

Computation and Analysis for the Frequency of Nonlinear Vibration of Tensioned Plane Membrane Structure

Congbing Huang¹, Hongbin Huan¹, Yanhua Liu², Qi Wang³

¹Internal Trade Engineering and Research Institute, Beijing

²Southwest Branch, China Construction Second Engineering Bureaus Co. Ltd., Chongqing

³Ji Zhun Fang Zhong Architectural Design Co., Ltd., Chengdu Sichuan

Email: jggc2001@126.com

Received: Jul. 24th, 2015; accepted: Aug. 9th, 2015; published: Aug. 12th, 2015

Copyright © 2015 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

Abstract

The nonlinear free vibration governing differential equations for the orthotropic tensioned plane membrane structure are established by Von Kármán's membrane large deflection theory and D'Alembert's principle. Then the governing differential equations are simplified by Bubnov-Galerkin method and solved by the homotopy perturbation method (HPM), and obtained the approximate analytical solution of the vibration frequency. In the computational example, the nonlinear vibration frequency of the structure is computed, and the results of this paper are analyzed and compared with the exact solution. The analysis shows that the approximate analytical solution obtained in this paper is very close to the exact solution (the maximum error is less than 4%), and the approximate analytical solution obtained in this paper is more simple and convenient. This is favorable for the popularization and application in engineering.

Keywords

Membrane Structure, Nonlinear Vibration, Orthotropic, Perturbation Method

张拉平面膜结构非线性振动频率计算分析

黄从兵¹, 宦洪彬¹, 刘衍华², 王琦³

¹国内贸易工程设计研究院, 北京

²中国建筑第二工程局有限公司西南分公司, 重庆

³基准方中建筑设计有限公司, 四川 成都

Email: jggc2001@126.com

收稿日期: 2015年7月24日; 录用日期: 2015年8月9日; 发布日期: 2015年8月12日

摘要

利用冯·卡门薄膜大挠度理论, 结合达朗贝尔原理, 建立正交异性张拉平面膜结构非线性自由振动的控制方程。然后利用伽辽金法对其进行简化, 并采用同伦摄动法进行求解, 得到振动频率的近似解析解。通过算例, 计算了结构的非线性振动频率, 并将本文结果与精确解进行比较分析。分析表明: 本文所求得近似解析解与精确解之间的最大误差小于4%。因此本文的近似解析解与精确解非常接近, 且本文所得解形式更为简单, 计算也更方便, 有利于在工程中进行推广应用。

关键词

膜结构, 非线性振动, 正交异性, 摄动法

1. 引言

张拉平面膜结构主要用于会展中心、停车场和体育馆等公共设施的平面型屋盖结构中[1] [2]。由于这种结构自重轻、刚度小, 因而在外荷载作用下容易产生振动, 以致膜面松弛变形, 甚至导致整个膜结构失效。如亚特兰大奥运会主馆佐治亚穹顶于1995年在一次强风袭击下, 有四片薄膜被撕裂; 加拿大蒙特利尔奥林匹克体育场的一片膜结构在1999年的一场暴风雪中突然破裂; 韩日世界杯济州岛体育场膜屋盖在2002年6月和8月先后两次在台风的袭击下出现膜材撕裂。国内的, 如广州颐和山庄楼顶膜结构在2003年夏季台风中被撕裂; 温州大学体育场看台膜结构在2004年8月台风“云娜”作用下发生整体破坏。2012年4月, 甘肃某中学的体育场看台顶棚膜结构被强风撕裂。因此研究建筑膜结构在外荷载作用下的振动问题, 对膜结构的动力设计进行优化控制, 进而防止或减少由于振动导致的膜结构工程事故具有重要意义。对膜结构自由振动问题的深入研究, 是进行膜结构在外荷载作用下受迫振动问题研究的基础。

目前, 国内外学者对薄膜结构自由振动作了一定的研究。1999年, Vega等对带有内部斜撑的矩形薄膜的自由振动进行了研究, 得到了其振动频率的解析解[3]。2002年和2004年, Kang等对倾斜和弯曲复合矩形薄膜的自由振动进行了研究, 得到了倾斜度和弯曲度对其振动频率的影响[4] [5]。2009年, Reutskiy发展了一种新的数值分析方法对任意形状的薄膜的非线性振动进行了研究, 该方法基于频谱分析系统物理响应的数学模拟[6]。在国内, 1980年, 钱国桢研究了二向受力不同的矩形薄膜、圆形及椭圆形薄膜的自由振动问题, 得到了任意外形薄膜自然频率的近似解[7]。1993年, 袁驷和张亿果利用有限元线法对薄膜的固有振动这一特征值模型问题作了分析求解, 并通过算例证明了求解方法的有效性[8]。2010年, 罗吉和罗亮生研究了圆环膜的横向自由振动, 利用该振动的数学模型, 得到了其固有频率和节线的计算公式, 该结果可用于涉及圆环膜振动的领域, 也可以用于某些乐器[9]。2010年, 林文静等构造六节点三角形单元, 用于平面薄膜自由振动的有限元分析, 给出了三个典型算例表明, 六节点三角形单元的计算结果比ANSYS三角形单元更接近理论解, 即六节点三角形单元具有更高的精度[10]。

以上的这些研究都是针对均匀的膜结构进行的研究, 且得到的结果比较复杂而不利于工程应用。本

文将采用近似解析方法同伦摄动法对正交异性的平面张拉建筑膜结构的振动问题进行研究，以得到简便有效，且适于工程应用的非线性振动频率计算公式。

2. 控制方程和边界条件

正交异性膜结构正交两个方向为受力的主方向，且正交两个方向的材料特性不一样。简化后的张拉平面膜结构模型如图 1 所示，正交的两个方向为 x 、 y 方向，其尺寸分别为 a 、 b ； x 、 y 方向预张力分别为 N_{0x} 和 N_{0y} 。

则相应的位移边界条件如下：

$$\begin{cases} w(0, y, t) = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, y, t) = 0 \\ w(a, y, t) = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(a, y, t) = 0 \\ w(x, 0, t) = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, 0, t) = 0 \\ w(x, b, t) = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, b, t) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(0, y, t) = 0, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x, 0, t) = 0 \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(a, y, t) = 0, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x, b, t) = 0 \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x, 0, t) = 0, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(0, y, t) = 0 \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x, b, t) = 0, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(a, y, t) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

根据冯·卡门薄膜大挠度理论和达朗贝尔原理[11]，建立图 1 所示膜结构非线性自由振动的控制方程如下：

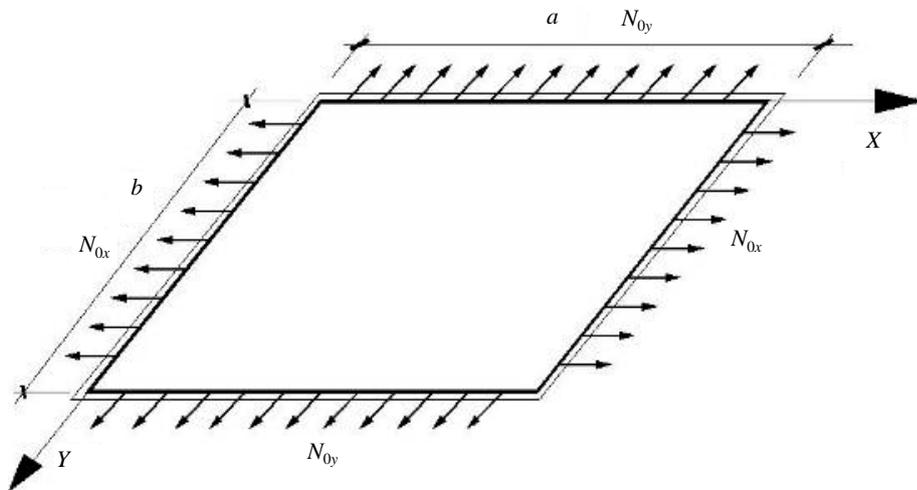


Figure 1. Rectangle membrane with four edges simply supported
图 1. 四边简支的矩形平面膜结构

$$\frac{\rho}{h} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left(\sigma_{0x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \left(\sigma_{0y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\sigma_{0xy} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{1}{E_1} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} + \frac{1}{E_2} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - \frac{\mu_2}{E_2} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{\mu_1}{E_1} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{G} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (4)$$

式中 ρ 为膜材面密度; h 为膜材厚度; E_1 和 E_2 分别为 x 和 y 向弹性模量; φ 表示应力函数 $\varphi(x, y, t)$; w 表示挠度 $w(x, y, t)$; σ_{0x} 和 σ_{0y} 表示 x 和 y 向的初始张拉应力; σ_{0xy} 表示初始剪切应力; G 表示剪切模量; μ_1 和 μ_2 表示 x 和 y 向的泊松比。

3. 控制方程的简化

满足边界条件(1)和(2)的挠度函数和应力函数可以表示成如下形式:

$$w(x, y, t) = u_{mn}(t) \cdot W_{mn}(x, y) \quad (5)$$

$$\varphi(x, y, t) = u_{mn}^2(t) \cdot \phi_{mn}(x, y) \quad (6)$$

其中 $W_{mn}(x, y) = W(x, y) = W$ 表示振型函数; $u_{mn}(t) = u(t) = u$, $\phi_{mn}(x, y) = \phi(x, y) = \phi$ 为, $\varphi(x, y, t) = \varphi$ 为未知函数。

根据薄膜振动理论, 满足边界条件(1)的振型函数为:

$$W_{mn}(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (7)$$

其中 m 和 n 为整数, 表示 x 和 y 方向上的正弦半波数。

将(5)和(6)代入(4)得:

$$\frac{1}{E_1} \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} + \frac{1}{E_2} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \left(\frac{1}{G} - \frac{\mu_1}{E_1} - \frac{\mu_2}{E_2} \right) \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \quad (8)$$

将(7)和(8)得:

$$\frac{1}{E_1} \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} + \frac{1}{E_2} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \left(\frac{1}{G} - \frac{\mu_1}{E_1} - \frac{\mu_2}{E_2} \right) \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{m^2 n^2 \pi^4}{2a^2 b^2} \left(\cos \frac{2m\pi x}{a} + \cos \frac{2n\pi y}{b} \right) \quad (9)$$

分析方程(9)的解的结构, 设方程(9)的解为:

$$\phi(x, y) = \alpha \cdot \cos \frac{2m\pi x}{a} + \beta \cdot \cos \frac{2n\pi y}{b} + \gamma_1 x^3 + \gamma_2 y^3 + \gamma_3 x^2 y + \gamma_4 xy^2 + \gamma_5 x^2 + \gamma_6 y^2 + \gamma_7 xy \quad (10)$$

将(10)代入(9)得:

$$\frac{16m^4 \pi^4 \alpha}{a^4 E_2} \cos \frac{2m\pi x}{a} + \frac{16n^4 \pi^4 \beta}{b^4 E_1} \cos \frac{2n\pi y}{b} = \frac{m^2 n^2 \pi^4}{2a^2 b^2} \left(\cos \frac{2m\pi x}{a} + \cos \frac{2n\pi y}{b} \right) \quad (11)$$

比较方程(11)两边的系数得:

$$\alpha = \frac{E_2 n^2 a^2}{32m^2 b^2}, \quad \beta = \frac{E_1 m^2 b^2}{32n^2 a^2}$$

将(10)代入边界条件(2)得:

$$\begin{cases} \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_7 = 0 \\ \gamma_5 = \frac{\pi^2 E_2 n^2}{16b^2} \\ \gamma_6 = \frac{\pi^2 E_1 m^2}{16a^2} \end{cases}$$

将 α 、 β 、 γ_1 、 γ_2 、 γ_3 、 γ_4 、 γ_5 、 γ_6 、 γ_7 代入(10), 然后再将(10)代入(6)可得:

$$\varphi(x, y, t) = \left(\frac{E_2 n^2 a^2}{32m^2 b^2} \cos \frac{2m\pi x}{a} + \frac{E_1 m^2 b^2}{32n^2 a^2} \cos \frac{2n\pi y}{b} + \frac{\pi^2 E_2 n^2}{16b^2} x^2 + \frac{\pi^2 E_1 m^2}{16a^2} y^2 \right) u^2(t) \quad (12)$$

将(5), (6)和(12)代入(3)中, 然后根据伽辽金法得:

$$\begin{aligned} & \iint_S \left[\frac{\rho}{h} W \frac{\partial^2 u(t)}{\partial t^2} - \left(\sigma_{0x} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \sigma_{0y} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \sigma_{0xy} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) u(t) \right. \\ & \left. - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right) u^3(t) \right] W ds = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

很明显, 方程(13)是一个关于 $u(t)$ 的非线性微分方程:

$$\psi_1 \cdot \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + \psi_2 \cdot u(t) + \psi_3 \cdot u^3(t) = 0 \quad (14)$$

其中:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{\rho ab}{4h} \\ \psi_2 &= \frac{\pi^2 ab}{4} \left(\frac{m^2}{a^2} \sigma_{0x} + \frac{n^2}{b^2} \sigma_{0y} \right) \\ \psi_3 &= \frac{3ab\pi^4}{64} \left(\frac{E_1 m^4}{a^4} + \frac{E_2 n^4}{b^4} \right) \end{aligned}$$

将 ψ_1 、 ψ_2 和 ψ_3 代入(14)得:

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + \frac{h\pi^2}{\rho} \left(\frac{m^2}{a^2} \sigma_{0x} + \frac{n^2}{b^2} \sigma_{0y} \right) u(t) + \frac{3h\pi^4}{16\rho} \left(\frac{E_1 m^4}{a^4} + \frac{E_2 n^4}{b^4} \right) u^3(t) = 0$$

令: $\lambda = \frac{h\pi^2}{\rho} \left(\frac{m^2}{a^2} \sigma_{0x} + \frac{n^2}{b^2} \sigma_{0y} \right)$, $\varepsilon = \frac{3h\pi^4}{16\rho} \left(\frac{E_1 m^4}{a^4} + \frac{E_2 n^4}{b^4} \right)$, 可得:

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + \lambda \cdot u(t) + \varepsilon \cdot u^3(t) = 0 \quad (15)$$

在(15)式中, ε 并不是小参数, 即(15)式是一个强非线性振动方程。

4. 控制方程的求解

方程(15)和它的初始条件可以表示成如下形式:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \lambda \cdot u + \varepsilon \cdot u^3 = 0, \quad u(0) = a_0, \quad u'(0) = 0 \quad (16)$$

其中 a_0 为振动的初始位移。

根据同伦摄动法[12], 可以构造一个同伦满足下式:

$$L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p\varepsilon v^3 = 0 \quad (17)$$

其中 $L(u) = d^2u/dt^2 + \lambda \cdot u$ 。

设方程(17)的解具有如下形式:

$$v(t) = v_0(t) + p \cdot v_1(t) + p^2 \cdot v_2(t) + \dots \quad (18)$$

其中 $v_i(t), i = 0, 1, 2, \dots$ 为待确定的函数。

将(18)代入(17)得:

$$L(v_0) - L(u_0) = 0, \quad v_0(0) = a_0, \quad v_0'(0) = 0 \quad (19)$$

$$L(v_1) + L(u_0) + \varepsilon v_0^3 = 0, \quad v_1(0) = v_1'(0) = 0 \quad (20)$$

令 $v_0(t) = u_0(t) = a_0 \cos \sqrt{\lambda} \alpha t$ 作为方程(17)的初始近似解, 其中 α 为未知数。则根据(20)可以得到:

$$\frac{dv_1}{dt} + \lambda v_1 + a_0 \left(\lambda - \lambda \alpha^2 + \frac{3}{4} \varepsilon a_0^2 \right) \cos \sqrt{\lambda} \alpha t + \frac{1}{4} \varepsilon a_0^3 \cos 3\sqrt{\lambda} \alpha t = 0 \quad (21)$$

方程(21)是一个线性微分方程, 其解为:

$$v_1 = \left(\lambda - \lambda \alpha^2 + \frac{3}{4} \varepsilon a_0^2 \right) \frac{a_0}{\lambda(\alpha^2 - 1)} \cdot (\cos \sqrt{\lambda} \alpha t - \cos \sqrt{\lambda} t) \\ + \frac{\varepsilon a_0^3}{4\lambda(9\alpha^2 - 1)} (\cos 3\sqrt{\lambda} \alpha t - \cos \sqrt{\lambda} t) \quad (22)$$

为了消除可能在下次迭代计算中出现的永久项, 可以令 $\cos \sqrt{\lambda} t$ 的系数为零。

$$-\left(\lambda - \lambda \alpha^2 + \frac{3}{4} \varepsilon a_0^2 \right) \frac{a_0}{\lambda(\alpha^2 - 1)} - \frac{\varepsilon a_0^3}{4\lambda(9\alpha^2 - 1)} = 0 \quad (23)$$

在(23)中, 因为 $\lambda \neq 0$, 所以必有:

$$\alpha = \sqrt{\frac{10\lambda + 7\varepsilon a_0^2 + \sqrt{64\lambda^2 + 104\lambda\varepsilon a_0^2 + 49\varepsilon^2 a_0^4}}{18\lambda}} \quad (24)$$

因此控制方程的振动频率为:

$$\omega = \sqrt{\lambda} \alpha = \sqrt{\frac{10\lambda + 7\varepsilon a_0^2 + \sqrt{64\lambda^2 + 104\lambda\varepsilon a_0^2 + 49\varepsilon^2 a_0^4}}{18}} \quad (25)$$

振动频率的精确解为[13]:

$$\omega_{ex} = \frac{\sqrt{\lambda + \frac{\varepsilon}{2} a_0^2}}{\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \left(\frac{(2p-1)!!}{(2p)!!} \right)^2 \left(\frac{\varepsilon a_0^2}{2\lambda + \varepsilon a_0^2} \right)^p} \quad (26)$$

其中 $p = 0, 1, 2, 3, \dots$

通过 L-P 摄动法求解得到的频率为[14]:

$$\omega_{pert} = \sqrt{\lambda} + \frac{3\epsilon a_0^2}{\sqrt{\lambda} 8} \quad (27)$$

5. 算例分析

选用工程中常用的膜材作为算例进行计算。 x 向的弹性模量为 $E_1 = 1.41 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$ ， y 向的弹性模量为 $E_2 = 0.905 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$ ，膜材面密度为 $\rho = 1.72 \text{ kg/m}^2$ ；膜材厚度为 $h = 0.8 \text{ mm}$ ；膜材长宽为 $a = 1 \text{ m}$ ， $b = 1 \text{ m}$ ，初始张拉应力为 $\sigma_{0x} = \sigma_{0y} = 5.0 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$ 。

将以上的材料参数代入式(25)，(26)和(27)计算膜材振动的频率，计算结果如下表 1 和图 2~4。对计算结果进行比较分析可得：

Table 1. Frequency values (rad/s) under different initial displacement

表 1. 不同初始位移下的振动频率

阶数	公式	初位移 a_0 (m)										
		0.10	0.09	0.08	0.07	0.06	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01	$w_0 \rightarrow 0$
1	(25)	749.32	682.31	616.22	551.38	488.31	427.80	371.13	320.38	278.82	250.88	240.95
	(26)	725.63	661.75	598.82	537.18	477.30	419.93	366.21	317.97	278.09	250.82	240.95
	(27)	1251.66	1059.62	887.80	736.20	604.80	493.63	402.66	331.91	281.38	251.06	240.95
2	(25)	1447.47	1323.23	1201.25	1082.34	967.63	858.84	758.58	670.71	600.64	554.80	538.78
	(26)	1405.22	1286.99	1171.08	1058.21	949.45	846.33	751.16	667.32	599.71	554.73	538.78
	(27)	2161.18	1852.93	1577.12	1333.76	1122.84	944.38	798.36	684.80	603.68	603.68	538.78
3	(25)	1752.38	1594.08	1437.77	1284.18	1134.44	990.34	854.77	732.60	631.70	563.27	538.78
	(26)	1695.88	1544.89	1395.98	1249.87	1107.64	970.97	842.48	726.44	629.80	563.10	538.78
	(27)	3034.62	2560.41	2136.12	1761.74	1437.28	1162.74	938.11	763.40	638.61	563.74	538.78

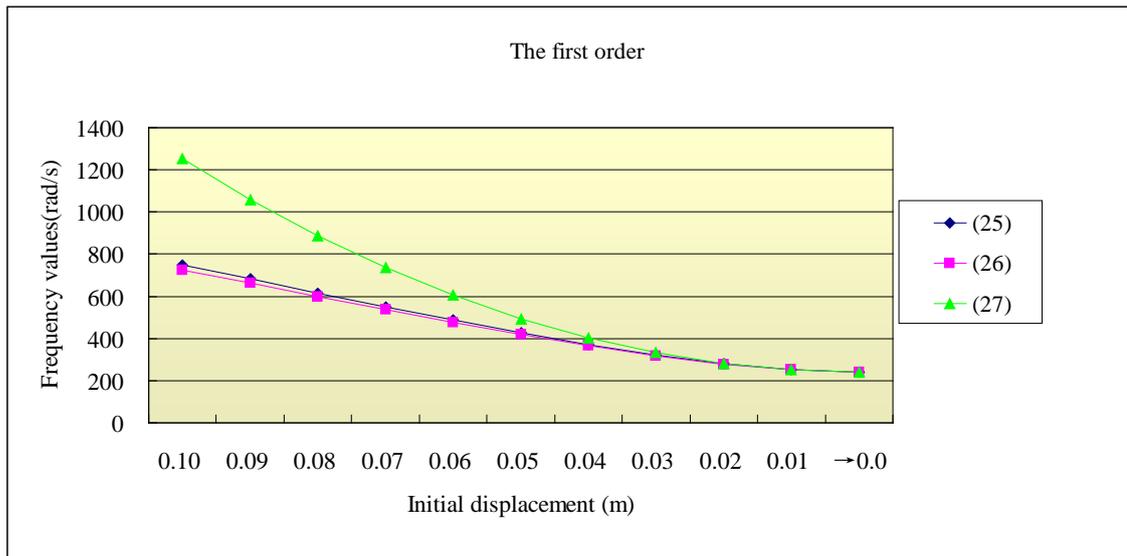


Figure 2. Frequency values of the first order under different initial displacement

图 2. 不同初始位移下的一阶振动频率

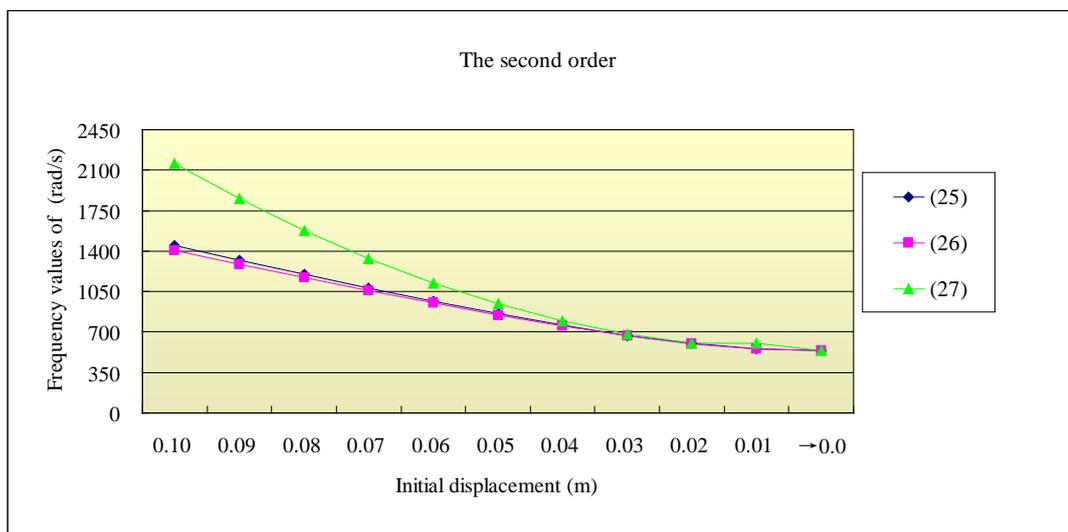


Figure 3. Frequency values of the second order under different initial displacement

图 3. 不同初始位移下的二阶振动频率

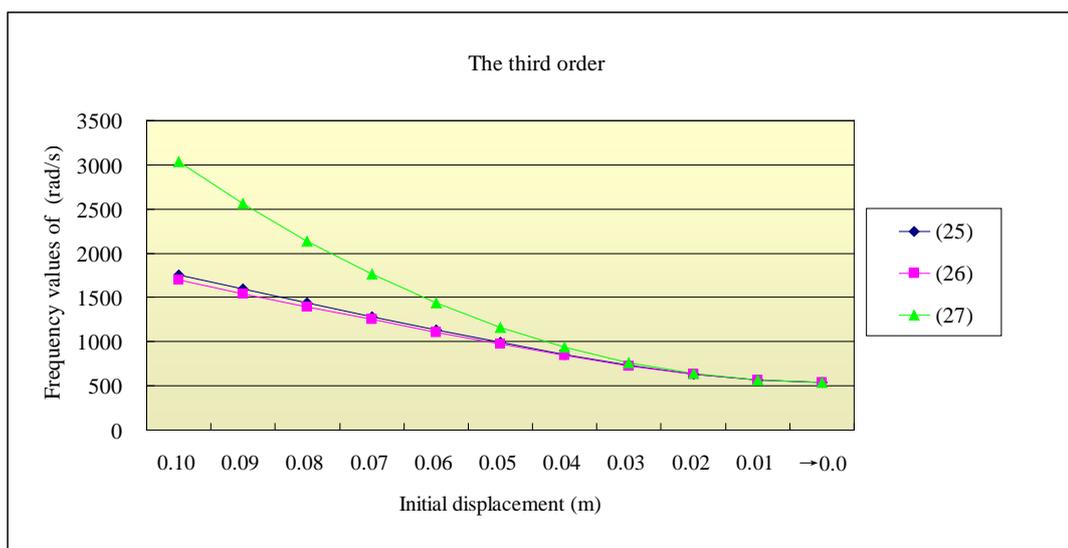


Figure 4. Frequency values of the third order under different initial displacement

图 4. 不同初始位移下的三阶振动频率

① 按照式(25), (26)和(27)计算的所有频率值都随着初始位移的增加而增加。这是因为随着初始位移的增加,膜材的内力和横向刚度都将增加,因此膜面也将振动得更快,因此频率就高。这也反映了膜材振动的非线性特性。同时,在相同初位移下的振动频率随着阶数的增加而增加。当初位移接近零的时候,按照式(25), (26)和(27)计算的频率都相同且等于按照小挠度理论计算的频率。

② 按照式(25)计算的频率值比按照式(26)计算的频率值稍大,且它们之间的误差随着初位移的增加而逐渐增大;在表 1 中,最大的误差为 3.3%。按照式(27)计算的频率也比按照式(26)计算的频率大,它们之间的误差随着初始位移的增加而显著增大;在表 1 中,最大的误差为 78.9%。

③ 当初位移较小,且阶数较低时,按照式(25), (26)和(27)计算的频率值非常接近。当 $a_0 \leq 0.04$ 时,它们三者之间的最大误差为 11.34%。因此,可以认为当 $a_0/a \leq 0.04$ 时,运用式(25)和(27)计算前三

阶频率可以满足工程精度要求, 且非常简便。

④ 很显然, 式(25)的精度要高于(27)。式(27)只适用于薄膜的弱非线性振动, 即式(27)只对小参数有效。而式(25)不仅适于弱非线性, 也适于强非线性的情况, 即式(27)不仅对小参数有效, 而且对大参数也有效。

根据表 1 和图 2~4 的数据, 进一步讨论: 当初始位移为 0.1 m 时, 按照式(25)和(26)计算的频率值的最大误差为 3.3%, 那么当初位移 a_0 更大, 甚至 $a_0 \rightarrow \infty$ 时, 为讨论式(25)的精度, 构造如下极限:

$$\lim_{a_0 \rightarrow \infty} \frac{\omega_{ex}}{\omega} = \frac{\sqrt{\lambda + \frac{\varepsilon}{2} a_0^2}}{\left(\sqrt{\frac{10\lambda + 7\varepsilon a_0^2 + \sqrt{64\lambda^2 + 104\lambda\varepsilon a_0^2 + 49\varepsilon^2 a_0^4}}{18}} \cdot \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \left(\frac{(2p-1)!!}{(2p)!!} \right)^2 \left(\frac{\varepsilon a_0^2}{2\lambda + \varepsilon a_0^2} \right)^p \right)} = 0.96$$

因此, 对于任意的初位移, 按照式(25)计算的结果与精确解的最大差小于等于 4%。

6. 结论

本文采用同伦摄动法求解了四边简支矩形正交异性膜结构非线性自由振动的控制方程, 得到了非线性振动频率的近似解析解。本文所得公式(25)的精度比按照 L-P 摄动法求得的公式(27)的精度更高, 且公式(25)不仅适于弱非线性振动, 也适于强非线性振动。另外, 对于任意的初始位移 a_0 , 按照公式(25)计算的结果与精确解(26)的最大误差小于 4%。因此本文求解出的计算公式(25)完全能满足工程精度要求, 且公式简单实用。本文的研究结果为建筑膜结构和其他膜结构的动力设计提供了理论计算依据。

基金项目

本文的研究得到重庆市教委科技项目的资助, 项目编号: KJ08A12。

参考文献 (References)

- [1] 陈务军 (2004) 膜结构工程设计. 中国建筑工业出版社, 北京.
- [2] 张其林 (2002) 索和膜结构. 同济大学出版社, 上海.
- [3] Vega, D.A., Vera, S.A. and Laura, P.A.A. (1999) Fundamental frequency of vibration of rectangular membranes with an internal oblique support. *Journal of Sound and Vibration*, **224**, 780-783. <http://dx.doi.org/10.1006/jsvi.1999.2219>
- [4] Kang, S.W. and Lee, J.M. (2002) Free vibration analysis of composite rectangular membranes with an oblique interface. *Journal of Sound and Vibration*, **251**, 505-517. <http://dx.doi.org/10.1006/jsvi.2001.4015>
- [5] Kang, S.W. (2004) Free vibration analysis of composite rectangular membranes with a bent interface. *Journal of Sound and Vibration*, **272**, 39-53. [http://dx.doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00305-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00305-5)
- [6] Reutskiy, S.Yu. (2009) Vibration analysis of arbitrarily shaped membranes. *CMES—Computer Modeling in Engineering & Sciences*, **51**, 115-142.
- [7] 钱国祯 (1982) 二向受力不等的平面薄膜自由振动问题解. *应用数学和力学*, **6**, 817-824.
- [8] 张亿果, 袁驷 (1993) 有限元线法求解非线性模型问题—III. 薄膜的固有振动. *工程力学*, **3**, 1-8.
- [9] 罗吉, 罗亮生 (2010) 圆环膜自由振动的数学模型及其若干声学特性. *数学杂志*, **1**, 168-172.
- [10] 林文静, 陈树辉 (2010) 平面薄膜自由振动的有限元分析. *动力学与控制学报*, **3**, 202-206.
- [11] Liu, C.J., Zheng, Z.L., Yang, X.Y., et al. (2014) Nonlinear damped vibration of pre-stressed orthotropic membrane structure under impact loading. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, **14**, Article ID: 1350055.
- [12] He, J.H. (2003) Homotopy perturbation method: A new nonlinear analytical technique. *Applied Mathematics and Computation*, **135**, 73-79. [http://dx.doi.org/10.1016/S0096-3003\(01\)00312-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0096-3003(01)00312-5)
- [13] Zheng, Z.L., Liu, C.J., He, X.T., et al. (2009) Free vibration analysis of rectangular orthotropic membranes in large

deflection. *Mathematical Problems in Engineering*, **2009**, Article ID: 634362.

- [14] Liu, C.J., Zheng, Z.L., He, X.T., et al. (2010) L-P perturbation solution of nonlinear free vibration of prestressed orthotropic membrane in large amplitude. *Mathematical Problems in Engineering*, **2010**, Article ID: 561364.