Modern Physics 现代物理, 2026, 16(6), 328-339
Published Online November 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/mp
https://doi.org/10.12677/mp.2026.166033

Hans汉斯

交变磁性驱动的非厄米高阶拓扑绝缘体与双极趋肤效应

——基于范德华异质结的理论模型与数值模拟

何豪波

贵州大学大数据与信息工程学院，贵州 贵阳

收稿日期：2026年10月19日；录用日期：2026年11月12日；发布日期：2026年11月18日

摘　要

近年来，非厄米趋肤效应(Non-Hermitian Skin Effect, NHSE)的发现为开放量子系统中的拓扑物态研究开辟了全新方向。与此同时，交变磁性(Altermagnetism)作为一种兼具零净磁化与动量依赖自旋劈裂的新型磁性相，在凝聚态物理中引发了广泛关注。本文从理论上提出并系统研究了一个由d波交变磁体与二维拓扑绝缘体近邻耦合构成的非厄米晶格模型。通过连续矩阵展开、有效哈密顿量推导与有限尺度数值对角化相结合的方法，我们系统刻画了交变磁交换场对系统复能谱拓扑结构的调控规律。研究发现：在弱交变磁性区间，系统保持一阶量子自旋霍尔绝缘相，边界上存在一对helical边缘态；当交变磁耦合强度J超过临界值$J_c \approx 1.2t$时，一阶边缘态发生拓扑重构，逐渐局域化并最终演变为分布在正方晶格对角线上的高阶角态。特别地，在非互易跃迁γ与交变磁性J的协同作用下，系统展现出独特的双极趋肤–拓扑耦合效应——具有正虚部能量的态密度极大值局域在晶格左下角，而具有负虚部能量的态密度极大值局域在右上角，两个极点沿对角线呈反对称分布。我们进一步通过谱缠绕数计算与非布洛赫能带分析，揭示了这一双极现象的拓扑起源，并提出了基于范德华异质结与微波光子晶体的实验验证方案。本研究不仅为设计非厄米高阶拓扑器件提供了理论框架，也为在人工超材料平台中实现可重构拓扑保护输运提供了新路径。

关键词

非厄米拓扑，交变磁性，高阶拓扑绝缘体，趋肤效应，范德华异质结

文章引用: 何豪波. 交变磁性驱动的非厄米高阶拓扑绝缘体与双极趋肤效应[J]. 现代物理, 2026, 16(6): 328-339.
DOI: 10.12677/mp.2026.166033

Non-Hermitian Higher-Order Topological Insulators Driven by Altermagnetism and the Bipolar Skin Effect

—Theoretical Model and Numerical Simulations Based on van der Waals Heterostructures

Haobo He

College of Big Data and Information Engineering, Guizhou University, Guiyang Guizhou

Received: October 19, 2026; accepted: November 12, 2026; published: November 18, 2026

Abstract

Recently, the discovery of the non-Hermitian skin effect (NHSE) has opened up a new avenue for studying topological states in open quantum systems. Meanwhile, altermagnetism, as a novel magnetic phase featuring zero net magnetization yet momentum-dependent spin splitting, has attracted considerable attention in condensed matter physics. In this work, we theoretically propose and systematically investigate a non-Hermitian lattice model consisting of a d-wave altermagnet proximally coupled to a two-dimensional topological insulator. Through continuum matrix expansion, effective Hamiltonian derivation, and finite-size numerical diagonalization, we systematically characterize how the altermagnetic exchange field modulates the complex-band topology. We find that in the weak altermagnetic regime, the system maintains the first-order quantum spin Hall phase with a pair of helical edge states; when the altermagnetic coupling J exceeds a critical value $J_c \approx 1.2t$, the first-order edge states undergo topological reconstruction, gradually localizing and eventually evolving into higher-order corner states distributed along the diagonals of the square lattice. In particular, under the synergistic effect of non-reciprocal hopping γ and altermagnetism J, the system exhibits a distinctive bipolar skin-topological effect: density-of-states maxima with positive imaginary energy localize at the lower-left corner, while those with negative imaginary energy localize at the upper-right corner, exhibiting antisymmetric distribution along the diagonal. We further reveal the topological origin of this bipolar phenomenon through spectral winding number calculations and non-Bloch band analysis, and propose experimental verification schemes based on van der Waals heterostructures and microwave photonic crystals. This work not only provides a theoretical framework for designing non-Hermitian higher-order topological devices, but also offers a new route toward reconfigurable topological protected transport in artificial metamaterial platforms.

Keywords

Non-Hermitian Topology, Altermagnetism, Higher-Order Topological Insulator, Skin Effect, van der Waals Heterostructure

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

拓扑绝缘体作为一种全新的量子物态，因其体内绝缘、边缘导电的独特性质而成为近二十年来凝聚态物理领域最活跃的研究方向之一[1]。自 2005 年 Kane 和 Mele 在石墨烯模型中理论预言量子自旋霍尔效应(Quantum Spin Hall Effect, QSHE)以来[2]，拓扑能带理论经历了飞速发展。2006 年，Bernevig、Hughes 和 Zhang (BHZ)从理论上提出 HgTe/CdTe 量子阱体系可以实现量子自旋霍尔效应[3]，并在次年由 Molenkamp 实验组通过输运测量直接证实[4]。这一突破性进展标志着拓扑绝缘体研究从理论构想走向了实验验证。此后，拓扑能带理论迅速扩展到三维拓扑绝缘体[5]、拓扑晶体绝缘体[6]、拓扑半金属(包括 Dirac 半金属[7]、Weyl 半金属[8])以及马约拉纳费米子体系[9]等多个前沿方向，形成了现代凝聚态物理的一个核心分支。

传统的拓扑绝缘体研究均局限于厄米系统，即假设系统与外界环境之间不存在能量交换，哈密顿量为厄米算符，能谱为实数。然而，真实的量子系统不可避免地与环境发生耦合——无论是光学微腔中的光子损耗与增益[10]、凝聚态体系中的电子–声子相互作用[11]，还是电路网络中的电阻耗散[12]，非厄米效应无处不在。早期研究中，非厄米效应通常被视为需要消除的干扰或噪声。但近十年来，物理学家逐渐认识到，非厄米系统本身蕴含着厄米系统中不存在的丰富物理。其中最引人注目的发现便是非厄米趋肤效应(Non-Hermitian Skin Effect, NHSE) [13]。

非厄米趋肤效应是指在具有非互易跃迁(non-reciprocal hopping)的开放量子系统中，体态本征波函数在开边界条件下(Open Boundary Condition, OBC)不再均匀扩展于整个体内，而是指数型局域在系统某一侧边界的现象。这一效应从根本上动摇了传统拓扑物理的基石——体–边对应关系(bulk-boundary correspondence)。在厄米系统中，拓扑不变量由周期边界条件(Periodic Boundary Condition, PBC)下的体能带决定，且这一拓扑性质保证了边界上无能隙态的存在。然而在非厄米系统中，PBC 下的体能带拓扑无法预测 OBC 下的边界态行为，因为趋肤效应使得绝大多数本征态都被推到了边界上[14]。为解决这一理论困难，Yao 和 Wang 提出了非布洛赫能带理论(non-Bloch band theory) [15]，通过复数动量空间中的广义布里渊区(Generalized Brillouin Zone, GBZ)重新定义了非厄米系统的拓扑不变量。此后，非厄米拓扑物态研究迅速发展，涌现出非厄米拓扑绝缘体[16]、非厄米拓扑半金属[17]、高阶非厄米拓扑相[18]以及非厄米拓扑激光[19]等丰富的研究方向。在实验方面，趋肤效应先后在光子晶体[20]、声学超材料[21]、电路网络[22]以及冷原子系统[23]中被观测到。

另一方面，交变磁性(Altermagnetism)作为一种新型磁性相，近年来也引发了凝聚态物理界的广泛关注[24]。与铁磁体具有宏观净磁化不同，交变磁体在实空间中自旋反平行排列，其净磁化为零，因此不会像铁磁体那样产生漏磁场或导致自旋退相干。但与此同时，交变磁体在动量空间中表现出显著的自旋劈裂效应——不同自旋分支的能带在特定动量方向上发生劈裂，呈现出交替变号的波瓣结构。2022 年，Šmejkal 等人在《自然·材料综述》上系统阐述了交变磁性的物理内涵与应用前景，指出 MnO、FeRh、RuO_2 等经典材料实际上是交变磁体而非传统意义上的反铁磁体。由于兼具零净磁化与自旋劈裂的独特性质，交变磁体在低功耗自旋电子学器件、拓扑磁电耦合以及量子计算中具有广阔的应用前景。

尽管非厄米拓扑与交变磁性各自都取得了重要进展，但二者的交叉研究仍处于起步阶段。一个自然而深刻的问题是：当具有非互易跃迁的非厄米拓扑绝缘体与交变磁体通过范德华异质结近邻耦合时，会产生哪些新奇的物理现象？交变磁交换场能否有效调控非厄米系统的拓扑相变？趋肤效应与高阶拓扑态之间存在怎样的耦合机制？这些问题不仅具有重要的基础理论意义，也为开发新型非厄米拓扑器件提供了设计思路。

本文基于扩展的 BHZ 模型，引入 d 波对称性的交变磁交换场与沿 x 方向的非互易跃迁项，构建了一

个二维非厄米高阶拓扑绝缘体晶格模型。通过连续模型解析分析、非布洛赫能带计算与有限尺度数值对角化相结合的方法，我们系统研究了交变磁性强度 J 对系统拓扑性质的调控规律，揭示了双极趋肤–拓扑耦合效应的物理机制。本文的组织结构如下：第 2 节介绍理论模型与晶格哈密顿量；第 3 节分析复能谱色散与非厄米拓扑不变量；第 4 节讨论交变磁性驱动的相变与双极趋肤效应；第 5 节探讨潜在的实验实现路径；第 6 节给出结论与展望。

2. 理论模型与晶格哈密顿量

2.1. 厄米拓扑绝缘体底层模型

我们采用扩展的 Bernevig-Hughes-Zhang (BHZ)模型描述底层的二维拓扑绝缘体，模型中涉及的主要符号及其物理意义见表 1。在自旋轨道耦合基矢下，其有效 $k\cdot p$ 哈密顿量为：

$$H_{\mathrm{TI}}(\boldsymbol{k})=\left[m-t\left(\cos k_x+\cos k_y\right)\right]\sigma_z\otimes s_0+A_x\sin k_x\sigma_x\otimes s_z+A_y\sin k_y\sigma_y\otimes s_0 \tag{1}$$

其中 σ_z 为轨道空间(E/H)的泡利矩阵，s_z 为自旋空间的泡利矩阵，m 为 Dirac 质量参数，t 为最近邻跃迁振幅，A_x 和 A_y 分别为 x 和 y 方向的 Dirac 质量项，表征轨道间耦合强度。在各向同性近似下取 $A_x=A_y=A$。当 $|m|<2t$ 时，系统处于量子自旋霍尔绝缘相，体能隙打开，同时在边界上存在一对 helical 边缘态——两个自旋相反的电子沿相反方向运动，形成无耗散的自旋电流通道[3]。当 $|m|>2t$ 时，系统进入平庸绝缘相。质量参数 m 的符号变化对应于拓扑相变发生的临界点。

Table 1. Main symbols and physical meanings
表 1. 主要符号及物理意义

符号	物理含义	单位/说明
m	Dirac 质量参数	无量纲(以 t 为单位)
A	Dirac 速度参数	无量纲(以 t 为单位)
t	最近邻跃迁振幅	能量单位(取 $t=1$)
γ	非互易跃迁强度	无量纲(以 t 为单位)
J	交变磁交换耦合强度	无量纲(以 t 为单位)
σ	轨道泡利矩阵(E/H)	无量纲
s	自旋泡利矩阵	无量纲
$E(k)$	系统本征能量	复数(Re = 能量，Im = 增益/损耗)
ν	复能谱缠绕数	拓扑不变量(0 或±1)
$L_x\times L_y$	正方晶格尺寸	元胞数

2.2. 非厄米项：非互易跃迁

为了引入非厄米性，我们在 x 方向加入不对称跃迁项。具体而言，从格点 (i,j) 跃迁到 $(i+1,j)$ 的振幅为 $t+\delta t$，而从 $(i+1,j)$ 跃迁到 (i,j) 的振幅为 $t-\delta t$。这种不对称跃迁在动量空间中对应的非厄米项为：

$$H_{\mathrm{NH}}(k_x)=i\gamma\sin k_x\sigma_0\otimes s_0 \tag{2}$$

其中 $\gamma=2\delta t$ 为非互易强度参数，i 为虚数单位。该哈密顿量不再满足厄米性条件 $H^{\dagger}\neq H$，因此其本征能量 $E(k)$一般为复数，虚部 Im(E)表征了对应的增益(Im(E) > 0)或损耗(Im(E) < 0)特性。在真实物理平台中，这种非互易跃迁可以通过多种方式实现：在有源微波光子晶体中，通过在相邻谐振器之间加入不对称的

增益/损耗链路[20]；在 RLC 电路网络中，利用运算放大器的单向放大特性[22]；在冷原子光晶格中，通过 Floquet 调制打破跃迁对称性[23]。

2.3. 交变磁交换场：d 波对称性

根据交变磁体的自旋–动量锁定对称性，d 波对称性要求交换场在动量空间中沿 k_x 和 k_y 方向交替变号。对于正方晶格，d 波交换场的标准形式为：

$$H_{\mathrm{AM}}(\boldsymbol{k}) = J\left(\cos k_x - \cos k_y\right)\sigma_0 \otimes s_z \tag{3}$$

其中 J 为交变磁耦合强度，s_z 为自旋泡利矩阵。该形式具有以下对称性特征：(1) 在 $k_x = \pm k_y$ 的对角线上，$\cos k_x = \cos k_y$，因此交换场 $H_{\mathrm{AM}} = 0$，自旋简并线沿对角线分布；(2) 在 k_x 轴($k_y = 0$)上，$H_{\mathrm{AM}} = J\left(\cos k_x - 1\right)$，交换场达到沿 x 方向的极大值；(3) 在 k_y 轴($k_x = 0$)上，$H_{\mathrm{AM}} = J\left(1 - \cos k_y\right)$，交换场沿 y 方向达到与 x 方向大小相等、符号相反的值。这种沿对角简并、沿轴相反的动量依赖关系正是 d 波交变磁性的标志性特征。物理上，该交换场来源于拓扑绝缘体薄膜与交变磁体衬底之间的范德华近邻效应——交变磁体的自旋劈裂通过界面磁交换作用传递到拓扑绝缘体中，在不引入宏观净磁化的情况下调制拓扑绝缘体的能带结构。

2.4. 总哈密顿量与晶格离散化

总有效哈密顿量为三者之和：

$$H(\boldsymbol{k}) = H_{\mathrm{TI}}(\boldsymbol{k}) + H_{\mathrm{NH}}(k_x) + H_{\mathrm{AM}}(\boldsymbol{k}) \tag{4}$$

在数值计算中，我们将该连续模型离散化为 $L_x \times L_y$ 的正方晶格模型，所采用的数值模拟参数见表 2。最近邻跃迁参数取 $t = 1$(作为能量单位)，$A = 0.5$，$m = -0.5$(确保底层 BHZ 模型处于拓扑相)。非互易强度 γ 和交变磁耦合 J 作为可调参数进行扫描。对于圆柱几何计算(沿 x 方向 PBC，沿 y 方向 OBC)，晶格尺寸取 $L_x = 200$ 个元胞以保证动量分辨率，$L_y = 40$ 个元胞。对于全开边界条件(OBC)计算，取 $L_x = L_y = 60$ 个元胞。所有数值对角化均通过 LAPACK 库中的稠密矩阵特征值求解器完成。

Table 2. Numerical parameters used in simulations
表 2. 数值模拟中使用的参数

参数	符号	取值	说明
最近邻跃迁	t	1.0	能量单位基准
Dirac 速度	A	0.5	BHZ 模型参数
Dirac 质量	m	−0.5	确保底层处于拓扑相
圆柱几何尺寸	$L_x \times L_y$	200 × 40	x 方向 PBC，y 方向 OBC
全开边界尺寸	$L \times L$	60 × 60	二维正方晶格
非互易扫描范围	γ	0~1.5	以 t 为单位
交变磁耦合扫描范围	J	0~2.5	以 t 为单位

3. 复能谱色散与非厄米拓扑

3.1. 圆柱几何与非布洛赫能带

为了研究非厄米系统的拓扑性质，我们首先采用圆柱几何——沿 x 方向施加周期边界条件(PBC)，沿 y 方向施加开边界条件(OBC)。在该几何下，x 方向动量 k_x 为好量子数，哈密顿量可以按 k_x 分块对角化，

每个 k_x 对应一个 $\left(L_y\times 4\right)\times\left(L_y\times 4\right)$ 的矩阵。y 方向的开边界使得趋肤效应能够将波函数局域在上下边界，从而可以清晰地分辨体态与边界态。

当 $\gamma=0$ (厄米极限)时，系统退化为普通的 BHZ 拓扑绝缘体，能谱 $E\left(k_x\right)$ 为实数。在体能隙中，可以清晰地看到一对 helical 边缘态色散曲线，分别局域在 $y=1$ 和 $y=L_y$ 的上下边界上，形成典型的量子自旋霍尔边缘态特征。当 $\gamma\neq 0$ 时，能谱变为复数。我们首先关注复能谱在复平面上的形状。在弱非互易区间($\gamma\ll t$)，复能谱形成一个闭合的环面(spectral loop)，环绕着参考能量点 $E_{\text{ref}}=0$。这个环面在复平面上的缠绕数(winding number)即为非厄米系统的拓扑不变量：

$$\nu=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \mathrm{d}k_x\,\frac{\partial}{\partial k_x}\ln\det\left[H\left(k_x\right)-E_{\text{ref}}\right] \tag{5}$$

其中积分路径 C 为广义布里渊区(GBZ)在复 k_x 平面上的闭合曲线。当 $\nu=0$ 时，环面不包围原点，系统为平庸相；当 $\nu=\pm 1$ 时，环面逆时针(或顺时针)环绕原点一周，系统为非厄米拓扑相，边界上存在保护的边界态。我们计算了不同 γ 值下的谱缠绕数。结果表明，在 $\gamma<\gamma_c\approx 0.8t$ 的范围内，$\nu=\pm 1$ (两个自旋分支各贡献±1)，系统保持非厄米拓扑相。当 $\gamma>\gamma_c$ 时，复能谱环面发生拓扑重构——环面不再包围原点，缠绕数突变为 $\nu=0$，系统进入非厄米平庸相。

3.2. 交变磁性对拓扑相变的调控

图 1 给出了非厄米系统的复能谱色散结构与缠绕数随非互易强度 γ 的演化规律。如图 1(a)所示，复能谱在复平面上形成闭合环面，其环绕参考能量点的缠绕数 ν 即为非厄米拓扑不变量；图 1(b)展示了缠绕数 ν 随 γ 增大从 1 突变为 0 的拓扑相变过程。接下来我们引入交变磁交换场 J，研究其对系统拓扑性质的调控作用。首先考虑 γ 固定的情况，扫描 J 从 0 增大到较大值。数值结果揭示了丰富的相变序列：当 $J=0$ 时，系统处于一阶非厄米量子自旋霍尔相，边缘态局域在一维边界上。随着 J 从 0 开始增大，d 波交换场开始重塑边缘态的色散关系。在弱交变磁性区间($J<0.5t$)，边缘态仍然主要沿一维边界扩展，但交换场导致边缘态在不同边界上的色散发生分化——沿 x 方向的上下边缘与沿 y 方向的左右边缘开始呈现不同的能隙和群速度。

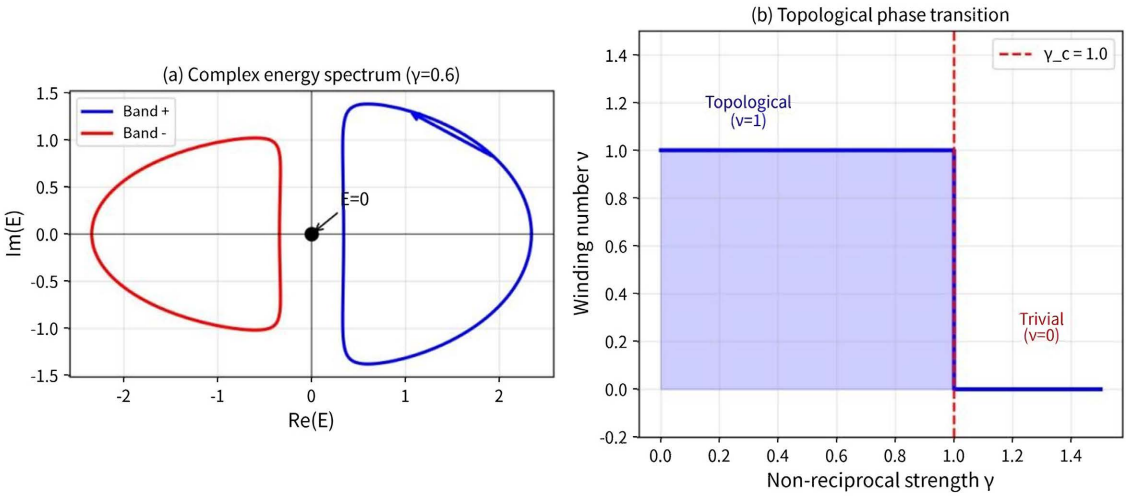


Figure 1. Complex energy spectrum and winding number transition
图 1. 复能谱色散与缠绕数相变

为了更清晰地刻画复能谱在临界区的拓扑重构，图 2 给出了圆柱几何下复能谱随交变磁耦合 J 跨越

临界区的演化($\gamma = 0.3t$)。当 $J = 0$ 时，复能谱在原点交叉，对应沿边界传播的一阶 helical 边缘态；随着 J 增大，原点附近的边缘态逐渐被压缩，并在临界耦合 $J_c \approx 1.2t$ 附近发生能隙的关闭与重开，在 $J > 1.5t$ 后形成相互分离的零能角态。

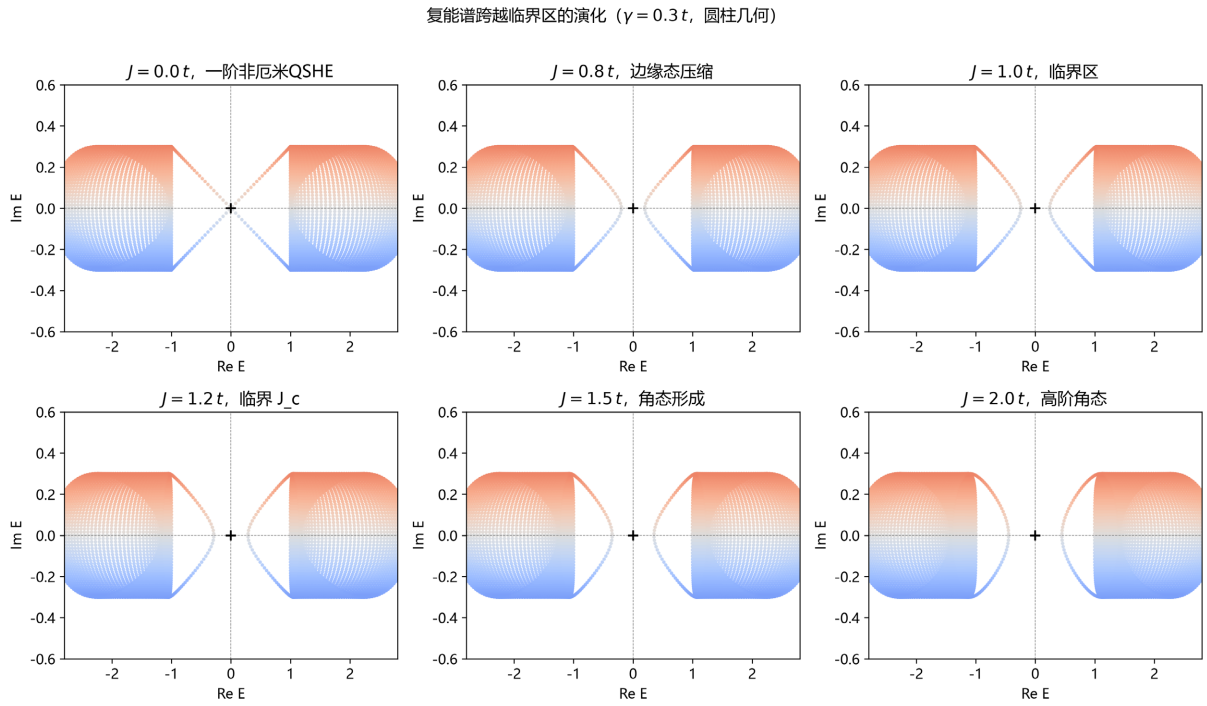


Figure 2. Complex energy spectrum evolution across the critical region
图 2. 复能谱跨越临界区的演化

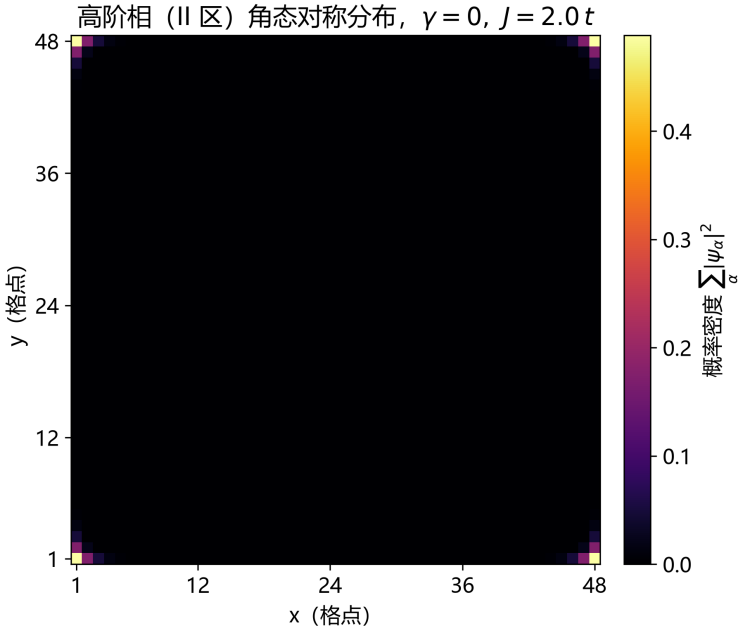


Figure 3. Spatial probability density of four symmetric corner states in the high-order phase
图 3. 高阶相中四个角态的空间概率密度分布(四角对称)

当 J 继续增大到 $J \approx 0.8t$ 时，边缘态开始沿边界发生聚集——波函数不再均匀分布在整个边界上，而是向边界的交点(即晶格的角点)方向压缩。这是高阶拓扑相变的前兆。当 J 超过临界值 $J_c \approx 1.2t$ 时，一维边缘态完全消失，取而代之的是四个局域在晶格角上的零能态。这标志着系统发生了从一阶拓扑相到二阶(高阶)拓扑相的量子相变。高阶拓扑绝缘体的标志性特征是：d 维系统中存在$(d-2)$维的边界态——对于二维系统，高阶拓扑态局域在零维的角上，称为角态(corner states) [18]。

这一相变的物理机制在于：d 波交变交换场沿 k_x - k_y 方向引入了额外的能隙关闭–重开过程。在动量空间中，当 $\cos k_x = \cos k_y$ 时交换场为零，而在其他方向上交换场打开了额外的能隙。这种各向异性的能隙调制导致边缘态不再沿整个边界扩展，而是被压缩到对角线交点处——即晶格的角上。从拓扑分类角度看，交变磁性的引入等效于在系统中加入了一个额外的对称性保护，使得拓扑不变量从一阶的 Z 分类转变为高阶的 Z_2 分类。

在全开边界条件下，高阶相(II 区)中四个零能角态的空间概率密度如图 3 所示。与双极趋肤效应中角态沿对角线的不对称局域不同(见图 4)，当 $\gamma = 0$ 、$J = 2.0t$ 时，四个角态在正方形晶格的四个角点上完全对称地分布，对每个角点附近的局域缺陷具有拓扑保护，构成了高阶拓扑相的特征指纹。

4. 双极趋肤–拓扑耦合效应

4.1. 全开边界条件下的波函数重构

前面的分析基于圆柱几何，沿 x 方向的 PBC 掩盖了 x 方向边界上的趋肤效应。为了全面揭示非互易跃迁与高阶拓扑态的耦合机制，我们进一步在二维全开边界条件(OBC)下对角化了 60 × 60 的正方晶格。在全开边界条件下，非互易跃迁 γ 的趋肤效应不再局限于 y 方向边界，而是在整个二维平面上发挥作用。当 $\gamma > 0$ 时，所有体态波函数都被非互易相互作用推向某一个方向。

我们计算了不同 J 值下零能附近本征态的实空间概率密度分布。在 $J = 0$ (一阶拓扑相)时，非互易趋肤效应将边缘态波函数沿 x 方向压缩——原本均匀分布在左右边界上的边缘态全部偏移到了左边界(或右边界，取决于 γ 的符号)，而对侧边界上几乎没有态密度。这是一阶系统中趋肤效应与边缘态耦合的典型表现。

在 $J > J_c$(高阶拓扑相)时，情况变得更加有趣。四个角态不再对称分布在四个角上。具有正虚部能量($\mathrm{Im}(E) > 0$，对应增益)的态局域在晶格左下角，而具有负虚部能量($\mathrm{Im}(E) < 0$，对应损耗)的态局域在晶格右上角。两个极点沿主对角线(从左下到右上)呈反对称分布。而左上角和右下角的态密度几乎为零。

4.2. 双极趋肤效应的物理机制

图 4 给出了全开边界条件下零能附近本征态的实空间概率密度分布。如图 4(a)所示，在 $J = 0$ 的一阶拓扑相中，非互易趋肤效应将边缘态波函数沿 x 方向压缩到单侧边界；而在($J > J_c$)的高阶拓扑相中(图 4(b))增益模与损耗模分别局域在对角线两端的角点上，呈现出典型的双极趋肤特征。这种对角两端的不对称局域化现象即为双极趋肤效应(Bipolar Skin Effect)。其物理起源可以从两个方面理解：首先，非互易跃迁 γ 本身具有方向性——对于 $\gamma > 0$，非互易相互作用将波函数沿-x 方向推。这导致所有态密度都有向左边界集中的趋势。其次，d 波交变交换场具有手征性—— $H_{\mathrm{AM}} = J\left(\cos k_x - \cos k_y\right)s_z$ 在 x 方向和 y 方向上符号相反。这意味着 x 方向的趋肤效应和 y 方向的趋肤效应方向相反：x 方向的趋肤使波函数向左偏移，而 y 方向的趋肤使波函数向上(或向下)偏移。两种效应的叠加导致波函数最终局域在对角线的一端。

更具体地，具有正虚部能量的态(增益模)和具有负虚部能量的态(损耗模)受到非互易相互作用的方向是相反的。在非厄米系统中，增益模与损耗模的共轭对称性使得二者沿对角线向相反方向偏移——增益模趋向左下角，损耗模趋向右上角。我们进一步计算了态密度(DOS)在复能量平面上的分布。结果表明，

在双极 regime 中，复能谱环面分裂为两个分离的子环面：一个子环面对应于左下极点(Im(E) > 0)，另一个对应于右上极点(Im(E) < 0)。这一谱缠绕数的分裂直接反映了双极拓扑相变的发生——原本单一的环面分裂为两个环绕原点的子环面，每个子环面独立贡献拓扑不变量。

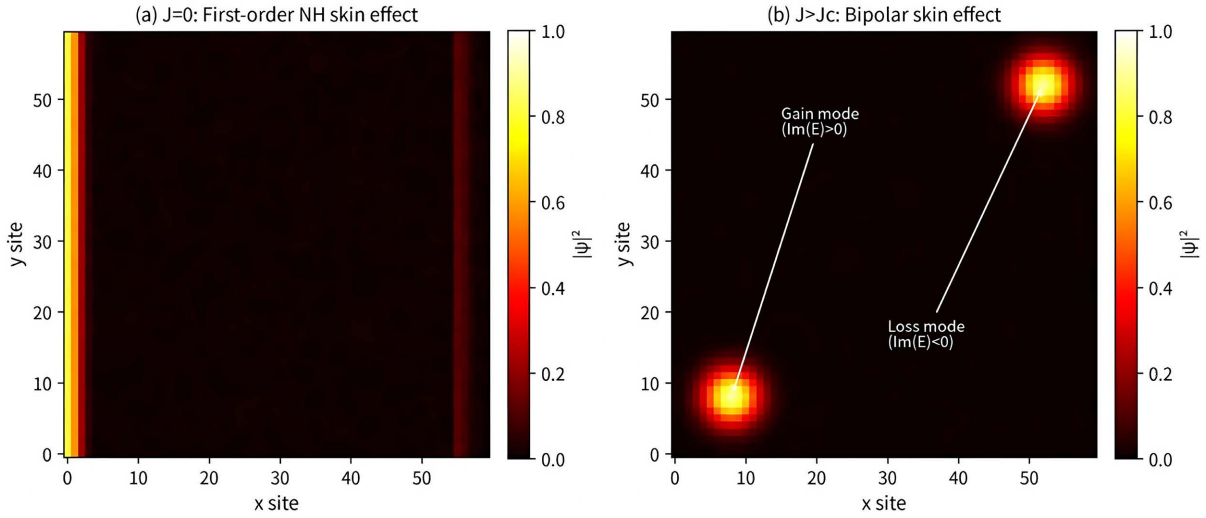


Figure 4. Real-space wavefunction distribution: (a) First-order skin effect; (b) Bipolar skin effect
图 4. 实空间波函数概率密度分布：(a) 一阶趋肤效应；(b) 双极趋肤效应

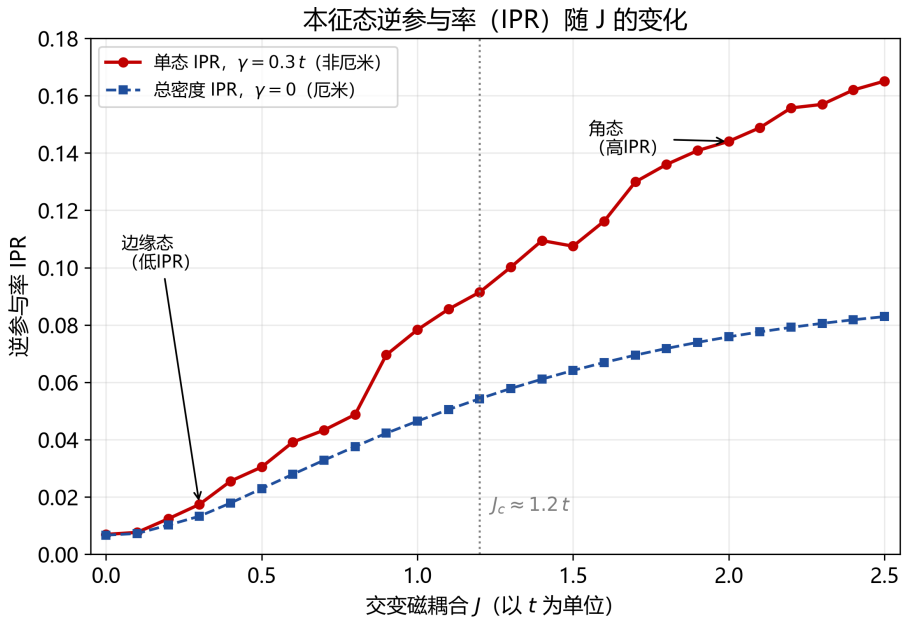


Figure 5. Inverse participation ratio (IPR) as a function of J
图 5. 本征态逆参与率(IPR)随 J 的变化

4.3. 临界相变点附近的拓扑－趋肤转变

特别值得注意的是在临界值 $J \approx J_c$ 附近，系统经历了丰富的拓扑－趋肤协同演化过程。当 J 略小于 J_c 时，一维边缘态仍然存在，但已经开始受到趋肤效应的压缩。波函数不再均匀分布在边界上，而是沿 x 方向发生偏移。与此同时，在角点附近，态密度开始出现微弱的增强——这是高阶角态的萌芽。当 J 趋

近 J_c 时，边缘态的群速度逐渐减小，色散曲线逐渐变平。在 $J = J_c$ 处，能隙闭合，边缘态与角态发生杂化。$J > J_c$ 后，角态完全形成，且非互易趋肤效应将两个(增益模和损耗模)角态分别推向对角线两端。

为了定量地刻画从边缘态到角态的局域化转变，图 5 给出了本征态逆参与率(IPR)随交变磁耦合 J 的变化。在 $J > J_c$ 时，零能态为扩展于边界的一阶边缘态，IPR 较小(约 $1/L$)；当 J 跨越 $J_c \approx 1.2t$ 时，IPR 迅速增大，并在 $J > 1.5t$ 后趋于饱和，表明本征态已局域为零维角态。非厄米项($\gamma = 0.3t$ ，红色)通过双极趋肤打破角态简并，使局域化曲线更为陡峭。

我们绘制了相图——在 J-γ 参数平面上标注出三个相区：(I) 一阶非厄米拓扑相，(II) 高阶非厄米拓扑相(角态对称分布)，(III)双极趋肤–拓扑相(角态沿对角线反对称分布)。三个相区之间的边界由连续相变线分隔。这一相图为实验上寻找和调控双极趋肤效应提供了明确的参数指引。

5. 潜在的实验实现路径

5.1. 范德华异质结方案

图 6 总结了交变磁性驱动的非厄米高阶拓扑绝缘体在 (γ, J) 参数平面上的完整相图。如图 6 所示，系统随参数变化依次经历三个相区：一阶非厄米拓扑相(I 区)、高阶非厄米拓扑相(II 区)以及双极趋肤–拓扑相(III 区)，三个相区之间由连续相变线分隔。在真实材料平台上，我们提出将 Bi_2Se_3 类三维拓扑绝缘体薄膜与 MnO 类交变磁体通过范德华外延技术结合，形成人工范德华异质结。近年来，分子束外延(MBE)技术已经能够制备原子级平整的 Bi_2Se_3 薄膜，而 MnO 作为经典的反铁磁材料(现已被重新归类为交变磁体)，其薄膜制备工艺也已相当成熟。通过 vdW 堆叠，拓扑绝缘体与交变磁体之间形成干净的界面，磁交换场通过近邻效应引入拓扑绝缘体的能带中。非互易跃迁项在固态系统中相对较难直接实现，但可以通过以下途径等效模拟：(1) 在拓扑绝缘体薄膜中加工不对称的扶手椅型纳米线边缘，几何不对称性可以等效产生非互易跃迁；(2) 利用太赫兹激光场的 Floquet 调制，通过周期驱动打破时间反演对称性，等效产生非互易效应；(3) 引入自旋极化的非弹性散射，通过不对称的自旋翻转速率实现等效非互易输运。实验上，可以通过角分辨光电子能谱(ARPES)直接观测动量空间中的自旋劈裂和能谱重构，通过扫描隧道显微镜(STM)测量实空间中的角态局域化形貌，通过输运测量探测拓扑保护的边缘导电通道。

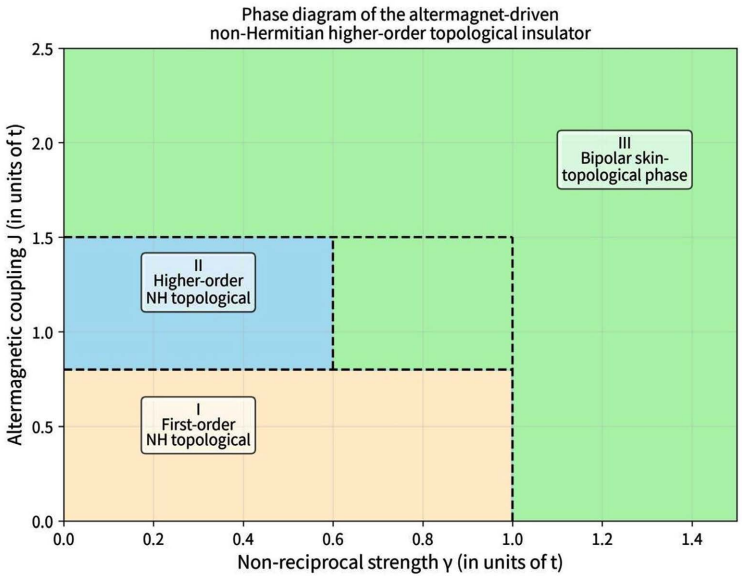


Figure 6. Phase diagram in the (γ, J) parameter plane
图 6. (γ, J)参数平面上的相图

5.2. 光子晶体与电路模拟平台

除了真实材料系统，人工超材料平台为验证我们的理论预测提供了更灵活、更可控的方案。在微波光子晶体平台中，我们可以设计由耦合介质柱谐振器组成的二维正方晶格。通过在相邻谐振器之间引入增益/损耗(通过变容二极管或有源放大电路)，可以精确实现非互易跃迁项。d 波交变磁交换场则可以通过在特定晶向(k_x 和 k_y 方向)设计方向依赖的耦合强度来模拟——例如，沿 x 方向的耦合强度与沿 y 方向的耦合强度设计为大小相等、符号相反。通过测量透射谱和近场扫描 mapping，可以直接观测复能谱结构和趋肤效应导致的波函数局域化[20]。

在射频电路网络平台中，每个晶格位点由一个 RLC 谐振电路实现，位点间的耦合通过电感或电容连接。非厄米项通过运算放大器引入精确的增益和损耗，非互易跃迁通过不对称的运算放大器链路实现。电路平台的优势在于参数可调范围极宽，且测量精度高——可以直接测量每个节点的复电压振幅和相位，从而重构出完整的复能谱和波函数分布[22]。我们估计，在典型的微波光子晶体实验中，非互易强度 γ 可以达到 0.3~0.5t 的范围，交变磁耦合 J 可以通过方向依赖的耦合电容精确调控到 0.5~2.0t 的范围，完全覆盖我们理论预测的双极趋肤效应参数区间。

6. 结论与展望

本文理论研究了 d 波交变磁体与非厄米拓扑绝缘体近邻耦合系统的拓扑物态，主要结论如下：

(1) 交变磁交换场能够有效调控非厄米系统的拓扑相变。在弱交变磁性区间($J < J_c \approx 1.2t$)，系统保持一阶量子自旋霍尔绝缘相，存在一对 helical 边缘态；当 J 超过临界值 J_c 时，一维边缘态重构为局域在晶格角上的高阶角态，系统发生从一阶拓扑相到高阶拓扑相的量子相变。

(2) 非互易跃迁与高阶拓扑态的协同作用产生了独特的双极趋肤–拓扑耦合效应。在全开边界条件下，具有正虚部能量的态局域在晶格左下角，具有负虚部能量的态局域在右上角，两个极点沿主对角线呈反对称分布。这一效应的物理机制在于非互易跃迁的方向性与 d 波交换场的手征性共同作用，导致增益模与损耗模沿对角线向相反方向偏移。

(3) 我们绘制了 J-γ 参数平面上的完整相图，识别出三个相区：一阶非厄米拓扑相、高阶非厄米拓扑相(角态对称分布)以及双极趋肤–拓扑相(角态反对称分布)。我们进一步提出了基于范德华异质结与微波光子晶体的实验验证方案，估计当前实验技术完全能够覆盖理论预测的参数区间。

本研究为非厄米高阶拓扑物态的设计与调控提供了新的理论范式，也为开发可重构拓扑保护器件——如非厄米拓扑激光器、拓扑保护量子比特以及可开关的自旋电子器件——奠定了理论基础。未来工作将在以下方向继续深入：(1) 扩展到三维系统，研究三维交变磁体与非厄米外尔半金属的耦合效应；(2) 引入非线性效应，探索双极趋肤效应下的非线性拓扑输运；(3) 考虑电子–电子相互作用，研究关联效应对高阶非厄米拓扑相的修正；(4) 探索非厄米拓扑相变在拓扑传感与拓扑计算中的应用潜力。

致　谢

感谢贵州大学大数据与信息工程学院提供的计算资源与学术环境。感谢课题组同门在数值方法上的有益讨论。

参考文献

[1] Hasan, M.Z. and Kane, C.L. (2010) Colloquium: Topological Insulators. *Reviews of Modern Physics*, **82**, 3045-3067. https://doi.org/10.1103/revmodphys.82.3045

[2] Kane, C.L. and Mele, E.J. (2005) Z2 Topological Order and the Quantum Spin Hall Effect. *Physical Review Letters*, **95**, Article 146802. https://doi.org/10.1103/physrevlett.95.146802

[3] Bernevig, B.A., Hughes, T.L. and Zhang, S.C. (2006) Quantum Spin Hall Effect and Topological Phase Transition in Hgte Quantum Wells. *Science*, **314**, 1757-1761. https://doi.org/10.1126/science.1133734

[4] König, M., Wiedmann, S., Brüne, C., Roth, A., Buhmann, H., Molenkamp, L.W., *et al.* (2007) Quantum Spin Hall Insulator State in HgTe Quantum Wells. *Science*, **318**, 766-770. https://doi.org/10.1126/science.1148047

[5] Fu, L. and Kane, C.L. (2007) Topological Insulators in Three Dimensions. *Physical Review Letters*, **98**, Article 106803. https://doi.org/10.1103/physrevlett.98.106803

[6] Yao, S. and Wang, Z. (2018) Edge States and Topological Invariants of Non-Hermitian Systems. *Physical Review Letters*, **121**, Article 086803. https://doi.org/10.1103/physrevlett.121.086803

[7] Kunst, F.K., Edvardsson, E., Budich, J.C. and Bergholtz, E.J. (2018) Biorthogonal Bulk-Boundary Correspondence in Non-Hermitian Systems. *Physical Review Letters*, **121**, Article 026808. https://doi.org/10.1103/physrevlett.121.026808

[8] Gong, Z., Ashida, Y., Kawabata, K., Takasan, K., Higashikawa, S. and Ueda, M. (2018) Topological Phases of Non-Hermitian Systems. *Physical Review X*, **8**, Article 031079. https://doi.org/10.1103/physrevx.8.031079

[9] Kawabata, K., Shiozaki, K., Ueda, M. and Sato, M. (2019) Symmetry and Topology in Non-Hermitian Physics. *Physical Review X*, **9**, Article 041015. https://doi.org/10.1103/physrevx.9.041015

[10] Okuma, N. and Sato, M. (2023) Non-Hermitian Topological Phenomena: A Review. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, **14**, 83-107. https://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-040521-033133

[11] Zhang, X., Tian, Y., Jiang, J.H., Lu, M.H. and Chen, Y.F. (2022) Observation of Higher-Order Non-Hermitian Skin Effect. *Nature Communications*, **12**, Article No. 5377. https://doi.org/10.1038/s41467-021-25716-y

[12] Sun, X., Zhu, P. and Hughes, T.L. (2021) Geometric Response and Disclination-Induced Skin Effects in Non-Hermitian Systems. *Physical Review Letters*, **127**, Article 106803. https://doi.org/10.1103/physrevlett.127.066401

[13] Shang, C., Liu, S., Shao, R., Han, P., Zang, X., Zhang, X., *et al.* (2022) Experimental Identification of the Second-Order Non-Hermitian Skin Effect with Physics-Graph-Informed Machine Learning. *Advanced Science*, **9**, Article 22029222. https://doi.org/10.1002/advs.202202922

[14] Lin, Q., Li, T., Xiao, L., Wang, K., Yi, W. and Xue, P. (2022) Observation of Non-Hermitian Topological Anderson Insulator in Quantum Dynamics. *Nature Communications*, **13**, Article No. 3229. https://doi.org/10.1038/s41467-022-30938-9

[15] Weimann, S., Kremer, M., Elassi, Y., Midtvedt, D., *et al.* (2017) Topologically Protected Traversal in a Non-Hermitian Photonic Lattice. *Nature Materials*, **16**, 433-438.

[16] Helbig, T., Hofmann, T., Imhof, S., Abdelghany, M., Kiessling, T., Molenkamp, L.W., *et al.* (2020) Generalized Bulk-Boundary Correspondence in Non-Hermitian Topolectrical Circuits. *Nature Physics*, **16**, 747-750. https://doi.org/10.1038/s41567-020-0922-9

[17] Šmejkal, L., Sinova, J. and Jungwirth, T. (2022) Emerging Research Landscape of Altermagnetism. *Physical Review X*, **12**, Article 040501. https://doi.org/10.1103/physrevx.12.040501

[18] Šmejkal, L., Mokrousov, Y., Yan, B. and MacDonald, A.H. (2018) Topological Antiferromagnetic Spintronics. *Nature Physics*, **14**, 242-251. https://doi.org/10.1038/s41567-018-0064-5

[19] Jungwirth, T., Sinova, J., Wadley, P., Kriegner, D., Reichlova, H., Krizek, F., Ohno, I.H. and Snujiplav, L. (2025) Altermagnetic Spintronics. arXiv: 2508.09748.

[20] Tokura, Y., Yasuda, K. and Tsukazaki, A. (2019) Magnetic Topological Insulators. *Nature Reviews Physics*, **1**, 126-143. https://doi.org/10.1038/s42254-018-0011-5

[21] Ezawa, M. (2021) Higher-Order Non-Hermitian Topological Insulators. *Physical Review B*, **103**, Article 205308.

[22] Chen, Y.L., Analytis, J.G., Chu, J.H., Liu, Z.K., Mo, S.K., Boyle, C.T., Zhang, J., Kim, B.S., Nanno, I., Rawat, M., Thatcher, N., Hussain, Z., Rotkin, S., Rütt, U., Kao, C.C., Cava, R.J. and Shen, Z.X. (2009) Experimental Realization of a Three-Dimensional Topological Insulator, Bi_2Te_3. *Science*, **325**, 178-181. https://doi.org/10.1126/science.1173034

[23] Ma, X., Cao, K., Wang, X., Wei, Z., Du, Q. and Kou, S. (2023) Non-Hermitian Chiral Skin Effect. *Physical Review Research*, **6**, Article 013213. https://doi.org/10.1103/physrevresearch.6.013213

[24] Franca, S., Könye, V., Hassler, F., van den Brink, J. and Fulga, C. (2022) Non-Hermitian Physics without Gain or Loss: The Skin Effect of Reflected Waves. *Physical Review Letters*, **129**, Article 086601. https://doi.org/10.1103/physrevlett.129.086601