Modern Physics 现代物理, 2026, 16(6), 301-316
Published Online November 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/mp
https://doi.org/10.12677/mp.2026.166031

周期开关RC电路的具适非瞬时脉冲模型与(ω,c)-周期电压波形

班楚瑶，刘　葵*

贵州大学数学与统计学院，贵州　贵阳

收稿日期：2026年10月18日；录用日期：2026年11月11日；发布日期：2026年11月17日

摘　要

本文建立周期开关RC电路的具适非瞬时脉冲模型：充电阶段由具适导数描述，放电阶段由有限持续时间的连续放电函数描述，以保证电容电压处处连续。通过具适时间重参数化得到量纲自洽的充电方程，证明单值矩阵为$V=\beta \mathrm{e}^{-\omega\Delta_c^{\lambda}/\lambda}$，给出$(\omega,c)$-周期解的存在唯一性判据与显式波形：自由电路的每周期衰减因子$c=\beta \mathrm{e}^{-A}$完全由电路参数确定；恒压源下存在唯一且全局吸引的严格周期稳态；含饱和非线性元件时存在保证解唯一的显式阈值。数值算例验证了上述结果。本文模型可用于分形电介质开关电路的等效建模与参数辨识。灵敏度与可辨识性分析表明：每周期衰减因子c对具适阶数λ最敏感($|S_{\lambda}|$为$|S_{Rd}|$的3~4倍)，但仅由c无法同时确定λ与放电电阻R_d，两者构成一条等值线；在1% (5%)元件容差下λ的相对不确定度为0.5%~0.6% (2.3%~2.9%)，而采样相位偏差及其漂移是实测辨识的主要误差源($\lambda=0.7$时1%的幅值误差只允许1.7 ns的相位偏差)。

关键词

周期开关电路，具适导数，非瞬时脉冲，(ω,c)-周期解，介电弛豫，能量耗散

Conformable Non-Instantaneous Impulsive Model for Periodically Switched RC Circuits and (ω,c)-Periodic Voltage Waveforms

Chuyao Ban, Kui Liu*

School of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang Guizhou

Received: October 18, 2026; accepted: November 11, 2026; published: November 17, 2026

*通讯作者。

文章引用: 班楚瑶, 刘葵. 周期开关 RC 电路的具适非瞬时脉冲模型与(ω,c)-周期电压波形[J]. 现代物理, 2026, 16(6): 301-316. DOI: 10.12677/mp.2026.166031

Abstract

A conformable non-instantaneous impulsive model for periodically switched RC circuits is established: the charging stage is described by a conformable derivative, while the discharging stage is described by a continuous discharge function of finite duration, so that the capacitor voltage is continuous everywhere. Through a conformable-time reparameterization, a dimensionally self-consistent charging equation is obtained. The monodromy matrix is proved to be $V=\beta \mathrm{e}^{-\alpha \Delta_c^{\lambda}/\lambda}$, and existence and uniqueness criteria together with explicit waveforms of (ω,c)-periodic solutions are presented. The attenuation factor per cycle of the free circuit, $c=\beta \mathrm{e}^{-A}$, is fully determined by the circuit parameters; under constant-voltage excitation, a unique and globally attracting strictly periodic steady state exists; and when a saturating nonlinear element is included, an explicit threshold guaranteeing uniqueness of the solution is given. Numerical examples verify the above results. The proposed model can be applied to equivalent modeling and parameter identification of switched circuits with dielectric media. Sensitivity and identifiability analyses show that the per-cycle attenuation factor c is most sensitive to λ ($|S_{\lambda}|$ is 3~4 times $|S_{Rd}|$), whereas c alone cannot determine λ and the discharging resistance R_d simultaneously because they form a level set; with 1% (5%) component tolerances, the relative uncertainty of λ is 0.5%~0.6% (2.3%~2.9%), and the sampling-phase offset and its drift are the dominant error sources in the identification from measured waveforms (at $\lambda=0.7$ a 1% amplitude error allows only 1.7 ns of phase offset).

Keywords

Periodically Switched Circuit, Conformable Derivative, Non-Instantaneous Impulse, (ω,c)-Periodic Solution, Dielectric Relaxation, Energy Dissipation

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

周期开关电容电路广泛用于 DC-DC 变换器、电荷泵、传感器接口和能量收集系统，它通过开关的周期性通断控制电容的充放电。随着开关频率的提高，开关过渡时间已可与开关周期相比，过渡期间电容电压持续变化，瞬时突变假设不再适用，相应的数学模型是非瞬时脉冲微分方程[1]-[4]。同时，放电回路和开关器件的损耗使电容储能逐周期衰减，稳态波形满足 $u(t+\omega)=cu(t)$ $(0<c<1)$的缩放周期关系，即 (ω,c)-周期解[5]-[9]。

对于多孔氧化物、纳米复合介质和非晶聚合物等无序、分形电介质，介电弛豫往往偏离 Debye 型指数律，表现为 Kohlrausch 型拉伸指数弛豫[10]-[13]。具适导数 $\mathrm{T}_a^{\lambda}x(t)=(t-a)^{1-\lambda}x'(t)$ 保持乘积法则与链式法则，在 $\lambda\to 1$ 时退化为普通导数，可简洁地描述这种非指数弛豫[14] [15]；但它是局部算子、不含记忆核，给出的是唯象参数化[16] [17]。

把上述框架用于实际开关电路时，已有做法仍存在三个问题：充电方程系数的处理不当会使电容电压无界增长；放电阶段被处理为“瞬时跳变加常数保持”，既使有限的过渡时间失去意义，又违背电容

电压不能突变的事实；衰减因子 c 常作为给定参数，与电路参数没有定量联系。本文在文献[9]框架下重建周期开关 RC 电路模型：第一，用具适时间重参数化给出量纲自洽的充电方程，使 $\lambda \to 1$ 时退化为经典 RC 方程；第二，用关于时间连续的放电函数描述放电阶段，保证电容电压处处连续；第三，证明单值矩阵，给出 (ω, c)-周期解的存在唯一性判据、显式波形与稳定性结论；第四，对含饱和非线性元件的电路给出保证解唯一的显式阈值。第 2 节建立电路模型，第 3 节分析线性电路，第 4 节处理非线性电路，第 5 节给出数值结果与讨论，第 6 节为结论。

需要补充的是，把上述模型用于实际电路的参数辨识时还有两个问题必须回答：一是衰减因子 c 对电路参数的灵敏度，特别是 λ 的微小变化是否会被放电电阻 R_d 的变化所掩盖，以及在存在测量噪声时辨识结果是否稳定、唯一；二是 c 本身必须由实测波形提取，而准确捕捉每个周期的起始电压会受到采样率、幅值噪声与时序误差的限制，进而影响参数辨识的精度。已有工作对这两点缺少定量讨论。为此，本文第 5.5 节给出 c 的相对灵敏度系数、λ 与 R_d 的耦合关系与可辨识性条件，第 5.6 节给出由实测波形提取 c 时的误差预算与相应的测量要求。

2. 电路模型与数学准备

2.1. 电路结构与开关时序

考虑由若干条独立 RC 支路构成的周期开关电路，每条支路由电压源 U_k、充电电阻 R_k、电容 C_k、放电电阻 R_{dk} 和单刀双掷开关 S_k 组成(图 1)。开关由周期为 ω 的时钟信号控制：在 $(s_{n-1}, t_n]$ 内接充电回路，电容经 R_k 充电；在 $(t_n, s_n]$ 内接放电回路，电容经 R_{dk} 放电。开关时刻满足周期性条件

$$t_{n+m} = t_n + \omega, \quad s_{n+m} = s_n + \omega \tag{1}$$

其中 m 为一个周期内的放电次数。本文算例取 $m = 1$，记充电区间长度 $\Delta_c = t_{n+1} - s_n$、放电区间长度 $\Delta_d = s_{n+1} - t_{n+1}$，显然 $\Delta_c + \Delta_d = \omega$。

与把放电视为瞬时跳变的做法不同，本文把放电区间视为真实的有限时间过程，电容电压在其中按指数规律衰减；由于电容电压是连续物理量，这样处理自动保证 $u_C(t)$ 处处连续。

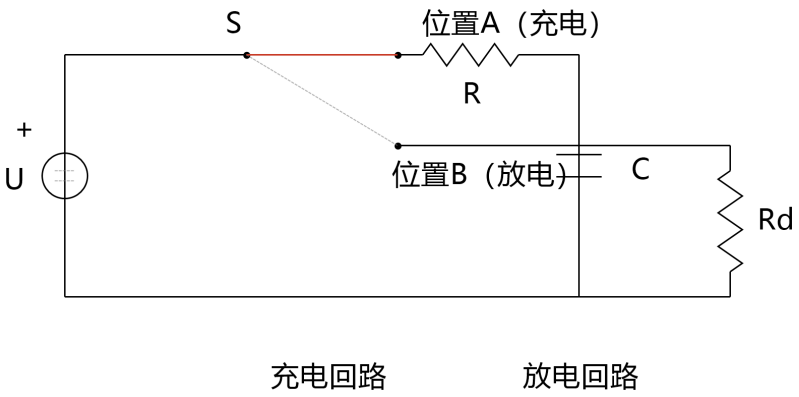


Figure 1. Schematic of the periodically switched RC circuit (charging and discharging loops)
图 1. 周期开关 RC 电路原理图(充电回路与放电回路)

2.2. 具适导数与 (ω, c)-周期函数

定义 1 函数 x 的下指标为 a 的具适导数定义为

$$\mathrm{T}_a^{\lambda}x(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x(t+\varepsilon(t-a)^{1-\lambda})-x(t)}{\varepsilon},\ t>a \tag{2}$$

当 x 可微时，具适导数可写为

$$\mathrm{T}_a^{\lambda}x(t)=(t-a)^{1-\lambda}x'(t) \tag{3}$$

由式(3)可得下列常用性质：

$$\mathrm{T}_a^{\lambda}\mathrm{e}^{\mu(t-a)^{\lambda}/\lambda}=\mu\mathrm{e}^{\mu(t-a)^{\lambda}/\lambda} \tag{4}$$

当 $\lambda=1$时，$\mathrm{T}_a^{1}x=x'$，具适导数退化为普通导数。由于式(3)右端只含局部导数 $x'(t)$，具适导数是局部算子，不含记忆核；本文用它描述偏离指数律的弛豫行为，而不把它解释为记忆效应。

定义 2 函数 $f(t)$ 称为 (ω,c)-周期的，若对一切 t 成立

$$f(t+\omega)=cf(t) \tag{5}$$

当 $c=1$时退化为通常的周期函数；当 $0<c<1$时对应逐周期衰减的缩放周期函数。

2.3. 电路状态方程

先回顾经典 RC 支路：由基尔霍夫方程 $R_k i_k+u_k=U_k(t)$ 与电容本构关系 $i_k=C_k u_k'$ 消去 i_k，得 $u_k'=-\alpha_k^{(0)}(u_k-U_k)$ $\left(\alpha_k^{(0)}=1/(R_kC_k)\right)$，其解为指数弛豫 $u_k=U_k+(u_k(s)-U_k)\mathrm{e}^{-(t-s)/(R_kC_k)}$。

为描述无序、分形电介质中偏离指数律的弛豫，把上式的线性时间因子替换为具适时间尺度 $(t-s)^{\lambda}/\left[\lambda(R_kC_k)^{\lambda}\right]$，即把指数弛豫推广为 Kohlrausch 型弛豫 $u_k=U_k+(u_k(s)-U_k)e^{-\alpha_k(t-s)^{\lambda}/\lambda}$；由式(4)(取 $\mu=-\alpha_k$)可直接验证它满足如下方程：

$$\mathrm{T}_{s_n}^{\lambda}u_k=-\alpha_k u_k+\alpha_k U_k(t),\ \alpha_k=(R_kC_k)^{-\lambda} \tag{6}$$

需要说明的是，式(6)不是由常量电容的基尔霍夫方程直接消元得到的：严格消元给出的是 $\mathrm{T}_{s_n}^{\lambda}u_k=(U_k-u_k)/(R_kC_k)$，其系数为 $1/(R_kC_k)$，仅在 $\lambda=1$时才与式(6)一致。式(6)是唯象的具适时间重参数化：把等效时间常数 R_kC_k、$R_{dk}C_k$ 按 $\tau\to\tau^{\lambda}$ 重标度，使 $\alpha_k=(R_kC_k)^{-\lambda}$、$\alpha_{dk}=(R_{dk}C_k)^{-\lambda}$，其量纲为 $(\text{时间})^{-\lambda}$、与 T^{λ} 相容，并保证 $\lambda\to 1$时退化为经典 RC 方程。

放电阶段取有限持续时间的连续放电函数

$$u_k(t)=u_k(t_{n+1}^{-})\mathrm{e}^{-\alpha_{dk}(t-t_{n+1})^{\lambda}/\lambda},\ t\in(t_{n+1},s_{n+1}] \tag{7}$$

其中 $\alpha_{dk}=(R_{dk}C_k)^{-\lambda}$。放电结束时 $u_k(s_{n+1}^{-})=\beta_k u_k(t_{n+1}^{-})$，其中保持比例 $\beta_k=\mathrm{e}^{-\alpha_{dk}\Delta_d^{\lambda}/\lambda}$。

充电阶段与放电阶段可以统一写成非瞬时脉冲形式 $f(t)=g_n(t,f(t_n^{-}))$ $(t\in(t_n,s_n]$，$f(s_n^{+})=f(s_n^{-}))$，其中 $f=(u_1,\cdots,u_N)^{\mathrm{T}}$。与常见的分段常数脉冲函数不同，式(7)给出的 g_n 关于时间 t 连续，因此 $f(t)$ 在整个时间轴上连续，符合电容电压的连续性要求。

2.4. 基本假设

全文使用以下假设：

(A1) $t_{n+m}=t_n+\omega$、$s_{n+m}=s_n+\omega$，$0<\Delta_c,\Delta_d<\omega$；(A2) $R_k,C_k,R_{dk}>0$，$\lambda\in(0,1]$；(A3) $U_k(t)$连续，或为常数($c=1$)，或满足 $U_k(t+\omega)=cU_k(t)$；(A4) 解空间取连续函数空间并赋上确界范数：恒压源情形取 $c=1$的周期函数空间，缩放激励情形取 $u(t+\omega)=cu(t)$ 的函数空间；(A5) 非线性项满足 $|Q(u)-Q(v)|\le L_Q|u-v|$。

3. 线性电路的解析分析

3.1. 充电阶段与放电阶段

首先给出充电阶段的基本解。若 $v(t)$ 满足 $\mathrm{T}_s^{\lambda} v = -\alpha v$，则

$$\mathrm{T}_s^{\lambda}\Phi(t,s) = -\alpha\Phi(t,s),\ \Phi(t,s) = \mathrm{e}^{-\alpha(t-s)^{\lambda}/\lambda} \tag{8}$$

直接代入式(3)即可验证式(8)。当激励为常数 U 时，由式(6)得

$$u(t) = U + \left(u(s) - U\right)\mathrm{e}^{-\alpha(t-s)^{\lambda}/\lambda} \tag{9}$$

3.2. 单值矩阵

记充电区间与放电区间的无量纲衰减量为

$$A = \frac{\alpha\Delta_c^{\lambda}}{\lambda},\ \beta = \mathrm{e}^{-\frac{\alpha_d\Delta_d^{\lambda}}{\lambda}} \tag{10}$$

则由式(7)与式(9)，状态在一个周期上的变换为

$$V = \mathrm{diag}(V_k),\ V_k = \beta_k \mathrm{e}^{-\frac{\alpha_k\Delta_c^{\lambda}}{\lambda}} \tag{11}$$

矩阵 V 即单值矩阵，其特征值为 Floquet 乘子；对本文的单支路情形 $V = \beta\mathrm{e}^{-A}$。由式(10)与式(11)可见，每周期衰减由充电区间的因子 e^{-A} 与放电区间的保持比例 β 两部分构成。

3.3. 自由电路的 (ω,c)-周期解

先考虑无源电路，即 $U=0$、初始电压 $u(0)=u_0$。由式(9)与式(7)，一个周期内的衰减因子为

$$c = \beta\mathrm{e}^{-A} \tag{12}$$

于是第 n 个周期上的电压波形为

$$u(t) = u_0 c^n \mathrm{e}^{-\frac{\alpha(t-n\omega)^{\lambda}}{\lambda}},\ t \in \left(n\omega, n\omega+\Delta_c\right] \tag{13}$$

$$u(t) = u_0 c^n \mathrm{e}^{-A}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha_d(t-n\omega-\Delta_c)^{\lambda}}{\lambda}},\ t \in \left(n\omega+\Delta_c, (n+1)\omega\right] \tag{14}$$

可以验证式(13)与式(14)在 $t = n\omega+\Delta_c$ 与 $t=(n+1)\omega$ 处连续，且满足 $u(t+\omega) = cu(t)$。式(12)与式(14)给出的结果可以表述为如下定理。

还需指出，当 $\lambda<1$ 时由式(13)得 $u'(t) \propto -(t-n\omega)^{\lambda-1}$，故在每个充电区间的起点 $t \to n\omega^{+}$ 处导数发散，波形具有竖直切线。图 2 的自由电路波形在每个充电区间起点呈现陡直下降(竖直切线)，图 3 中 $\lambda<1$ 的曲线则在每个充电区间起点呈现陡直上升，两者均为具适导数模型在 $\lambda<1$ 时的固有特征；$\lambda \to 1$ 时该奇异性消失。它只出现在区间端点，不影响 $u(t)$ 本身、缩放周期关系与定理 1 的结论。

定理 1 设 $U=0$。自由电路存在非平凡 (ω,c)-周期解当且仅当 $c = \beta\mathrm{e}^{-A}$，此时解由式(13)与式(14)给出；衰减因子 c 完全由电路参数 R、C、R_d 与开关时序 Δ_c、Δ_d 以及具适阶数 λ 决定，并且等于单值矩阵 V 的特征值(Floquet 乘子)。

证明 对 $U=0$，由式(9)与式(7)，一个周期后的电压为 $u\left((n+1)\omega\right) = \beta e^{-A}u(n\omega)$。若要求 $u(t+\omega) = cu(t)$，则必须有 $c = \beta\mathrm{e}^{-A}$。反之，当 $c = \beta\mathrm{e}^{-A}$ 时，对任意初始电压 u_0，由式(13)与式(14)构造的波形都满足 $u(t+\omega) = cu(t)$，且在 $t = n\omega+\Delta_c$ 与 $t=(n+1)\omega$ 处连续，因此存在非平凡 (ω,c)-周期解。证毕。

定理 1 表明，对自由电路而言，(ω,c)-周期行为不是人为假设，而是有损电路能量逐周期耗散的直接结果。

3.4. 缩放激励下的存在唯一性

当激励按 $U(t+\omega)=cU(t)$ 缩放时，由方程(6)的线性性，周期起点的电压满足 $u_{n+1}=Vu_n+b_n$，其中 V 由式(11)给出、$b_n=c^n b_0$（b_0 由激励在一个周期上的积分确定）。令 $u_n=c^n u_0$ 得 $(c-V)u_0=b_0$，于是得到如下定理。

定理 2 设 $U(t+\omega)=cU(t)$，$c>0$。若 $c\neq V$，则电路存在唯一的 (ω,c)-周期解；若 $c=V$，则当 $b_0\neq 0$ 时不存在 (ω,c)-周期解，当 $b_0=0$ 时存在无穷多解。对 N 条相互独立的支路，V 为对角矩阵，条件相应地改为 $c\notin\sigma(V)$，其中 $\sigma(V)$ 为 V 的谱。

稳定性 归一化变量 $w_n=u_n/c^n$ 满足 $w_{n+1}=(V/c)w_n+b_0/c$。若 $c>V$，则 w_n 以公比 $|V/c|$ 几何收敛，故该 (ω,c)-周期解全局吸引；恒压源情形 $c=1$ 满足 $V<1$，其稳态总是全局吸引。若 $c<V$，解仍唯一但不吸引。

3.5. 恒压源下的严格周期稳态

若激励为常数 $U(t)=U$，则 $c=1$。由于 $0<V<1$，条件 $1\notin\sigma(V)$ 自动满足，于是由定理 2 得到唯一的严格周期稳态，其周期起点电压为

$$u_0^{*}=\frac{\beta U\left(1-\mathrm{e}^{-A}\right)}{1-\beta\mathrm{e}^{-A}} \tag{15}$$

推论 1 设 $U_k(t)=U_k$ 为常数。若 $R_k>0$、$C_k>0$、$\lambda\in(0,1]$，则周期开关 RC 电路存在唯一的严格周期稳态(即 $c=1$ 的 $(\omega,1)$-周期解)，其周期起点电压由式(15)给出；又由 $0<V<1$ 知该稳态是全局吸引的。

充电区间末端电压(峰值)为 $u_{\max}=U+(u_0^{*}-U)\mathrm{e}^{-A}$，因此稳态纹波为 $\Delta u=u_{\max}-u_0^{*}$。式(15)给出了开关电容电路稳态纹波随电路参数与具适阶数变化的定量关系。

3.6. 能量分析

对自由电路，电容储能 $E_n=\frac{1}{2}Cu_n^2$，由 $u_{n+1}=cu_n$ 得 $E_{n+1}=c^2E_n$，故每周期能量衰减率为

$$\eta=1-c^2=1-\beta^2\mathrm{e}^{-2A} \tag{16}$$

其中充电区间的损失份额为 $1-\mathrm{e}^{-2A}$（耗散在 R 上），放电区间为 $1-\beta^2$（耗散在 R_d 上）。对含源电路，一个周期内的能量平衡为

$$W_s=\Delta E_C+Q_R+Q_{R_d}+Q_g \tag{17}$$

4. 非线性电路

4.1. 方程与假设

若电容两端并联一个非线性元件(如变阻器或二极管的等效非线性电阻)，则充电阶段应改写为

$$\mathrm{T}_{s_n}^{\lambda}u=-\alpha u+\alpha U+Q(u) \tag{18}$$

其中 $Q(u)$ 为非线性元件的电流项除以电容后的贡献。设 Q 在相关区间上满足 Lipschitz 条件

$$|Q(u)-Q(v)|\le L_Q|u-v| \tag{19}$$

4.2. 周期解的存在唯一性

在一个周期上定义映射 $u_{n+1}=F\left(u_n\right)$。由式(9)与非线性充电方程(18)的变分，对任意两个初始值 u、v 有 $\left|F\left(u\right)-F\left(v\right)\right|\le q\left|u-v\right|$，其中压缩因子为

$$q=\beta\left[\mathrm{e}^{-A}+\frac{L_Q\left(1-\mathrm{e}^{-A}\right)}{\alpha}\right] \tag{20}$$

若闭球半径 R 满足

$$R\ge\frac{\beta\left(1-\mathrm{e}^{-A}\right)\left(U+\left|Q(0)\right|/\alpha\right)}{1-q} \tag{21}$$

则 F 把该闭球映到自身。于是由 Banach 压缩映射原理可得如下定理。

定理 3 设假设(A1)~(A5)成立。若式(20)给出的压缩因子满足 $q<1$，且闭球半径 R 满足式(21)，则含非线性元件的周期开关 RC 电路存在唯一的严格周期稳态解。

证明 取 X 为所有连续且满足 $u\left(t+\omega\right)=u\left(t\right)$ 的函数构成的 Banach 空间，赋以上确界范数。对任意 $u,v\in X$，记 $\delta=u-v$；由 Lipschitz 条件(19)与非线性充电方程(18)的变分，在一个充电区间上有 $\left|\delta\left(\Delta_c\right)\right|\le\mathrm{e}^{-A}\left|\delta(0)\right|+L_Q\left(1-\mathrm{e}^{-A}\right)\left|\delta\right|/\alpha$，再乘上放电因子 β 即得

$$\left|F\left(u\right)-F\left(v\right)\right|\le\beta\left[\mathrm{e}^{-A}+L_Q\left(1-\mathrm{e}^{-A}\right)/\alpha\right]\left|u-v\right|=q\left|u-v\right|,$$

其中用到了积分恒等式 $\int_0^{\Delta_c}s^{\lambda-1}\mathrm{e}^{-\alpha\left(\Delta_c^{\lambda}-s^{\lambda}\right)/\lambda}\mathrm{d}s=\left(1-\mathrm{e}^{-A}\right)/\alpha$。当 $q<1$ 时 F 为压缩映射。另一方面，由式(9)与非线性项的有界性可得 $\left|F\left(u\right)\right|\le q\left|u\right|+\beta\left(1-\mathrm{e}^{-A}\right)\left(U+\left|Q(0)\right|/\alpha\right)$，因此当 R 满足式(21)时闭球在 F 下不变。由 Banach 压缩映射原理，F 在该闭球内存在唯一不动点，它对应电路唯一的严格周期稳态解。证毕。

4.3. 饱和非线性元件的算例

取饱和非线性元件 $Q\left(u\right)=-\sigma M\tanh\left(u/M\right)$，其中 M 为饱和电压尺度(σ 的量纲为 $\left(\text{时间}\right)^{-\lambda}$)。该函数全局 Lipschitz，且 $L_Q=\sigma$。代入式(20)与 $q<1$ 得唯一性阈值

$$\sigma_{\max}=\frac{\alpha\left(1-\beta\mathrm{e}^{-A}\right)}{\beta\left(1-\mathrm{e}^{-A}\right)} \tag{22}$$

由于式(22)中 $\sigma_{\max}$ 与 α 同量纲，其单位为 $\left(\text{时间}\right)^{-\lambda}$。本文算例以 μs 为时间单位、$\alpha=1/\left(RC\right)=0.5\ \mu\mathrm{s}^{-1}$，故 $\sigma_{\max}\approx1.75\ \mu\mathrm{s}^{-1}$ (用秒表示则为 $1.75\times10^{6}\ \mathrm{s}^{-1}$)。该结果表明：非线性越强，周期解存在唯一性的裕度越小；σ 超过阈值后压缩条件失效，可能出现多解或更复杂的动力学。

5. 数值结果与讨论

5.1. 算例参数

算例参数见表 1：$\omega=1.0$ μs、$\Delta_c=0.6$ μs、$\Delta_d=0.4$ μs、$C=1.0$ nF、$R=2.0$ kΩ、$R_d=0.8$ kΩ、$U=1.0$ V，对应 $\Delta_c/\left(RC\right)=0.3$、$\Delta_d/\left(R_dC\right)=0.5$，处于过渡时间与开关周期同量级的情形。

Table 1. Parameters of the numerical examples
表 1. 数值算例参数

参数	符号	数值
开关周期	ω	1.0 μs

续表

充电区间长度	Δ_c	0.6 μs
放电区间长度	Δ_d	0.4 μs
电容	C	1.0 nF
充电电阻	R	2.0 kΩ
放电电阻	R_d	0.8 kΩ
电源电压	U	1.0 V
初始电压(自由电路)	$u(0)$	1.0 V
无量纲比	$\Delta_c/(RC)$	0.3
无量纲比	$\Delta_d/(R_dC)$	0.5

注：本文所有算例均以 μs 为时间单位、以 V 为电压单位；$\Delta_c/(RC)$ 与 $\Delta_d/(R_dC)$ 为无量纲比值。

5.2. 数值方法与 $\tau = 0$ 处奇异性的处理

本文的数值结果分两类处理。线性情形(自由电路与恒压源稳态)直接使用解析解(式(13) (14) (15))在 0.0005 μs 等时间网格上取值，不含时间步进误差，图 2 与图 3 即按此绘制。

第二类是非线性情形(4.2 节与 5.7 节)：充电区间上没有解析解，采用四阶 Runge-Kutta 方法积分，放电区间仍用解析式；周期轨道由周期映射 $u_{n+1} = F(u_n)$ 的不动点迭代得到，判据为 $|u_{n+1} - u_n| < 10^{-12}$，其收敛性由式(20)的压缩因子 $q < 1$ 保证。取 $N = 80$；N 加倍至 160 与 320 时不动点的变化分别小于 1.4×10^{-11} 与 8.3×10^{-13}，表明数值解已收敛。

需要特别说明 $\tau = 0$ 处奇异性的处理。当 $\lambda < 1$ 时充电区间起点的导数发散(见 3.3 节)，直接在物理时间 τ 上等步长积分会因因子 $\tau^{\lambda-1}$ 而损失精度。本文把自变量换成具适时间 $\xi = \tau^{\lambda}/\lambda$：由 $\mathrm{d}/\mathrm{d}\xi = \tau^{1-\lambda}\,\mathrm{d}/\mathrm{d}\tau = \mathrm{T}_s^{\lambda}$ 可知，方程(6) (含非线性项时为式(18))化为 $u'_{\xi} = -\alpha(u-U)+Q(u)$，右端在 $\xi = 0$ 处解析，奇异因子被完全移除，因此可直接用等步长四阶 Runge-Kutta 方法；线性情形下该坐标中的解为 $u = U + (u_0 - U)\mathrm{e}^{-\alpha\xi}$，与式(10)一致。放电阶段同样光滑。图 2 与图 3 中 $\lambda < 1$ 曲线在充电区间起点的陡直上升是导数发散的真实反映，而非数值误差。

5.3. 自由电路的衰减波形

取 $u(0) = 1.0$ V、$U = 0$，由定理 1 得到自由电路的 (ω, c)-周期波形。图 2 给出 $\lambda = 1.0$、0.9、0.8、0.7 时的电压波形，红色阴影表示放电区间；表 2 列出相应的衰减量、保持比例、每周期衰减因子与能量衰减率。

Table 2. Attenuation factors and energy dissipation rates of the free circuit for different conformable orders
表 2. 自由电路在不同具适阶数下的衰减因子与能量衰减率

λ	A	β	c	$\eta = 1 - c^2$
1.0	0.300	0.6065	0.4493	79.8%
0.9	0.376	0.5513	0.3785	85.7%
0.8	0.477	0.4878	0.3027	90.8%
0.7	0.615	0.4150	0.2244	95.0%

注：表中时间均以 μs 为单位；λ 为无量纲的具适阶数，A 与 η 为无量纲量。

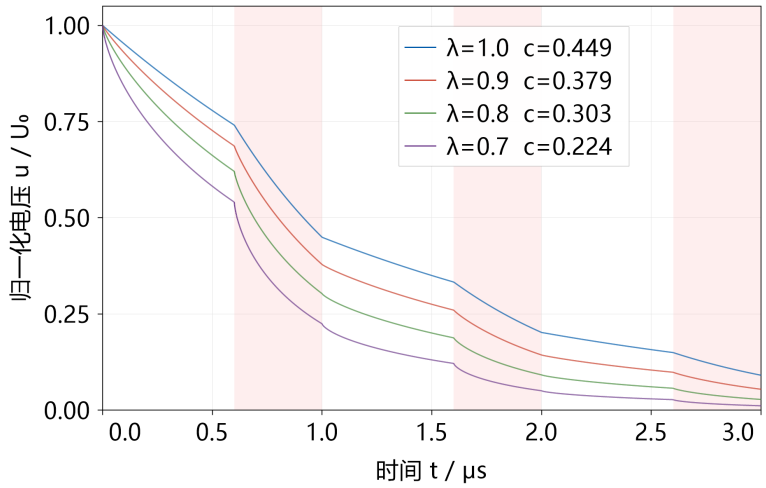


Figure 2. (ω,c)-periodic voltage waveforms of the free circuit for different conformable orders λ (red bands denote discharging intervals)
图 2. 自由电路在不同具适阶数 λ 下的 (ω,c)-周期电压波形(红色阴影为放电区间)

由表 2 可见，λ 减小使充电区间内电压更快趋于零、放电区间内衰减也更快，因此 c 减小、η 增大：$\lambda=1.0$ 时 $c=0.4493$、$\eta=79.8\%$，$\lambda=0.7$ 时 $c=0.2244$、$\eta=95.0\%$。

5.4. 恒压源下的稳态纹波

取 $U=1.0$ V 恒定，由推论 1 (即定理 2 取 $c=1$)得到严格周期稳态。图 3 给出 $\lambda=1.0$、0.9、0.8、0.7 时的稳态电压波形，表 3 给出相应的周期起点电压、峰值与纹波。

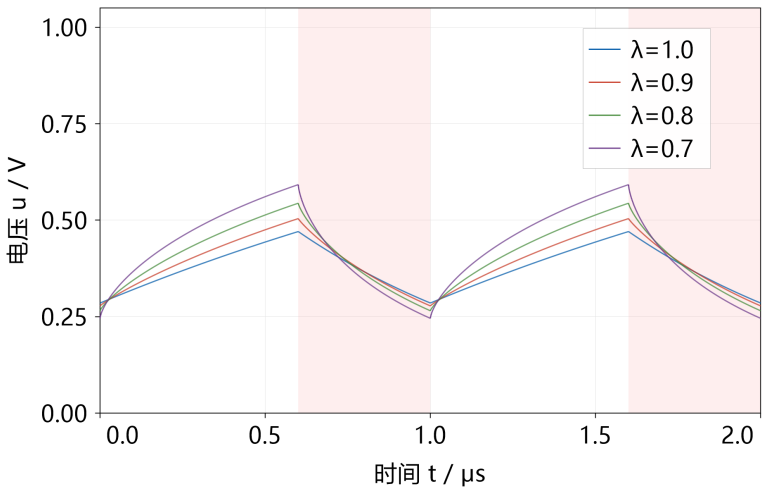


Figure 3. Strictly periodic steady-state voltage waveforms under a constant-voltage source for different λ (red bands denote discharging intervals)
图 3. 恒压源下不同具适阶数 λ 的严格周期稳态电压波形(红色阴影为放电区间)

由表 3 可见，λ 减小时充电区间内电压更快趋近源电压、峰值升高，同时放电保持比例 β 减小，二者共同使稳态纹波由 0.185 V 增大到 0.346 V：无序介质中更快的非指数弛豫使电容在较短的充电时间内充到更高电压，但放电损失也相应增大。

Table 3. Cycle-start voltage, peak voltage and ripple of the steady state under a constant source
表 3. 恒压源稳态的周期起点电压、峰值与纹波

λ	u_0^*/V	$u_{\max}$/V	Δu/V
1.0	0.2855	0.4707	0.1852
0.9	0.2780	0.5043	0.2263
0.8	0.2654	0.5441	0.2787
0.7	0.2458	0.5923	0.3465

注：表中时间均以 μs 为单位，电压均以 V 为单位；λ 为无量纲的具适阶数。

5.5. 参数敏感性

图 4 给出 c 随 λ 与 $\Delta_c/(RC)$ 的变化：$\Delta_c/(RC)$ 越大，充电区间内衰减越多、c 越小；c 随 λ 单调增大，并在 $\lambda\to 1$ 时趋于经典结果 $c=\mathrm{e}^{-[\Delta_c/(RC)+\Delta_d/(R_dC)]}$。此外，减小 R_d 会使 β 与 c 迅速下降，这为通过放电电阻调节衰减速率、以及由实测 c 反演 λ 提供了依据。

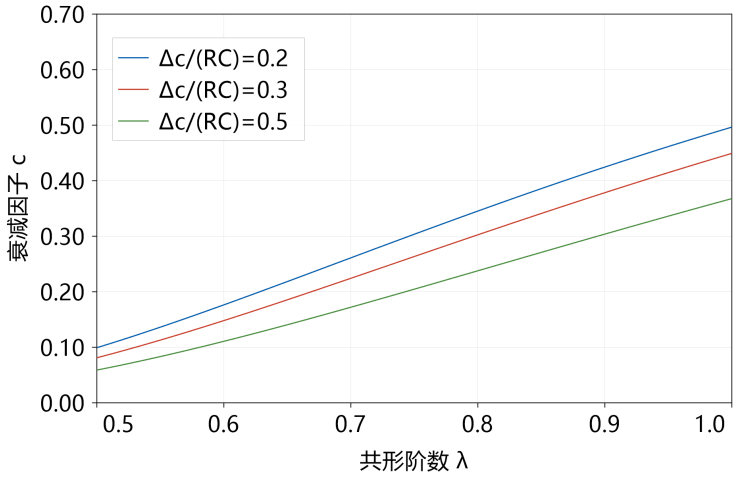


Figure 4. Attenuation factor c versus the conformable order λ for different charging-interval lengths
图 4. 衰减因子 c 随具适阶数 λ 的变化(不同充电区间长度)

此外，c 对放电电阻非常敏感：由 $\beta=\mathrm{e}^{-(\Delta_d/(R_dC))^{\lambda}/\lambda}$ 可知，减小 R_d (即加快放电)会使 β 与 c 迅速下降。这为通过放电电阻调节输出电压衰减速率提供了定量依据，也为由实测的每周期衰减因子反演介质的具适阶数 λ 提供了途径。

式(12)中的 c 只通过两个无量纲组合依赖电路参数。记 $x=\Delta_c/(RC)$、$y=\Delta_d/(R_dC)$，则由式(10)知 $A=x^{\lambda}/\lambda$、$\beta=\exp(-y^{\lambda}/\lambda)$，即式(12)中的 $c=\beta\mathrm{e}^{-A}$ 只依赖 x、y 与 λ。为在同一尺度上比较各参数对 c 的影响，定义参数 p 的相对灵敏度系数

$$S_p\equiv\frac{\partial\ln c}{\partial\ln p} \tag{23}$$

它表示参数 p 相对变化 1%时 c 的相对变化量。由式(12)直接求导可得

$$S_{\lambda}=\frac{x^{\lambda}(1-\lambda\ln x)\,y^{\lambda}(1-\lambda\ln y)}{\lambda} \tag{24}$$

其余五个系数为 $S_{\Delta c}=-x^{\lambda}$、$S_R=S_C=x^{\lambda}$、$S_{\Delta d}=-y^{\lambda}$、$S_{Rd}=y^{\lambda}$。表 4 给出本文参数下 $\lambda=1.0\sim0.7$ 时的取值。

Table 4. Relative sensitivity coefficients of the attenuation factor c
表 4. 衰减因子 c 的相对灵敏度系数

λ	S_λ	$S_{\Delta c}$	$S_R=S_C$	$S_{\Delta d}$	S_{Rd}
1.0	1.508	−0.300	0.300	−0.500	0.500
0.9	1.750	−0.338	0.338	−0.536	0.536
0.8	2.053	−0.382	0.382	−0.574	0.574
0.7	2.439	−0.431	0.431	−0.616	0.616

注：本文参数为 $\Delta_c=0.6$ μs、$\Delta_d=0.4$ μs、$R=2.0$ kΩ、$C=1.0$ nF、$R_d=0.8$ kΩ，对应 $x=0.3$、$y=0.5$；$S_{\Delta c}$、S_R、S_C、$S_{\Delta d}$、S_{Rd} 分别为 c 对 Δ_c、R、C、Δ_d、R_d 的灵敏度系数；λ 为无量纲具适阶数。

由表 4 可得三点结论。第一，$|S_\lambda|$ 最大：$\lambda\in[0.7,1.0]$ 时 $|S_\lambda|=1.51\sim2.44$，约为 $|S_{Rd}|=0.50\sim0.62$ 的 3.0~4.0 倍，也约为 $|S_{\Delta c}|=|S_R|=|S_C|=0.30\sim0.43$ 的 5 倍。因此在小扰动意义下 c 由 λ 主导，λ 的微小变化不会轻易被 R_d 的变化掩盖。第二，灵敏度的符号有明确的物理含义：对充电区间长度 Δ_c 与放电区间长度 Δ_d 的灵敏度为负(区间越长，衰减越充分)，对 R、C、R_d 的灵敏度为正(时间常数越大，衰减越慢)；由于 $R_d=0.8$ kΩ 小于 $R=2$ kΩ，c 对 Rd 的灵敏度约为对 R 的 1.67 倍。第三，λ 减小时各灵敏度系数的绝对值同步增大，说明介质越偏离指数律，c 对参数的变化越敏感。

但“掩盖”问题需要沿 c 的等值线定量回答。令 c 保持不变，由式(24)得 $\mathrm{d}R_d/R_d=-(S_\lambda/S_{Rd})(\mathrm{d}\lambda/\lambda)\approx(3.0\sim4.0)(\mathrm{d}\lambda/\lambda)$，即 R_d 的相对偏差必须达到 λ 相对偏差的 3~4 倍才能在 c 上与之完全抵消。若 R_d 的容差为 5%(10%)，则仅由 c 反演 λ 时 λ 的相对不可辨识度为 1.3%~1.7% (2.5%~3.3%)：只有当 R_d 的已知精度优于约 2%时，才能可靠分辨 λ 的 1%级变化；否则 λ 的微小变化会被 R_d 的不确定度掩盖。

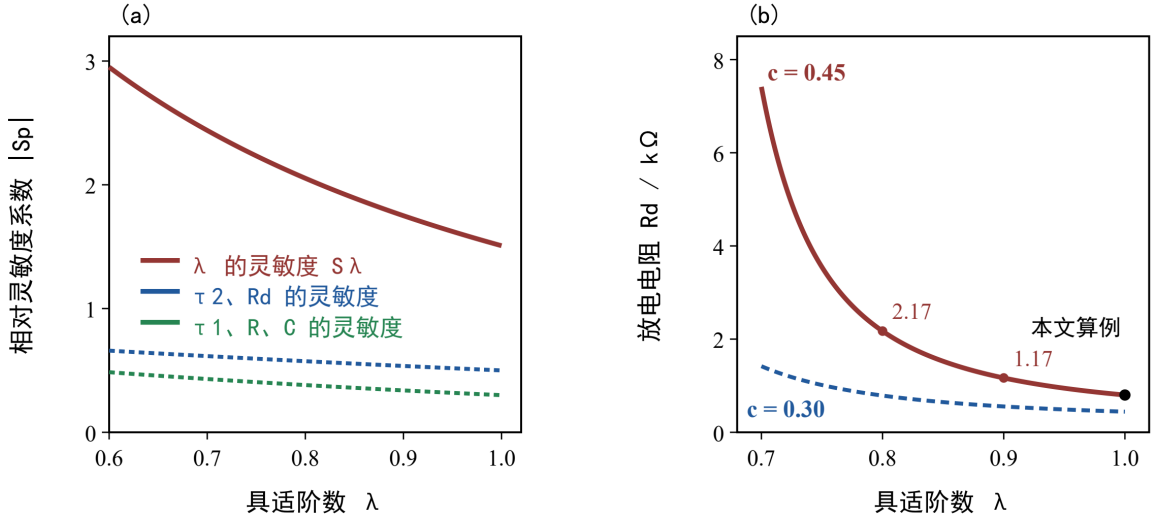


Figure 5. Relative sensitivities of the attenuation factor c and the level set of c in the (λ, R_d) plane
图 5. 衰减因子 c 的相对灵敏度与(λ, R_d)平面上的等值线($c=0.45$ 时 λ 与 R_d 不可分离)

更进一步，仅由 c 也不能同时唯一确定 λ 与 R_d。由式(12)，c 只依赖标量 $(x^{\lambda}+y^{\lambda})/\lambda$，而 x、y 中又包含

Δ_c、Δ_d、R、C、R_d五个电路参数。把λ与R_d同时视为待辨识量时，映射$(\lambda, R_d)\to c$的雅可比矩阵秩为1，属于结构性不可辨识[18] [19]：对任一c都存在一条(λ, R_d)等值线。图5(b)中，当λ由1.0减小到0.9、0.8、0.7时，要保持c不变，R_d必须由0.8 kΩ分别增大到1.17、2.17、7.42 kΩ (+46%, +172%, +827%)：较小的λ (更快的弛豫)总能被较大的R_d (更慢的放电)在c上等价补偿，单凭c无法唯一确定λ。

使辨识唯一且稳定的途径有三条。(i) 用独立测量减少待辨识参数的个数：以四线阻抗法标定R、C、R_d，由开关驱动信号读出Δ_c、Δ_d，此时$S_\lambda \neq 0$保证λ可由c唯一反演，并由式(24)给出其不确定度。(ii) 引入与c形状不同的第二个观测量，例如恒压源下的稳态纹波Δu。以$(c, \Delta u)$为观测、以(λ, R_d)为待辨识量时，归一化雅可比矩阵满秩[20]，条件数κ为14.9 ($\lambda = 1.0$)、16.9 ($\lambda = 0.9$)、20.4 ($\lambda = 0.8$)、27.0 ($\lambda = 0.7$)：(λ, R_d)在局部可辨识且解唯一，但观测误差在最坏方向上会被放大15~27倍，且λ越小越不利。(iii) 若只能测得c，则应把结果表述为λ的区间估计，并按5.6节给出的误差预算给出不确定度。

5.6. 由实测波形辨识衰减因子 c 的误差分析

以上分析均假定c已知。实际中c需由实测波形提取：把激励置零，记录N个周期的电容电压波形，取每个周期起点(充电区间起始时刻)的电压V_n，则$V_n = c^n V_0$；对$\ln V_n$关于周期序号n作最小二乘拟合，斜率即$\ln c$。这一过程的精度受采样时序与幅值噪声两类因素的限制。

“准确捕捉每个周期的起始电压”是第一类难点。由3.3节，$\lambda < 1$时充电区间起点处$\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$发散，波形具有竖直切线，因此采样时刻与真实周期起点之间的相位偏差δ会给周期起点电压带来乘性误差$1-\exp\left[-\left(\delta/(RC)\right)^{\lambda}/\lambda\right]$。取$\delta = 1\%\Delta_c$ (即6 ns)时，该幅值误差由$\lambda = 1.0$的0.30%增大到$\lambda = 0.9$、0.8、0.7的0.59%、1.19%、2.42%；若要求幅值误差不超过1%，则相位偏差必须小于20.1、10.7、4.8、1.7 ns，即分别不超过充电区间长度Δ_c的3.4%、1.8%、0.8%、0.3% (表5)。其原因是在周期起点附近幅值误差按$(\delta/(RC))^{\lambda}$变化，$\lambda < 1$时该误差远大于δ的一次方，故λ越小对采样时序的要求越苛刻。

还须区分系统偏差与随机噪声：若相位偏差不随周期变化(采样时钟与开关时钟同源)，它只是一个与n无关的乘性因子，不改变拟合斜率，因而不会使c产生偏差；真正的系统误差来自相位随周期的缓慢漂移。设$\delta_n = \delta_0 + \rho n$，则拟合斜率的一阶偏差为$\Delta\ln c \approx -\rho\delta_0^{\lambda-1}(RC)^{-\lambda}$。当$\delta_0 = 0.01\,\mu\mathrm{s}$ (约为充电区间长度的2%)、$\rho = 0.1\%\Delta_c$/周期(每周期漂移1 ns)时，40个周期内$\ln c$的相对偏差为2.5%、3.2%、3.9%、4.8% ($\lambda = 1.0, 0.9, 0.8, 0.7$)，按式(25)折算为$\lambda$的相对偏差为1.3%、1.8%、2.3%、3.0% (表5)。时基漂移引起的误差随λ减小而增大，其量级与元件容差相当，属于必须控制的系统误差。

第二类是幅值噪声。设电压噪声标准差为σ_v且与信号幅值无关，用整段记录的加权最小二乘(权重$w_n \propto V_n^2/\sigma_v^2$)拟合时$\ln c$的估计无偏，其标准差由MonteCarlo试验给出：在$\sigma_v = 0.1$ mV (1 V量程、12位ADC的量化噪声量级)、$V_0 = 1$ V，且只取$V_n > 10\sigma_v$的周期时，$\sigma(\ln c) = 1.6\times10^{-4}$、$2.1\times10^{-4}$、$2.9\times10^{-4}$、$4.2\times10^{-4}$ ($\lambda = 1.0$、0.9、0.8、0.7)，对应的σ_c/λ均不超过0.02%，比元件容差引起的不确定度小两个数量级，说明噪声本身不是限制因素。但随周期数增加V_n按c^n迅速衰减，可用周期数由$\lambda = 1.0$的9个降到$\lambda = 0.7$的5个；若只用首末两点估计$c = (V_{N-1}/V_0)^{1/(N-1)}$，$\sigma(\ln c)$将增大到$(0.8\sim1.3)\times10^{-2}$，比整段加权拟合差25~60倍。因此应当用整段加权最小二乘(或直接拟合解析波形)，而不是两点估计或等权平均。

上述三类误差按下式合成为λ的相对不确定度：

$$\frac{\sigma_\lambda}{\lambda} = \frac{1}{|S_\lambda|}\left[\sigma_{\ln\hat{c}}^2 + \sum\nolimits_{p\neq\lambda}\left(\frac{S_p\sigma_p}{p}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{25}$$

其中$\sigma(\ln c)$包含噪声引起的标准差与相位漂移引起的系统偏差，S_p与σ_p分别为参数p的相对灵敏度系数与标准差。汇总结果列于表5。

Table 5. Error budget for identifying c and λ from measured waveforms
表 5. 由实测波形辨识 c 与 λ 的误差预算

λ	$\lvert S_\lambda\rvert$	$\delta_{\max}$/ns	σ_λ/λ (噪声)	σ_λ/λ (元件容差 1%/5%)	σ_λ/λ (相位漂移)
1.0	1.508	20.1	0.01%	0.58%/2.9%	1.3%
0.9	1.750	10.7	0.01%	0.55%/2.7%	1.8%
0.8	2.053	4.8	0.01%	0.51%/2.6%	2.3%
0.7	2.439	1.7	0.02%	0.47%/2.3%	3.0%

注：σ_λ/λ 为 λ 的相对标准差(相位漂移栏为 40 个周期内的相对偏差)；$\delta_{\max}$ 为使周期起点电压的幅值误差不超过 1%所允许的相位偏差；噪声项取 $\sigma_v = 0.1$ mV、$V_0 = 1$ V 与整段加权最小二乘；元件容差栏对 Δ_c、Δ_d、R、C、R_d 统一取 1%与 5%；相位漂移取 $\rho = 0.1\%\Delta_c$/周期与 $\delta_0 = 0.01$ μs (约为充电区间长度的 2%)。

汇总起来，可以得到四条实用的测量要求：(1) 采样时钟与开关时钟应同源或同步触发，并把采样相位固定在周期起点附近、避免随周期漂移；若无法同步，应在整段记录上用含相位参数的模型同时拟合 λ、x、y 与相位 δ。(2) 采样率应足以分辨 Δ_c 与 Δ_d 内的时间尺度，建议采样间隔 $T_s \le 0.02\min(\Delta_c, \Delta_d)$，并对周期起点作局部模型插值，而不是简单取最接近的采样点。(3) 用加权最小二乘拟合整条 V_n 序列，充分利用全部可用周期。(4) 用 c 与稳态纹波 Δu 联合辨识 λ 与 R_d，以消除 5.5 节指出的等值线简并，并按式(25)报告 λ 的不确定度。

5.7. 非线性元件的影响

取 $\lambda = 1$ 与饱和非线性元件 $Q(u) = -\sigma M \tanh(u/M)$ ($M = 1$ V)，用迭代法求解映射 $u_{n+1} = F(u_n)$ 的不动点。图 6(a)给出 $\sigma = 0$、0.8、1.6 时的稳态波形，图 6(b)给出压缩因子 q 随 σ 的变化及其与 $q = 1$ 的交点。

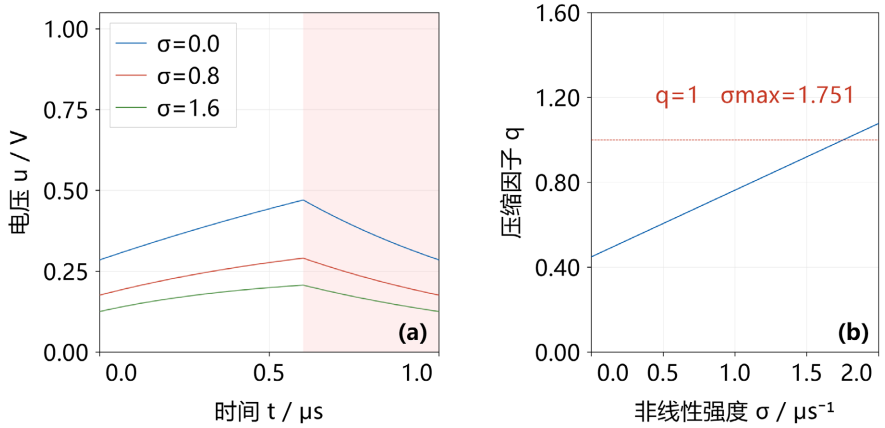


Figure 6. Nonlinear circuit: (a) Steady-state voltage waveforms for different nonlinearity strengths; (b) contraction factor q versus σ (the unit of σ is μs^{-1})
图 6. 非线性电路：(a) 不同非线性强度下的稳态电压波形；(b) 压缩因子 q 随 σ 的变化(σ 的单位为 μs^{-1})

压缩条件 $q < 1$ 要求 $\sigma < 1.75\ \mu s^{-1}$，故 $\sigma = 0.8$ 与 1.6 时的稳态解由压缩映射原理保证唯一。σ 增大时非线性元件的分流作用增强，周期起点电压由 0.286 V 降至 0.126 V。这为含二极管或变阻器的开关电路提供了定量判据：阈值以下周期解存在且唯一，超过阈值后需进一步分析多解与稳定性。

5.8. 与整数阶及 Caputo 分数阶模型的对比

本文模型与经典整数阶模型的关系是直接的：$\lambda \to 1$ 时全部结果退化为经典周期开关 RC 电路的结

果，表 2 与表 3 中 $\lambda=1.0$ 的一行即经典模型的精确解，可作为检验数值程序的基准。

作为对照，Caputo 导数(记为 $\mathrm{D}_{a+}^{\lambda}$)定义为

$$\mathrm{D}_{a+}^{\lambda}u(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\lambda)}\int_{a}^{t}(t-s)^{-\lambda}\,u'(s)\,\mathrm{d}s \tag{26}$$

其弛豫方程 $\mathrm{D}_{a+}^{\lambda}u=-\alpha(u-U)$ 的解为 Mittag-Leffler 函数 $u=U+(u_0-U)E_{\lambda}\left(-\alpha\tau^{\lambda}\right)$。为便于比较，两种模型取相同的广义速率系数 $\alpha=(RC)^{-\lambda}$、$\alpha_d=(R_dC)^{-\lambda}$，且 Caputo 导数按区段重置积分下限以适用于脉冲结构。

本文采用具适导数而不是 Caputo 导数，理由有三。第一，具适模型的弛豫是拉伸指数(Kohlrausch)律 $\mathrm{e}^{-\alpha\xi}$，而 Kohlrausch 型弛豫是无序、分形电介质介电弛豫最常用的经验规律[10] [13]；Caputo 模型的 Mittag-Leffler 弛豫具有幂律长尾，对 Kohlrausch 型介质形状不匹配。第二，具适导数是局部算子，开关切换时的状态重置只涉及切换时刻的局部值，单值矩阵与 (ω,c)-周期判据都有显式表达；Caputo 导数含记忆核，每个区间的解依赖全部历史，须额外界定记忆重置规则，否则缩放周期结构被破坏[17]。第三，两者预言可定量区分(表 6)：相同速率系数下，$\lambda=0.7$ 时每周期衰减因子分别为 0.2244 与 0.3522，纹波分别为 0.3465 V 与 0.2487 V ($\lambda=1$时两者一致)。故测得衰减因子或纹波即可判别介质更接近哪类弛豫；对 Kohlrausch 型介质，具适最小模型是合适的选择。

Table 6. Comparison between the conformable-derivative model and the Caputo-derivative model
表 6. 具适导数模型与 Caputo 导数模型的比较

λ	c (具适)	c (Caputo)	$\Delta u/V$ (具适)	$\Delta u/V$ (Caputo)
1.0	0.4493	0.4493	0.1852	0.1852
0.9	0.3785	0.4125	0.2263	0.2074
0.8	0.3027	0.3801	0.2787	0.2288
0.7	0.2244	0.3522	0.3465	0.2487

注：表中时间均以 μs 为单位；两种模型取相同的广义速率系数 $\alpha=(RC)^{-\lambda}$、$\alpha_d=(R_dC)^{-\lambda}$。

5.9. 讨论与局限

本文模型仍有几点需要说明。第一，具适导数是局部、唯象的算子，其速率系数的量纲为 $(\text{时间})^{-\lambda}$，数值与时间单位有关，不同 λ 的比较应在同一无量纲时间基准(本文取 ω)下进行。第二，本文把放电回路等效为恒定电阻，忽略了导通电阻随时间的变化，更精细的描述可用 $R_d(t)$。第三，本文讨论的 (ω,c)-周期解是缩放周期解，恒压源电路对应的物理稳态是严格周期解($c=1$)。

测量层面的局限同样需要注意。实际开关器件的导通电阻随温度与电流变化，其变化会与 λ 的变化在 c 上部分耦合(5.5 节)，因此实验辨识时应同时记录温度并尽量保持电流恒定；本文还假设激励为恒压源或按已知规律缩放，若激励本身含有纹波或漂移，也会以与 x^{λ} 相同的量级进入 c。此外，本文的误差预算只考虑了高斯白噪声与恒定的相位漂移，更一般的时基抖动、ADC 非线性与元件温漂需要用 MonteCarlo 或贝叶斯方法处理，这将是后续工作。

6. 结论

本文建立了周期开关 RC 电路的具适非瞬时脉冲模型，并给出了其 (ω,c)-周期解分析。主要结论如下：

(1) 给出了由具适时间重参数化得到的充电方程(速率系数 $\alpha=(RC)^{-\lambda}$)与关于时间连续的放电函数：前者量纲自洽、$\lambda\to 1$时退化为经典 RC 方程，后者保证电容电压处处连续；并指出$\lambda<1$时波形在充电区间起点具有竖直切线。

(2) 证明单值矩阵为$V=\mathrm{diag}\left(\beta_k \mathrm{e}^{-\alpha_k \Delta_c^{\lambda}/\lambda}\right)$，据此给出$(\omega,c)$-周期解的存在唯一性判据、显式波形与稳定性结论：自由电路的每周期衰减因子$c=\beta e^{-A}$由电路参数完全确定，恒压源下存在唯一且全局吸引的严格周期稳态。

(3) 数值结果表明λ减小会显著加快弛豫(λ由 1.0 减至 0.7 时 c 由 0.449 减至 0.224)；对含饱和非线性元件的电路给出了保证解唯一的显式阈值。

(4) 本文模型在$\lambda\to 1$时退化为经典 RC 电路，与 Caputo 模型的对比表明它对应无长尾的拉伸指数弛豫；后续工作可考虑含长尾记忆的介质、导通电阻随时间变化的放电模型以及多支路耦合网络。

(5) 给出了 c 的灵敏度与可辨识性分析：$|S_\lambda|$为$|S_{Rd}|$的 3~4 倍，λ 是主导参数；但仅由 c 不能同时唯一确定 λ 与 R_d(两者构成等值线，λ 由 1.0 减至 0.7 时 R_d 需由 0.8 kΩ 增至 7.42 kΩ 才能保持 c 不变)，需借助稳态纹波等第二观测量(归一化雅可比条件数 14.9~27.0)或独立标定元件；实测提取 c 时相位偏差是主要误差源(λ = 0.7 时 1%幅值误差只允许 1.7 ns 的相位偏差，0.1%Δ_c/周期的相位漂移会引起约 3%的 λ 相对偏差)，而整段加权最小二乘可把噪声的影响压到 0.02%以下。

参考文献

[1] Hernández, E. and O'Regan, D. (2012) On a New Class of Abstract Impulsive Differential Equations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **141**, 1641-1649. https://doi.org/10.1090/s0002-9939-2012-11613-2

[2] Wang, J., Li, M. and O'Regan, D. (2019) Lyapunov Regularity and Stability of Linear Non-Instantaneous Impulsive Differential Systems. *IMA Journal of Applied Mathematics*, **84**, 712-747. https://doi.org/10.1093/imamat/hxz012

[3] Li, M., Wang, J. and O'Regan, D. (2017) Existence and Ulam's Stability for Conformable Fractional Differential Equations with Constant Coefficients. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **42**, 1791-1812. https://doi.org/10.1007/s40840-017-0576-7

[4] Wang, J., Fečkan, M. and Tian, Y. (2017) Stability Analysis for a General Class of Non-Instantaneous Impulsive Differential Equations. *Mediterranean Journal of Mathematics*, **14**, Article No. 46. https://doi.org/10.1007/s00009-017-0867-0

[5] Agaoglou, M., Fečkan, M. and Panagiotidou, A.P. (2020) Existence and Uniqueness of (ω,c)-Periodic Solutions of Semilinear Evolution Equations. *International Journal of Dynamical Systems and Differential Equations*, **10**, 149-166. https://doi.org/10.1504/ijdsde.2020.106027

[6] Alvarez, E., Gómez, A. and Pinto, M. (2018) (ω,c)-Periodic Functions and Mild Solutions to Abstract Fractional Integro-Differential Equations. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, No. 16, 1-8. https://doi.org/10.14232/ejqtde.2018.1.16

[7] Li, M., Wang, J. and Feckan, M. (2018) (ω,c)-Periodic Solutions for Impulsive Differential Systems. *Communications in Mathematics*, **21**, 35-45.

[8] Liu, K. (2022) Stability Analysis for (ω,c)-Periodic Non-Instantaneous Impulsive Differential Equations. *AIMS Mathematics*, **7**, 1758-1774. https://doi.org/10.3934/math.2022101

[9] Ding, Y. and Liu, K. (2024) Periodic Solutions for Conformable Non-Autonomous Non-Instantaneous Impulsive Differential Equations. *Mathematica Slovaca*, **74**, 1489-1506. https://doi.org/10.1515/ms-2024-0108

[10] Jonscher, A.K. (1999) Dielectric Relaxation in Solids. *Journal of Physics D*: *Applied Physics*, **32**, R57-R70. https://doi.org/10.1088/0022-3727/32/14/201

[11] Ngai, K.L. (2011) Relaxation and Diffusion in Complex Systems. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7649-9

[12] Metzler, R. and Klafter, J. (2000) The Random Walk's Guide to Anomalous Diffusion: A Fractional Dynamics Approach. *Physics Reports*, **339**, 1-77. https://doi.org/10.1016/s0370-1573(00)00070-3

[13] Kremer, F. and Schönhals, A. (2003) Broadband Dielectric Spectroscopy. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-56120-7

[14] Abdeljawad, T. (2015) On Conformable Fractional Calculus. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **279**, 57-66. https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.10.016

[15] Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A. and Sababheh, M. (2014) A New Definition of Fractional Derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **264**, 65-70. https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.01.002

[16] Ortigueira, M.D. and Tenreiro Machado, J.A. (2015) What Is a Fractional Derivative? *Journal of Computational Physics*, **293**, 4-13. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2014.07.019

[17] Hilfer, R. (2000) Applications of Fractional Calculus in Physics. World Scientific. https://doi.org/10.1142/3779

[18] Kay, S.M. (1993) Fundamentals of Statistical Signal Processing, Volume I: Estimation Theory. Prentice Hall.

[19] Ljung, L. (1999) System Identification: Theory for the User. 2nd Edition, Prentice Hall.

[20] Pintelon, R. and Schoukens, J. (2012) System Identification: A Frequency Domain Approach. 2nd Edition, Wiley. https://doi.org/10.1002/9781118287422