

掺铥环形光纤激光器中三阶色散对h型脉冲产生的影响机制

王慕瑶, 黄金哲*, 吴 佟, 冯 茜, 蒋思亮, 张新陆

天津工业大学物理科学与技术学院, 天津
Email: *huangjinzhe@tiangong.edu.cn

收稿日期: 2020年11月17日; 录用日期: 2020年12月2日; 发布日期: 2020年12月9日

摘 要

在非线性偏振旋转锁模的掺铥环形光纤激光器中实现了非对称的h型脉冲输出, 同时针对实验进行了数值仿真。考虑到三阶色散的累积影响, 得到了与实验结果一致的h型脉冲信号, 由此发现三阶色散促进了脉冲拖尾的形成。

关键词

掺铥光纤激光器, 被动锁模, h型脉冲, 三阶色散

The Influence Mechanism of the Third Order Dispersion on Generation of H-Shaped Pulses in a Thulium-Doped Ring Fiber Laser

Muyao Wang, Jinzhe Huang*, Tong Wu, Qian Feng, Siliang Jiang, Xinlu Zhang

School of Physical Science and Technology, Tiangong University, Tianjin
Email: *huangjinzhe@tiangong.edu.cn

Received: Nov. 17th, 2020; accepted: Dec. 2nd, 2020; published: Dec. 9th, 2020

Abstract

Output of h-shaped pulses is realized in a mode-locked Thulium-doped fiber ring laser with the nonlinear polarization rotation technique, simultaneously, a simulation is carried out for the ex-

*通讯作者。

文章引用: 王慕瑶, 黄金哲, 吴佟, 冯茜, 蒋思亮, 张新陆. 掺铥环形光纤激光器中三阶色散对h型脉冲产生的影响机制[J]. 光电子, 2020, 10(4): 133-139. DOI: 10.12677/oe.2020.104017

periment. In consideration of accumulated impact of the third order dispersion, the h-shaped pulses are generated by computation, consistent with the experimental results. It is found then, the third order dispersion boosts the forming of the h-shaped pulses.

Keywords

Thulium-Doped Fiber Laser, Passively Mode-Locking, H-Shaped Pulse, Third-Order Dispersion

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

掺铥光纤激光器工作在 $2\ \mu\text{m}$ 人眼安全的中红外波段, 其发射谱含有两个大气窗口和一个强水吸收峰, 因而在红外制导、光电对抗、遥感探测、生物医学等领域应用广泛。随着 $2\ \mu\text{m}$ 以及中远红外波段应用领域的不断扩大, 掺铥光纤激光器已成为国内外研究热点[1] [2] [3] [4]。研究发现除了经典孤子之外[5], 锁模脉冲在不同增益损耗和锁模条件下表现出丰富而复杂的孤子动力学过程, 脉冲之间相互作用从而得到特定的脉冲序列, 如孤子束缚态[6], 孤子雨[7], 暗孤子, 耗散孤子[8] [9] [10] [11], 类噪声脉冲等。其中, 耗散孤子和耗散孤子共振(DSR)脉冲产生于耗散系统, 由内外能量交换, 形成稳定有序的脉冲输出, 输出脉冲能量相对传统孤子有显著提升, 因此在工程应用等方面受到广泛关注。

除了方波脉冲, 研究者们还在激光腔中观测到类似 h 型[12] [13], 阶梯型[14], 椅子型[15]等非对称脉冲。h 型脉冲由于其特殊的形状结构可提高材料的去除率和加工效率, 在大多数激光加工中至少使用不同规格的激光器来产生不同脉宽类型的脉冲, 使用一种技术来合并和同步这些脉冲, 这使得系统复杂而麻烦, 在这种情况下 h 型脉冲的出现对于激光加工方面则更具有吸引力[15]。2018 年, 罗鸿禹等人用非线性偏振旋转(NPR)锁模产生的 h 型脉冲作为种子信号, 放大后用于泵浦掺铥光纤激光器[16]; 2018 年, 赵俊清等人首次在掺铥光纤激光器中采用非线性光纤环形镜(NOLM)技术得到脉冲持续时间为几十到几百纳秒的新型 h 型脉冲[13]; 2019 年, 他们利用非线性放大环形镜(NALM)锁模技术首次在掺铥光纤激光器净正色散区产生了 h 型脉冲[17]。同年, 深圳大学郑志坚等人基于 NALM 的“9”字型掺铥光纤激光器产生了基频和谐波 h 型脉冲, 脉冲最大平均输出功率 282 mW, 能量达到 $1.23\ \mu\text{J}$ [18]。我们发现 h 型脉冲大都分布在 $2\ \mu\text{m}$ 波段, 产生于较高非线性腔, 可能的原因是 h 型脉冲的产生需要累积大量的非线性效应并且具备较大的色散和增益环境。虽然 h 型脉冲与 DSR 和椅子状脉冲在时域和光谱上各不相同, 但它们的相同点在于都因峰值功率钳制效应而不发生分裂。脉冲尾部较平缓的部分与方波脉冲形成机理相同, 但 h 型脉冲前沿具有明显尖峰, 目前 h 型脉冲的产生机理还不太清楚。一种可能的原因是未知的瞬态增益变化导致部分峰值钳制效应, 然而部分峰值钳制效应的物理机制还未有详细的解释[12]。本文在实验中产生了方波脉冲和 h 型脉冲, 并在掺铥光纤激光器模型中进行了模拟仿真, 发现三阶色散可促进 h 型脉冲的形成。

2. 实验

实验搭建的 NPR 锁模铥光纤激光器实验装置如图 1 所示, 其中, 两个偏振控制器(PC1 和 PC2)和一个偏振相关隔离器(PS-ISO)共同组成激光器的锁模器件。激光器增益介质为一根 8 m 长的双包层掺铥光纤 TDF (Thulium-Doped Fiber, SM-TDF-10P/130-HE, Nufern), 工作波长为 1900~2100 nm, 纤芯数值孔径为 0.150, 衰减率小于 15 dB/km, 纤芯直径为 $10\ \mu\text{m}$, 内包层直径为 130 μm , 包层对 793 nm 光的吸收

系数为 3.00 dB/m, 在 2060 nm 处的二阶色散系数为 $-0.084 \text{ ps}^2/\text{m}$ [19]。腔内其余光纤为 117 m 标准单模光纤(SMF-28, Corning), 其二阶色散系数为 $-0.08 \text{ ps}^2/\text{m}$ 。激光器总腔长约为 125 m, 经计算净色散约为 -10 ps^2 。采用两个 793 nm 半导体激光器作为泵浦源, 通过两个 793/1950 nm 的波分复用器耦合入环形腔, 经过增益光纤后转化为 $2 \mu\text{m}$ 激光。再利用耦合器连接射频谱分析仪(R & S@FSW, Rohde-Schwarz)、高分辨率数字存储示波器(MDO3102, Tektronix)和波长计(721A, Bristol)来监测其激光输出。其中, 示波器带宽为 1 GHz, 采样率为 5 Gs/s, 耦合器则产生 10% 的激光输出(9:1)。

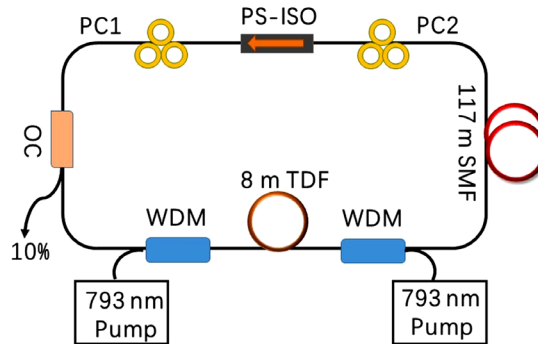


Figure 1. Schematic diagram of a NPR mode-locked TDF laser
图 1. NPR 锁模掺钛光纤激光器的示意图

实验中, 当泵浦功率均达到 6 W 时, 激光器达到自启动锁模条件。当泵浦功率从 6 W 增加到 14 W 时, 适当地调节偏振控制器, 可得到 h 型脉冲, 如图 2(a)所示: 脉冲包络包括一个高强度的前沿和低强度的平缓后沿, 形似字母“h”, 与典型的 h 型脉冲相比, 其脉冲持续时间约为 25 ns, 前沿尖峰强度相对较低且宽度较大。实验发现, 前沿峰的高度依赖于非线性大小, 当采用长度较小的单模光纤时, h 型脉冲蜕变为方波脉冲。图 2(b)为脉冲光谱图, 脉冲中心波长约为 2055 nm, 呈类高斯形状分布, 谱线光滑且相应的 3 dB 光谱带宽约为 7 nm。由于谱线较宽, 可以认为脉冲属于类噪声方波脉冲。射频谱如图 2(c)所示, 脉冲重复频率为 1.63 MHz, 与激光腔长相对应; 而且信噪比高达 60 dB, 说明脉冲信号锁模稳定。

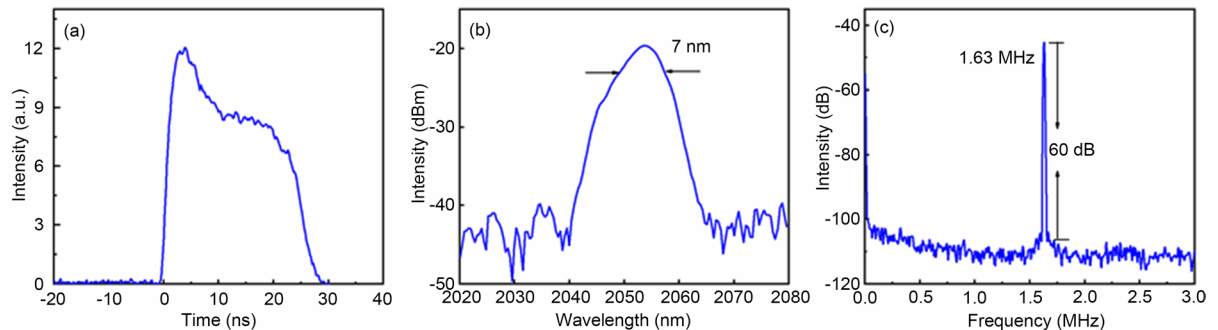


Figure 2. (a) Single pulse trace; (b) Laser output spectrum; (c) Radio-frequency spectrum
图 2. (a) 单脉冲时域图; (b) 光谱图; (c) 射频谱图

3. 理论模型与仿真结果

考虑光脉冲在光纤中的双折射效应且不考虑四波混频效应, 增益光纤中光脉冲传输方程可用如下公式表示[20]:

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} + \sigma \frac{\partial A_x}{\partial T} + j \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial T^2} - \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 A_x}{\partial T^3} = \frac{g}{2\Omega_g^2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial T^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial z} - \sigma \frac{\partial A_y}{\partial T} + j \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A_y}{\partial T^2} - \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 A_y}{\partial T^3} = \frac{g}{2\Omega_g^2} \cdot \frac{\partial^2 A_y}{\partial T^2} \quad (2)$$

其中 A_x 和 A_y 分别为光脉冲沿光纤两主轴方向上的振幅, σ 、 α 、 β_2 、 β_3 、 γ 和 Ω_g 分别代表两正交分量的群速度倒数差、损耗、二阶群速度色散参量、三阶色散、非线性系数和增益带宽。增益系数 g 的变化可用公式(3)描述:

$$g = g_0 \exp \left[-\frac{1}{E_{\text{sat}}} \int_{-\infty}^t |A|^2 dt \right] \quad (3)$$

其中 g_0 为小信号增益系数, 与光纤掺杂浓度相关。 E_{sat} 为增益介质的饱和能量, 与泵浦功率相关。求解此非线性薛定谔方程可采用常用的分步傅里叶法[21], 针对 NPR 锁模方式, 可用 Jones 矩阵描述 PCs 与 PS-ISO, 进而表达偏振态对光脉冲传输的影响[22]。为了简化计算, 我们采用一个四分之一波片加一个二分之一波片的 PC 结构, 这种简化不影响锁模脉冲的产生。令两组 PC 波片角度分别对应 α_1 、 α_2 、 α_3 、 α_4 , 假定 $\alpha_1 = 2\alpha_2$, $\alpha_3 = \pi/4$, 并引入两个复合方位角 $\theta_0 = 2\alpha_4 - \alpha_0 + \varphi_0$, $\theta_2 = 2\alpha_2 - \alpha_0$, 其中 $\Delta\varphi$ 为两正交分量相位调制产生的非线性相移, φ_0 为往返一次积累的线性相移, 由此可得到透过率函数:

$$T = 0.5\rho^2 [1 - \cos(2\theta_2)\cos(2\theta_0 - \Delta\varphi)] \quad (4)$$

公式中, ρ^2 为 PS-ISO 的透过率, 复合方位角 θ_0 和 θ_2 分别调制透过率曲线的初始相位与振幅(调制深度), 因而是数值模拟的关键参数。同时我们使用以下参数匹配实验条件: 令 $\theta_0 = 0.85\pi$, $\theta_2 = 0.1\pi$, $L_{\text{SMF}} = 117$ m, $L_{\text{Tm}} = 10$ m, $g_0 = 2.0 \text{ m}^{-1}$, $\Omega_g = 30 \text{ nm}$, $\gamma_{\text{SMF}} = 0.003 \text{ W}^{-1}\text{m}^{-1}$, $\gamma_{\text{TDF}} = 0.0045 \text{ W}^{-1}\text{m}^{-1}$, 当三阶色散对脉冲的影响可以忽略时, 得到的方波脉冲如图 3(a)所示。我们将所建的程序首先应用到光孤子脉冲中, 与已知结果一致, 且模拟出的凯利边带的位置也与理论值相符。在模拟仿真中, 考虑到 NPR 的带通滤波效应, 使用一个 20 nm 宽的高斯滤波器来限制脉冲展宽。因为实验使用的光电探头响应时间是 28 ps, 因此在仿真过程中设响应曲线为 28 ps 的理想高斯函数。以此对输入脉冲作卷积运算, 得到一个稳定的方形类噪声脉冲, 其持续时间约为 2 ns。

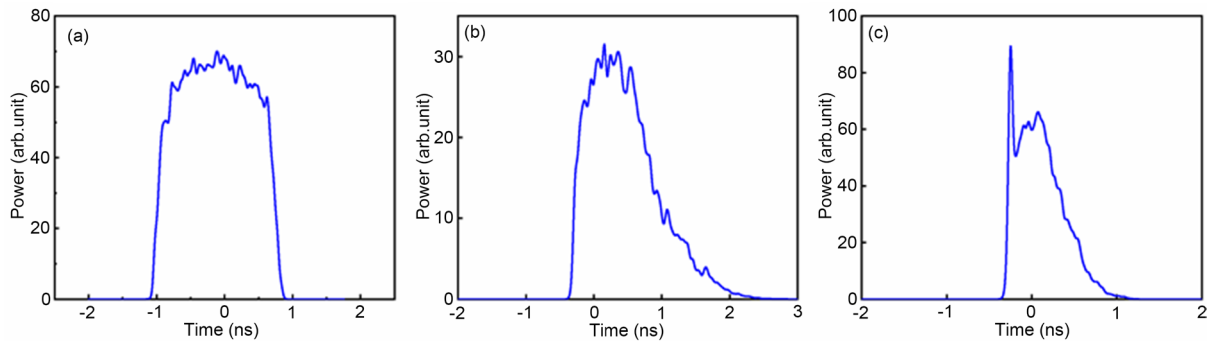


Figure 3. (a) Simulated square pulse trace and (b) Asymmetric pulses at $E_{\text{sat}} = 1 \text{ nJ}$ with a third-order dispersion of $0.2 \text{ ps}^3/\text{m}$ and (c) of $0.1 \text{ ps}^3/\text{m}$, respectively, based on a NPR mode-locked TDF laser

图3. NPR 锁模 TDF 激光中产生的(a) 方波脉冲;(b) 三阶色散值为 $0.2 \text{ ps}^3/\text{m}$ 的非对称脉冲;(c) 三阶色散值为 $0.1 \text{ ps}^3/\text{m}$ 非对称脉冲

群速度色散通过啁啾的方式压缩或者展宽脉冲, 对于小于 1 ps 的超短脉冲, 三阶色散作用变得不能忽视, 色散使得脉冲一侧变陡峭, 超短脉冲波形中心偏向一侧, 并且在这一侧脉冲沿附近形成了带有振荡结构的拖尾[23]。随着非线性相移强度变化, 三阶色散使脉冲产生不均匀啁啾从而导致脉冲发生形变, 同时通过 NPR 的可饱和吸收特性进一步重塑孤子脉冲形态。脉冲形变取决于啁啾, 这意味着随着时间的推移, 脉宽较大的脉冲会因较大的啁啾遭受更大的形变。尽管方形类噪声脉冲由很多皮秒以及飞秒级的

不稳定子脉冲构成,但三阶色散仍具有类似的特性从而干扰和影响脉冲构成。保持上述其他参数不变,在仿真模拟中改变三阶色散,得到如图3所示不同类型的非对称结构脉冲。在高色散值($0.1/0.2 \text{ ps}^3/\text{m}$)的影响下,图3(b),图3(c)同图3(a)对比其脉冲后沿明显变陡,在适当的色散下脉冲出现尖峰,演变为h型脉冲形态。显然,非对称形状的脉冲结构与三阶色散相关,高阶色散对孤子脉冲畸变具有重要影响。所以,可从高阶色散方面考虑h型脉冲产生的原因。

4. 结果与讨论

由于近50 ns的时间采样点太多,超过了当前主流电脑的运行要求。所以我们将仿真时间窗口控制在5 ns以内,并通过10:1的时间尺度变换后来对应实验结果。在 $\beta_3 = 0.186 \text{ ps}^3/\text{m}$ (相应地经过了放大处理)时脉冲稳定后得到如图4(a)所示的模拟结果。由于此脉冲建立在类噪声脉冲基础上,当 E_{sat} 为1.5 nJ时,模拟的脉冲形状与实验结果一致,其中插图表示噪声频谱,中心波长为2050 nm,3 dB带宽约为5 nm。当 E_{sat} 分别取值1.5 nJ、2.0 nJ、2.5 nJ、3.0 nJ时得到脉冲形状变化规律如图4(b)所示。脉冲上升沿的位置不变,而后沿较为平缓的拖尾部分随着饱和能量的增大而展宽,这一现象明显由功率钳制效应所引起,这与文献中提到的实验结果相对应[13]。由此,我们认为,h型脉冲的产生与三阶色散相关,或者三阶色散促进了h型脉冲的形成。

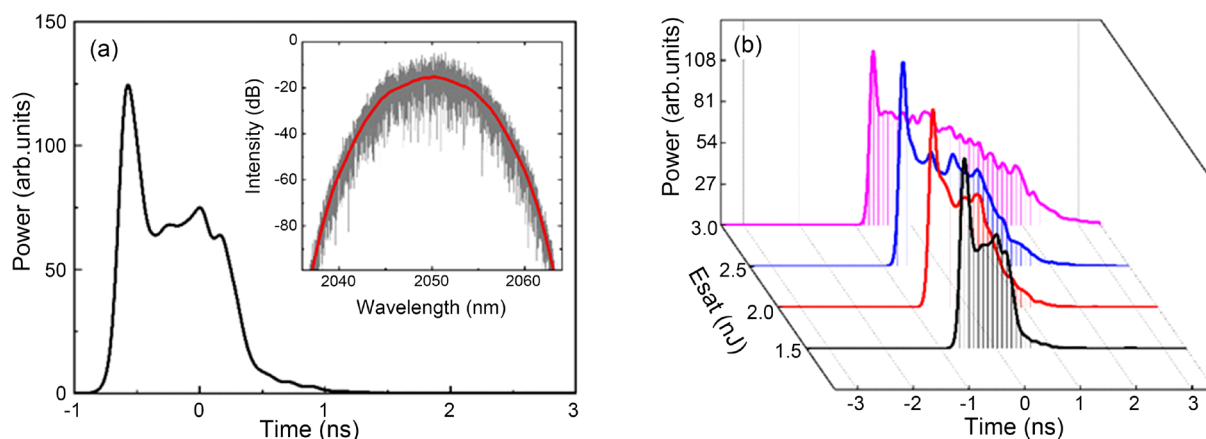


Figure 4. (a) Simulated square pulse trace and (b) Asymmetric pulses at $E_{\text{sat}} = 1 \text{ nJ}$ with a third-order dispersion of $0.2 \text{ ps}^3/\text{m}$ and (c) of $0.1 \text{ ps}^3/\text{m}$, respectively, based on a NPR mode-locked TDF laser

图4. NPR锁模TDF激光中产生的(a)方波脉冲;(b)三阶色散值为 $0.2 \text{ ps}^3/\text{m}$ 的非对称脉冲;(c)三阶色散值为 $0.1 \text{ ps}^3/\text{m}$ 非对称脉冲

5. 结论

在铽掺非线性偏振旋转锁模光纤激光器中实现了h型脉冲输出。通过数值模拟证明三阶色散是h型脉冲形成的一个因素,且色散值的大小影响脉冲输出形状,但不改变上升前沿的强度,只引起下降沿形变。峰值功率钳制效应在h型脉冲中仍然存在,且后沿平缓部分宽度随泵浦能量的增大而展宽。

基金项目

国家自然科学基金(61775166)。

参考文献

- [1] Duan, L.N., Liu, X.M., Mao, D., Wang, L.R. and Wang, G.X. (2012) Experimental Observation of Dissipative Soliton

- Resonance in an Anomalous-Dispersion Fiber Laser. *Optics Express*, **20**, 265-270. <https://doi.org/10.1364/OE.20.000265>
- [2] Zhao, J.Q., Ouyang, D.Q., Zheng, Z.J., Liu, M.Q., Ren, X.K., Li, C.B., Ruan, S.C. and Xie, W.X. (2016) 100 W Dissipative Soliton Resonances from a Thulium-Doped Double-Clad All-Fiber-Format MOPA System. *Optics Express*, **24**, 12072-12081. <https://doi.org/10.1364/OE.24.012072>
- [3] Wang, H., Du, T.J., Li, Y.H., Zou, J.H., Wang, K.J., Zheng, F.Y., Fu, J.F., Yang, J.H., Fu, H.Y. and Luo, Z.Q. (2019) 2080 nm Long-Wavelength, High-Power Dissipative Soliton Resonance in a Dumbbell-Shaped Thulium-Doped Fiber Laser. *Chinese Optics Letters*, **17**, Article ID: 030602. <https://doi.org/10.3788/COL201917.030602>
- [4] Wang, Q.Q., Chen, T., Zhang, B.T., Li, M.S., Lu, Y.F. and Chen, K.P. (2013) All-Fiber Passively Mode-Locked Thulium-Doped Fiber Ring Laser Using Optically Deposited Graphene Saturable Absorbers. *Applied Physics Letters*, **102**, Article ID: 131117. <https://doi.org/10.1063/1.4800036>
- [5] Fermann, M.E., Sugden, K. and Bennion, I. (1995) High-Power Soliton Fiber Laser Based on Pulse width Control with Chirped Fiber Bragg Gratings. *Optics Letters*, **20**, 172-174. <https://doi.org/10.1364/OL.20.000172>
- [6] Haboucha, A., Leblond, H., Salhi, M., Komarov, A. and Sanchez, F. (2008) Analysis of Soliton Pattern Formation in Passively Mode-Locked Fiber Lasers. *Physical Review A*, **78**, Article ID: 043806. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.78.043806>
- [7] Chouli, S. and Grelu, P. (2010) Soliton Rains in a Fiber Laser: An Experimental Study. *Physical Review A*, **81**, Article ID: 063829. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.81.063829>
- [8] Xu, Y., Song, Y.L., Du, G.G., Yan, P.G., Guo, C.Y., Zheng, G.L. and Ruan, S.C. (2015) Dissipative Soliton Resonance in a Wavelength-Tunable Thulium-Doped Fiber Laser with Net-Normal Dispersion. *IEEE Photonics Journal*, **7**, Article ID: 1502007. <https://doi.org/10.1109/JPHOT.2015.2424855>
- [9] Du, T.J., Li, W.W., Ruan, Q.J., Wang, K.J., Chen, N. and Luo, Z.Q. (2018) 2 μm High-Power Dissipative Soliton Resonance in a Compact σ -Shaped Tm-Doped Double-Clad Fiber Laser. *Applied Physics Express*, **11**, Article ID: 052701. <https://doi.org/10.7567/APEX.11.052701>
- [10] Zhao, K.J., Wang, P., Ding, Y.H., Yao, S.Y., Gui, L.L., Xiao, X.S. and Yang, C.X. (2019) High-Energy Dissipative Soliton Resonance and Rectangular Noise-Like Pulse in a Figure-9 Tm Fiber Laser. *Applied Physics Express*, **12**, Article ID: 012002. <https://doi.org/10.7567/1882-0786/aaf0aa>
- [11] Cheng, Z.C., Li, H.H. and Wang, P. (2015) Simulation of Generation of Dissipative Soliton, Dissipative Soliton Resonance and Noise-Like Pulse in Yb-Doped Mode-Locked Fiber Lasers. *Optics Express*, **23**, 5972-5981. <https://doi.org/10.1364/OE.23.005972>
- [12] Zhao, J.Q., Li, L., Zhao, L.M., Tang, D.Y., Shen, D.Y. and Su, L. (2019) Tunable and Switchable Harmonic h-Shaped Pulse Generation in a 3.03 km Ultralong Mode-Locked Thulium-Doped Fiber Laser. *Photonics Research*, **7**, 332-340. <https://doi.org/10.1364/PRJ.7.000332>
- [13] Zhao, J.Q., Li, L., Zhao, L.M., Tang, D.Y. and Shen, D.Y. (2018) Cavity-Birefringence-Dependent h-Shaped Pulse Generation in a Thulium-Holmium-Doped Fiber Laser. *Optics Letters*, **43**, 247-250. <https://doi.org/10.1364/OL.43.000247>
- [14] Mao, D., Liu, X.M., Wang, L.R., Lu, H. and Duan, L.N. (2011) Dual-Wavelength Step-Like Pulses in an Ultra-Large Negative-Dispersion Fiber Laser. *Optics Express*, **19**, 3996-4001. <https://doi.org/10.1364/OE.19.003996>
- [15] Gupta, P.K., Singh, C.P., Singh, A., Sharma, S.K., Mukhopadhyay, P.K. and Bindra, K.S. (2016) Chair-Like Pulses in an All-Normal Dispersion Ytterbium-Doped Mode-Locked Fiber Laser. *Applied Optics*, **55**, 9961-9967. <https://doi.org/10.1364/AO.55.009961>
- [16] Luo, H.Y., Liu, F., Li, J.F. and Liu, Y. (2018) High Repetition Rate Gain-Switched Ho-Doped Fiber Laser at 2.103 μm Pumped by h-Shaped Mode-Locked Tm-Doped Fiber Laser at 1.985 μm . *Optics Express*, **26**, 26485-26494. <https://doi.org/10.1364/OE.26.026485>
- [17] Zhao, J.Q., Zhou, J., Li, L., Klimczak, M., Komarov, A., Su, L., Tang, D.Y., Shen, D.Y. and Zhao, L.M. (2019) Narrow-Bandwidth h-Shaped Pulse Generation and Evolution in a Net Normal Dispersion Thulium-Doped Fiber Laser. *Optics Express*, **27**, 29770-29780. <https://doi.org/10.1364/OE.27.029770>
- [18] Zheng, Z.J., Ren, X.K., Zhu, K., Ouyang, D.Q., Wang, J.Z., Guo, C.Y., Du, G.G., Pei, J.H., Lue, Q.T. and Ruan, S.C. (2019) Fundamental and Harmonic Mode-Locked h-Shaped Pulse Generation Using a Figure-of-9 Thulium-Doped Fiber Laser. *Optics Express*, **27**, 37172-37179. <https://doi.org/10.1364/OE.27.037172>
- [19] Zheng, Z.J., Ouyang, D.Q., Ren, X.K., Wang, J.Z., Pei, J.H. and Ruan, S.C. (2019) 0.33 mJ, 104.3 W Dissipative Soliton Resonance Based on a Figure-of-9 Double-Clad Tm-Doped Oscillator and an All-Fiber MOPA System. *Photonics Research*, **7**, 513-517. <https://doi.org/10.1364/PRJ.7.000513>
- [20] Agrawal, G.P. (2001) Nonlinear Fiber Optics. *Soviet Journal of Quantum Electronics*, **160**, 1.

-
- [21] Sanchez, F., Leblond, H., Salhi, M., Komarov, A. and Haboucha, A. (2008) Models for Passively Mode-Locked Fiber Lasers. *Fiber and Integrated Optics*, **27**, 370-391. <https://doi.org/10.1080/01468030802268722>
- [22] Tang, D.Y., Zhao, L.M., Zhao, B. and Liu, A.Q. (2005) Mechanism of Multisoliton Formation and Soliton Energy Quantization in Passively Mode-Locked Fiber Lasers. *Physical Review A*, **72**, Article ID: 043816. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.72.043816>
- [23] Karpman, V.I. (1993) Radiation by Solitons Due to Higher-Order Dispersion. *Physical Review E*, **47**, 2073-2082. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.47.2073>