 1$，则算法 1 生成的策略序列收敛到唯一纳什均衡 p^*，即

$$e(t) \le q^{\ell} V(0)$$

其中 ℓ 表示不超过 $t/(M+1)$ 的最大整数。按步骤 1 令 $p(s) = p(0)$，$s = -M, \cdots, -1$，因此 $V(0) = \max_{-M \le s \le 0} e(s) = e(0)$。

证明：由 F 的连续性以及 X 的非空紧凸性，变分不等式 $VI(X, F)$ 存在解；再由 F 的强单调性，该解唯一，记为 p^*，且 $p_i^* = T_i(p_i^*, p_{-i}^*)$。由上述递推式，$e(t+1) \le q \max_{t-M \le s \le t} e(s)$。因此每经过一个长度为 $M+1$ 的完整历史窗口，窗口内的最大误差至多再乘一个 q。令 ℓ 表示不超过 $t/(M+1)$ 的最大整数，递推可得 $e(t) \le q^{\ell} V(0)$。由于 $0 \le q < 1$，当 $t \to \infty$ 时 $e(t) \to 0$，故算法 1 收敛到 p^*。证毕。

定理 1 表明，在本文模型和所给充分条件下，物理邻接耦合下算法是否仍允许收敛取决于节点对自身近端中心及其他节点历史状态的总响应灵敏度。在均衡存在性条件成立时，强单调性保证均衡唯一，而 $q < 1$ 直接约束本文块近端更新的收缩性。前述灵敏度界保留了近端中心产生的对角项 α_i，因而与算法 1 的实际更新结构一致。$q < 1$ 是由无穷范数行和得到的全局充分条件，并非必要条件，因此相应收敛界可能具有一定保守性。

3. 结果

3.1. 参数与物理网络

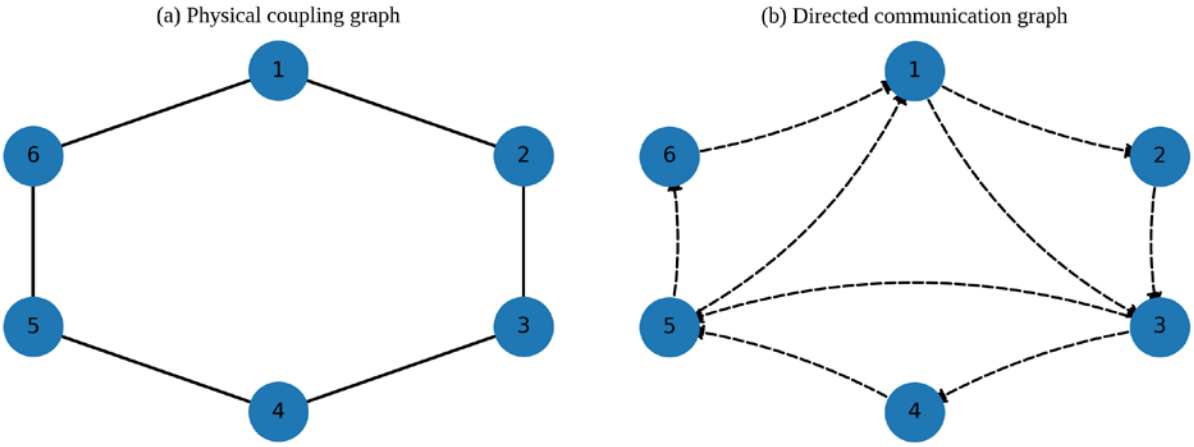


Figure 1. Physical coupling graph and directed communication graph of the six-node network
图 1. 六节点物理耦合图与有向通信图

算例采用 $N = 6$ 个能源节点构成的环形物理网络。直流潮流校核中，各环线电纳取 $b_{ij} = 10$ p.u.，对应 0.1 p.u.的线路电抗，线路容量取 1.0 p.u.；该参数下均衡潮流的相角差保持在直流潮流的小角度范围内。博弈空间差异项使用独立的无量纲图权重 $w_{ij} = 1$，其物理含义和量纲与线路电纳不同。通信层采用图 1(b)所示强连通有向图，用于保证多跳信息可达。由于本文直接在端到端信息年龄层建模，路径长度、转发、处理和更新不同步的综合影响均归入 $\tau_{ij}(k)$ 和 M，不再单独比较不同通信拓扑。除线路电纳外，功率及代价

参数均按 p.u.基准归一化。算法参数取 $\lambda_i = 0.4$、$\gamma = 0.8$、$\kappa = 0.15$，策略区间均为 $[0,3]$ p.u.；初始功率为

$$p(0) = [0.45, 2.60, 0.60, 2.40, 0.55, 2.50]^{\mathrm{T}}$$

表 1 列出各节点参数，总需求取外生值 $D = 9.0$ p.u.。模型不强制 $r(p^*) = 0$，因此允许软供需惩罚产生有限稳态残差。

Table 1. Parameters of the six-node energy network
表 1. 六节点能源网络参数

节点 i	a_i	b_i	需求 d_i	p_i 下界	p_i 上界
1	3.80	−5.80	1.35	0	3.00
2	4.00	−5.40	1.10	0	3.00
3	3.60	−6.20	1.55	0	3.00
4	3.90	−5.70	1.25	0	3.00
5	4.20	−5.00	1.20	0	3.00
6	3.70	−5.80	2.55	0	3.00

在 $\gamma = 0.8$、$\kappa = 0.15$ 下，伪梯度矩阵 H 的最小特征值为 3.8544；完整响应矩阵的最大行和为 $q = 0.8611 < 1$，谱半径为 0.8312。定理 1 实际采用的是无穷范数行和条件，因此后续收敛判据以 q 为准，谱半径仅作为补充数值指标。该参数组同时满足强单调性和定理 1 采用的充分收缩条件。

3.2. 均衡点与直流潮流状态

本算例的均衡位于功率区间内部，因此可直接求解 $F(p^*) = 0$，得到

$$p^* = [1.538984, 1.384868, 1.716923, 1.478146, 1.227517, 1.570380]^{\mathrm{T}}$$

均衡总功率为 8.916817 p.u.，对应 $r(p^*) = -0.083183$ p.u.。这一残差来自有限 γ 下的软供需惩罚；进行直流潮流校核时，参考节点连接的外部主网补偿 0.083183 p.u.。以节点 1 为参考节点，可得

$$\theta = [0, 0.030865, 0.033243, 0.018928, -0.018201, -0.058081]^{\mathrm{T}}$$

对应六条环路线路潮流为

$$f = [-0.308647, -0.023779, 0.143144, 0.371289, 0.398806, -0.580814]^{\mathrm{T}}$$

最大线路潮流绝对值为 0.5808 p.u. < 1.0 p.u.，低于给定线路容量。最大相邻节点相角差约为 0.0581 rad (3.33˚)，仍处于小角度范围内。在本算例参数下，这两项结果与所采用的无损直流潮流近似相容。

3.3. 收敛过程比较

为考察有界通信时延对均衡收敛过程的影响，数值实验直接在有效端到端信息年龄层生成 $\tau_{ij}(k)$。对 $j \neq i$，令 $\tau_{ij}(k)$ 在 $\{0, \cdots, M\}$ 上独立离散均匀采样，$\tau_{ii}(k) = 0$；$M = 0$ 表示全信息同步情形。该随机变量对应通信图 $\mathcal{G}_c$ 上多跳传播后的等效状态陈旧程度，不再额外模拟单链路包覆盖或乱序机制，因此与定理 1 使用的时延变量一致。这里的独立均匀采样仅用于生成满足理论有界条件的合成陈旧读数序列，以考察算法对不同信息年龄上界的敏感性，并不对应某一具体路由、排队或最新缓存协议的统计模型。这里的 M 是外层决策轮次的信息年龄上界，不对应毫秒或秒量级的物理链路传播延迟。所有算例采用相同初始功率，并固定随机种子以保证可复现性。

图 2(a)给出 $M=3$ 时一个随机实现下六个节点的功率轨迹，各节点从不同初值逐步趋近相应的 p_i^*。图 2(b)比较 $M=0,1,2,3$ 时的均衡误差。四种情形最终收敛到同一纳什均衡，但 M 增大后误差衰减速度降低。在数值精度范围内，各情形趋于同一均衡点，这与时延只作用于更新过程而不改变静态博弈定义的模型设定相符。

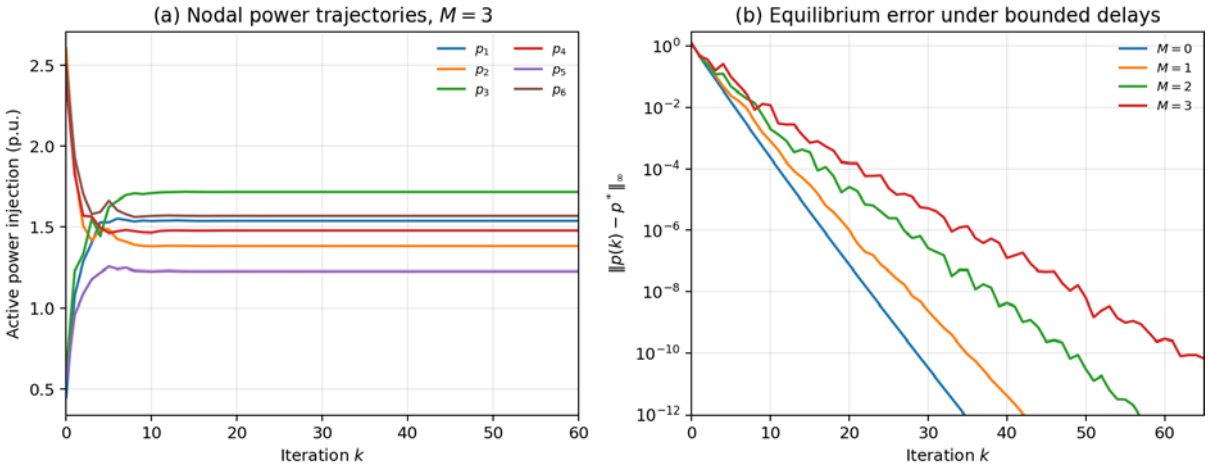


Figure 2. Nodal power trajectories and equilibrium errors under bounded delays
图 2. 有界时延下的节点功率演化与均衡误差

为量化时延上界对收敛迭代次数的影响，对 $M=0,1,2,3$ 分别进行 50 次独立随机实验，并以 $\left\|p(k)-p^*\right\|_\infty < 10^{-8}$ 作为收敛阈值。平均迭代次数依次为 23.00、27.44、36.86 和 47.46，样本标准差分别为 0、1.09、1.70 和 3.09。

图 3 给出上述随机实验的统计结果，误差棒表示±1 个样本标准差。随着 M 增大，达到同一精度所需的平均迭代次数增加，样本波动范围也有所扩大。该趋势与定理 1 给出的保守窗口收敛界一致：长度为 $M+1$ 的完整历史窗口至多保证获得一次 q 倍收缩。

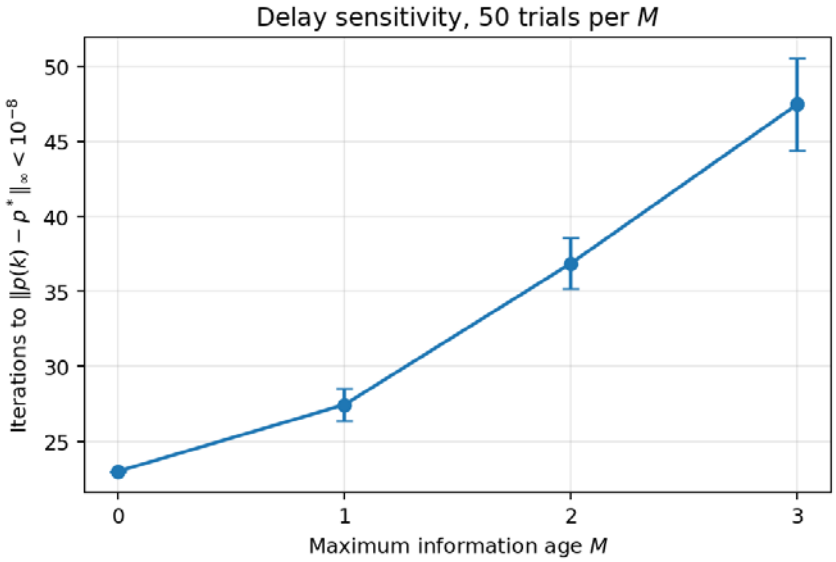


Figure 3. Effect of the maximum information age on iterations to the prescribed error tolerance
图 3. 信息年龄上界对收敛迭代次数的影响

通信时延不改变静态博弈本身，因此各 M 情形收敛后的均衡点和直流潮流校核结果相同。最大线路潮流绝对值仍为 0.5808 p.u.，低于 1.0 p.u.容量上限。因此，本组实验体现的是信息年龄对收敛速度的影响，而不是对静态均衡点的改变。

3.4. 关键参数敏感性

供需失配权重 γ 同时改变均衡残差和跨节点耦合强度。表 2 在原 γ 分析基础上补充 κ 、 a_i 和 λ 的代表性参数组。对本文六节点单位权环形图，统一参数下有 $q_i=\dfrac{\lambda^{-1}+2|\gamma-\kappa|+3\gamma}{a_i+\gamma+2\kappa+\lambda^{-1}}$；当 $\kappa<\gamma$ 时， $q_i<1$ 等价于 $a_i>4(\gamma-\kappa)$ 。

Table 2. Sensitivity to key parameters
表 2. 关键参数敏感性

参数	取值	收缩因子 q	指标	指标结果
γ	0.4/0.6/0.8/1.0	0.6176/0.7429/0.8611/0.9730	$\lvert r(p^\star)\rvert$ /p.u.	0.1151/0.09657/0.08318/0.07306
κ	0/0.8/1.2	0.9420/0.5765/0.6129	Δp /p.u.	0.5343/0.3639/0.3165
η （a_i 缩放）	0.60/1.00/1.25	1.0764/0.8611/0.7654	μ	2.3793/3.8544/4.7730
λ	0.1/0.4/2.0	0.9320/0.8611/0.8077	$p^\star$	$p^\star$ 不变

在本算例所考察的参数范围内，随着 γ 增大，$\lvert r(p^*)\rvert$ 由 0.1151 降至 0.07306 p.u.，而 q 由 0.6176 升至 0.9730。供需失配惩罚增强后，稳态残差减小，但该组参数下延迟块响应的理论收缩裕度也随之缩小。这反映了平衡精度与理论收缩裕度之间的数值权衡。该趋势依赖具体参数组合，不能外推为任意 γ 区间上的普适单调关系。κ 增大可降低节点间功率差异，但 q 对 κ 并非简单单调；增大 a_i 可扩大收缩裕度； λ 不改变静态纳什均衡。进一步在 $M=3$ 下进行 50 次边界测试，两组参数均保持强单调性： $a_i=0.60a_i^{(0)}$ 时 $q=1.0764$ ，50 次均收敛，平均 65.68 次； $\gamma=8.0$ 时 $q=2.9306$ ，50 次均未在 1000 次迭代内达到 10^{-8} 阈值，并呈有界振荡。因此 $q<1$ 是充分而非必要条件；当 $q\geq 1$ 时，定理 1 不再提供收敛保证，但不能据此直接判定算法发散。

4. 讨论

4.1. 均衡动力学的物理解释

节点代价中的供需失配项作用于全网功率总量，物理邻接图上的功率差异项用于抑制相邻节点之间过大的注入差异。在统一参数下，伪梯度曲率矩阵写为 $H=\mathrm{diag}(a_i)+\gamma 11^{\mathrm{T}}+\kappa L_p$ 。因此，系统的曲率结构可以分解为全局供需模态和由物理网络拉普拉斯谱决定的空间非均匀模态。

当 $a_i=a$ 时，向量 1 对应模态的曲率为 $a+N\gamma$ ；对任意满足 $L_p v_\ell=\lambda_\ell v_\ell$ 且 $v_\ell\perp 1$ 的空间模态，其曲率为 $a+\kappa\lambda_\ell$ 。由此， γ 主要调节全局供需恢复强度， κ 则通过非零拉普拉斯特征值抑制空间功率不均匀。

通信时延不改变直流潮流方程或静态均衡点，它改变的是节点计算近端响应时可获得的信息新鲜度。定理 1 表明，在 $q<1$ 时，时延上界 M 通过历史窗口长度 $M+1$ 进入收敛界。即使响应映射本身保持收缩，信息年龄增大仍会降低整体收敛速度。图 2 和图 3 的随机实验呈现相同趋势。

4.2. 与传统集中式优化的区别

集中式经济调度直接最小化预先设定的系统总成本，本文则从各节点局部代价出发构造非合作博弈。

在本算例采用统一 γ 和 κ 时，伪梯度矩阵 H 为对称正定矩阵，因此该特例同时构成严格凸势博弈，其纳什均衡可解释为相应二次势函数的唯一极小点，但这并不等同于直接最小化各节点成本之和。若 γ_i 、 κ_i 取一般异质参数，伪梯度通常不再具有对称雅可比结构，势函数解释也不再自动成立，博弈模型与集中式社会成本优化的差别将更加明确。由于本文数值算例采用统一参数，其主要用途是检验延迟均衡动力学，而不是展示一般非势博弈相较集中式优化的性能优势。

为检查上述统一参数特例是否掩盖了对势博弈结构的依赖，补充取六个节点的供需失配权重分别为 0.70、0.75、0.80、0.85、0.90 和 0.80，其余参数保持不变。此时伪梯度雅可比矩阵不再对称，其对称部分的最小特征值为 $3.8546>0$，完整响应矩阵的最大行和仍为 $q=0.8611<1$。因此，该异质参数组不具有上述对称势博弈结构，但仍满足定理 1 所需的强单调性和充分收缩条件。这一补充检查用于说明本文收敛条件并不依赖统一参数下的势博弈解释，不作为与集中式优化的性能比较。

4.3. 模型局限性

本文采用无损直流潮流和静态有功功率策略，因此没有显式描述电压幅值、频率暂态、线路损耗和储能状态。这一简化使分析集中于均衡动力学与信息时延之间的关系，后续可进一步引入交流潮流、储能状态方程或连续时间频率动态。外部主网在当前模型中只承担直流潮流校核时的平衡作用，其购售电价格与交换成本未单独建模，供需失配的经济影响由二次惩罚项近似表示。通信层也采用抽象模型，带源标识的状态沿强连通通信图多跳传播，路由、缓存容量、排队和处理等因素统一归入有界有效信息年龄。若进一步考虑丢包、容量限制或独立共识/聚合动态，则需要在现有误差递推中显式加入相应通信误差。因而，本文给出的线路潮流与相角结果只能作为直流潮流层面的可行性校核，不能据此推断交流安全性或频率暂态稳定性。

理论结果还依赖强单调性和块耦合收缩条件，强单调性并非能源市场博弈普遍具备的物理性质，而是由成本曲率、供需惩罚和网络耦合参数共同决定的数学条件；块响应的 $q<1$ 条件同样只是本文采用的充分收缩条件。当 $q\geq 1$ 时系统既可能继续收敛，因此需结合更精细的谱或局部稳定性分析判断边界外行为。当可再生能源出力具有不确定性或代价函数非凸时，概率均衡、鲁棒均衡或局部稳定性分析更为合适，本文定理不能直接沿用。

5. 结论

本文研究复杂能源网络中局部决策、物理邻接作用与信息陈旧共同影响下的分布式均衡形成。模型以节点可控有功功率为策略，在局部代价中考虑本地运行成本、全网供需失配和物理邻接图上的功率差异，并以直流潮流独立校核均衡对应的相角与线路潮流。通信层用有界端到端信息年龄描述多跳传播产生的陈旧状态，据此构造分布式近端最佳响应。在非空紧凸策略集和伪梯度连续条件下，均衡存在；强单调性保证其唯一性，完整响应矩阵的无穷范数行和条件 $q<1$ 给出有界信息年龄下的充分收缩保证。

六节点算例中，各节点策略收敛到同一均衡。经外部主网补偿后，直流潮流校核得到的最大线路潮流低于给定容量上限；信息年龄上界 M 由 0 增至 3 时，达到 10^{-8} 误差阈值的平均迭代次数由 23.00 增至 47.46。参数分析表明，提高供需失配权重可以减小稳态失配，但会使理论收缩因子 q 接近 1。异质参数检查中，伪梯度雅可比矩阵不再对称，其对称部分仍正定且 $q<1$，说明收敛条件不依赖统一参数下的势博弈结构。在本文二次博弈和有界信息年龄模型内，信息陈旧主要改变收敛速度，而供需调节强度与延迟响应的理论收缩裕度存在参数相关的权衡。

基金项目

对手可控的理性外包计算合作演化路径机制及控制方法研究(黔科合基础 MS〔2026〕160)；基于有

限理性和利他行为的多目标博弈 Nash 均衡精炼和实现算法研究(黔科合基础 ZD〔2025〕089)；贵州省应用数学与算力算法全省重点实验室项目(黔科合平台 ZSYS〔2025〕039)。

参考文献

[1] Molzahn, D.K., Dorfler, F., Sandberg, H., Low, S.H., Chakrabarti, S., Baldick, R., *et al*. (2017) A Survey of Distributed Optimization and Control Algorithms for Electric Power Systems. *IEEE Transactions on Smart Grid*, **8**, 2941-2962. https://doi.org/10.1109/tsg.2017.2720471

[2] Wood, A.J., Wollenberg, B.F. and Sheblé, G.B. (2013) Power Generation, Operation, and Control. 3rd Edition, John Wiley & Sons.

[3] Stott, B., Jardim, J. and Alsac, O. (2009) DC Power Flow Revisited. *IEEE Transactions on Power Systems*, **24**, 1290-1300. https://doi.org/10.1109/tpwrs.2009.2021235

[4] Kundur, P. (1994) Power System Stability and Control. McGraw-Hill.

[5] Nash, J. (1951) Non-Cooperative Games. *The Annals of Mathematics*, **54**, 286-295. https://doi.org/10.2307/1969529

[6] Low, S.H. (2014) Convex Relaxation of Optimal Power Flow—Part I: Formulations and Equivalence. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, **1**, 15-27. https://doi.org/10.1109/tcns.2014.2309732

[7] Scutari, G., Facchinei, F., Pang, J. and Palomar, D.P. (2014) Real and Complex Monotone Communication Games. *IEEE Transactions on Information Theory*, **60**, 4197-4231. https://doi.org/10.1109/tit.2014.2317791

[8] Facchinei, F. and Pang, J.S. (2003) Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems. Springer. https://doi.org/10.1007/b97543

[9] Bertsekas, D.P. and Tsitsiklis, J.N. (1989) Parallel and Distributed Computation: Numerical Methods. Prentice Hall.

[10] Lei, J., Shanbhag, U.V., Pang, J. and Sen, S. (2020) On Synchronous, Asynchronous, and Randomized Best-Response Schemes for Stochastic Nash Games. *Mathematics of Operations Research*, **45**, 157-190. https://doi.org/10.1287/moor.2018.0986

[11] Liu, L., Lu, M., Wang, S., Deng, F. and Chen, J. (2025) Robust Distributed Nash Equilibrium Seeking Subject to Communication Constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **70**, 1941-1948. https://doi.org/10.1109/tac.2024.3476195

[12] Yu, R., Li, L., Wang, Q., Zhang, X. and Lu, S. (2025) Distributed Nash Equilibrium Seeking for Heterogeneous Second-Order Nonlinear Noncooperative Games with Communication Delays. *Scientific Reports*, **15**, Article No. 2956. https://doi.org/10.1038/s41598-025-86683-8

[13] Rockafellar, R.T. and Wets, R.J.-B. (1998) Variational Analysis. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-02431-3

[14] Bauschke, H.H. and Combettes, P.L. (2017) Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces. 2nd Edition, Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-48311-5

[15] Bertsekas, D.P. (2009) Convex Optimization Theory. Athena Scientific.