

基于杠杆型非线性能量阱的复合材料层合梁 横向振动抑制

王海舟

沈阳航空航天大学航空宇航学院, 辽宁 沈阳

收稿日期: 2024年5月22日; 录用日期: 2024年6月19日; 发布日期: 2024年6月29日

摘 要

本文将杠杆型非线性能量阱(Lever-Type Nonlinear Energy Sink, LNES)耦合到复合材料层合梁的中点位置,研究了LNES对梁的横向振动抑制性能。结合牛顿第二运动定律和广义哈密顿原理,推导了耦合系统的动力学方程。采用伽辽金截断法离散耦合系统的偏微分控制方程,并通过龙格-库塔法获得近似数值解,验证了谐波平衡法得到的近似解析解。对比在相同幅值激励下耦合NES系统的响应曲线,发现LNES对系统的振动抑制效果更为优越。此外,讨论了LNES单一参数变化对系统幅频响应曲线的影响。根据结果确定, LNES对复合材料层合梁的横向振动有着显著的振动抑制效果。

关键词

复合材料层合梁, 杠杆型非线性能量阱, 谐波平衡法, 振动抑制

Transverse Vibration Suppression of Laminated Composite Beams with a Lever-Type Nonlinear Energy Sink

Haizhou Wang

College of Aerospace Engineering, Shenyang Aerospace University, Shenyang Liaoning

Received: May 22nd, 2024; accepted: Jun. 19th, 2024; published: Jun. 29th, 2024

Abstract

The research explores the efficacy of transverse vibration suppression in a laminated composite beam. A lever-type nonlinear energy sink (LNES) is positioned at the beam's midpoint to facilitate

this suppression. The dynamic equations of the coupled system are derived in conjunction with Newton's second law of motion and generalized Hamilton's principle. The governing partial differential equations of the coupled system are truncated by the Galerkin method. The approximate numerical solutions obtained by the Runge-Kutta method verify the approximate analytical solution obtained by the harmonic balance method. The transient responses and steady-state responses of the coupled system were observed. It was found that the LNES exhibits a significant vibration suppression effect. Comparing the amplitude-frequency response curves of the coupled NES system reveals. The LNES exhibits a superior vibration suppression effect than NES under the same amplitude excitation. Furthermore, the impact of a single parameter change of the LNES on the amplitude-frequency response curve of the system is demonstrated. The results indicate that the LNES has a significant effect on suppressing transverse vibration in laminated composite beams.

Keywords

Laminated Composite Beam, Lever-Type Nonlinear Energy Sink, Harmonic Balance Method, Vibration Suppression

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

复合材料因其卓越的特性，如高强度、低密度、优异的耐腐蚀性和可设计性等，在工程制造领域得到广泛应用。它们尤其在飞机、卫星、火箭等航空航天系统中，都以复合材料层合梁作为首选材料。但是，当梁上所承受的外部激励频率与梁的固有频率相同时，共振导致的高振幅振动会极大缩短梁的寿命。因此，梁的振动控制成为一个重要的研究课题。

近年来，人们对抑制复合材料结构的振动特性和动态行为进行了广泛的研究。Nguyen 等人[1]提出了一种利用三角级数展开来分析复合材料层合梁的系统响应的新型分析理论。Mohammad-Abadi 等人[2]运用了不同的梁理论评估和探讨了不同边界条件的复合材料层合梁的动力学行为。工程领域中常见的振动控制方法[3]主要为被动振动控制和主动振动控制。而被动振动控制的研究相对更多，迄今为止，已有大量的研究对被动非线性减振器进行了更新设计和探讨。非线性能量阱(Nonlinear Energy Sink, NES) [4] [5] [6] [7]正是一种高效且具有广泛应用前景的被动减振装置，能在宽频带内提供高效减振。它主要由非线性弹簧、线性阻尼器和附加质量块组成，其工作原理是基于其独特的非线性动力学特性，能够有效地吸收和耗散结构的振动能量。由于其卓越的振动控制性能，许多研究者对 NES 的复杂动力学行为进行了深入的研究和改进，取得了许多重要成果。钟锐等人[8]应用复变量 - 平均法对比分析了单自由度 NES 和双自由度串联 NES 对系统高分支响应的抑制作用。Zhang 等人[9]提出了一种在弹性结构的边界安装惯性型 NES 来抑制弯曲振动的新颖方法，对于探究具非线性边界弹性结构的振动问题具有重要意义。李继伟等人建立了冲击减振器与 NES 耦合系统，数值模拟的结果证实了该结构的高效振动抑制性能。Zang 等人所提出的杠杆型 NES (Lever-Type nonlinear Energy Sink, LNES)在减振方面相比于其他改进型 NES 有独特优势。LNES 是一种融合了轻质杠杆和 NES 的减振装置，该装置通过引入杠杆机制，在减少结构额外质量的同时还增强了能量转移的效率，这样的设计能够让系统在更宽的频率范围内更好的实现减振效果。LNES 大多被用在离散体结构仿真中，Cao 等人将 LNES 耦合到连续体系统中，探讨了其在连续体结构中的振动抑制效果。

本文将 LNES 耦合到复合材料层合梁的中点位置抑制其横向振动响应。基于欧拉 - 伯努利梁理论, 通过广义哈密顿原理, 推导出系统的运动控制方程。用伽辽金截断法截断系统的偏微分控制方程, 数值解和近似解析解相对应, 验证了谐波平衡法的正确性。结果表明, LNES 对梁的瞬态响应和稳态响应都具有显著的振动抑制效果。并且, 单一的 LNES 参数变化会导致系统幅频响应产生不同趋势的变化。因此, 本文的研究工作有利于推动杠杆型非线性能量阱在工程实践中的应用。

2. 动力学建模

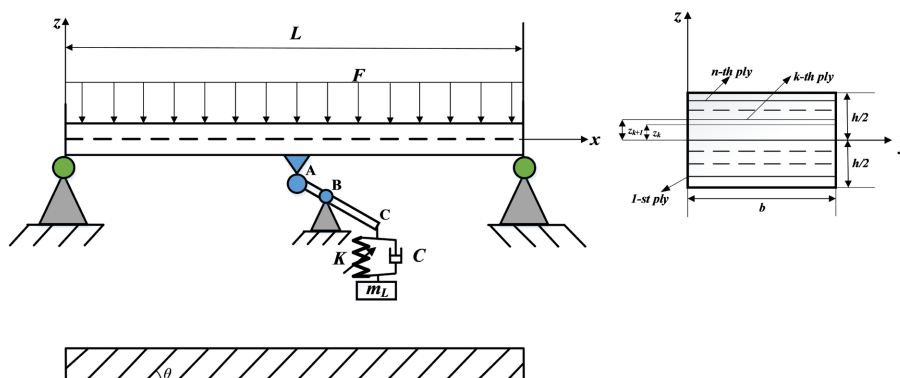


Figure 1. The laminated composite beam coupled with LNES

图 1. 耦合杠杆型非线性能量阱的复合材料层合梁系统

图 1 展示了带有杠杆型非线性能量阱(Lever-Type Nonlinear Energy Sink, LNES)的复合材料层合梁的力学模型。该复合材料层合梁的长度为 L , 宽度为 b , 厚度为 h , 采用对称铺设, 纤维铺设角度设置为 $[\theta, -\theta]$ s。 F 表示均匀加载在层合梁上的简谐力激励。LNES 模型通过将非线性弹簧和线性阻尼器并联连接到一个附加质量块, 并通过一个轻质杠杆将其耦合到层合梁中点位置上。LNES 的杠杆率 α 表示长度 AC 与 AB 之间的比值。其中, K 、 C 和 m_L 分别表示 LNES 的非线性弹簧的立方刚度、线性阻尼器的阻尼和附加质量块的质量。

利用欧拉 - 伯努利梁理论分析复合材料层合梁的横向振动特性。梁在 x 向和 z 方向上的位移分量如下所示:

$$\tilde{u}(x, z, t) = -z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \quad (1)$$

$$\tilde{w}(x, z, t) = w(x, t) \quad (2)$$

其中 $w(x, t)$ 是梁中性面的横向位移。

根据冯 - 卡门几何大变形理论, 应变和位移之间的关系, 表述如下:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (3)$$

将公式(1)和公式(2)带入到公式(3)可得:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (4)$$

在 x 方向上复合材料层合梁的第 k 层材料的应力 - 应变关系为:

$$\sigma_{xx}^{(k)} = \bar{Q}_{11}^{(k)} \varepsilon_{xx} \quad (5)$$

其中第 k 层的刚度($\bar{Q}_{11}^{(k)}$)可以表示为:

$$\bar{Q}_{11}^{(k)} = \cos^4 \theta Q_{11} + \sin^4 \theta Q_{22} + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta (Q_{12} + 2Q_{66}) \quad (6)$$

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{66} = G_{12} \quad (7)$$

梁的 x 轴的轴向力可以表示为:

$$N_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 P_1 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} J_1 \quad (8)$$

梁的 x 轴的弯矩可以表示为:

$$M_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 J_1 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} I_1 \quad (9)$$

其中

$$P_1 = \bar{Q}_{11}^{(k)} b \sum_{k=1}^n (z_{k+1} - z_k), J_1 = \bar{Q}_{11}^{(k)} b \sum_{k=1}^n \left(\frac{z_{k+1}^2 - z_k^2}{2} \right), I_1 = \bar{Q}_{11}^{(k)} b \sum_{k=1}^n \left(\frac{z_{k+1}^3 - z_k^3}{3} \right) \quad (10)$$

利用广义哈密顿原理, 可以求得耦合 LNES 的复合材料层合梁的横向振动控制方程, 表达式为:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U + \delta W) dt = 0 \quad (11)$$

其中 δT 为动能的变化, δU 为势能的变化, δW 为外力所做的虚功, 而且积分时间为 t_1 到 t_2 。

系统的虚动能的表达式为:

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} T dt &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(m_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - m_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \delta w dx dt - \int_{t_1}^{t_2} \left[m_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \delta w \right] \Big|_{x=0}^{x=L} dt \\ &\quad + \int_0^L \left(m_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + m_1 \frac{\partial w}{\partial t} \delta w \right) dx \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} \end{aligned} \quad (12)$$

其中

$$m_1 = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho dz = \rho b h, m_2 = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho z^2 dz = \frac{1}{12} \rho b h^3 \quad (13)$$

系统的虚势能的表达式为:

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} U dt &= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(N_x \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial M_x}{\partial x} \right) \delta w_0 - M_x \delta \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right] \Big|_{x=0}^{x=L} dt \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial x} + N_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} \right) \delta w_0 dx dt \end{aligned} \quad (14)$$

梁上外力所做的虚功表达式为:

$$\delta W = \int_0^L \left(F + F_L - \xi \frac{\partial w}{\partial t} \right) \delta w dx \quad (15)$$

其中 ξ 表示层合梁的阻尼系数, 用于构建层合梁的阻尼因子, F 是层合梁所受的均布简谐力, F_L 是 LNES 和层合梁之间的力, 表达式分别如下:

$$F = F_0 \sin(\omega t) \quad (16)$$

$$F_L = (1 - \alpha) \left[K (x_L - (1 - \alpha) w(x_N, t))^3 + C (\dot{x}_L - (1 - \alpha) \dot{w}(x_N, t)) \right] \tilde{\delta}(x - x_N) \quad (17)$$

其中 F_0 和 ω 分别是均布简谐力的幅值和频率。 $\tilde{\delta}$ 是狄拉克三角函数, x_N 是 LNES 附加在梁上的位置坐标, x_L 是 LNES 的位移。

将公式(12)、公式(14)和公式(15)带入到公式(11)中可得:

$$\delta w: m_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - m_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - F + \xi \frac{\partial w}{\partial t} - F_L = 0 \quad (18)$$

将公式(8)~(10)和公式(13)带入到公式(18)中, 复合材料层压梁的横向振动的运动控制方程可以表示为:

$$\begin{aligned} & m_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - m_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \xi \frac{\partial w}{\partial t} + I_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - F_0 \sin(\omega t) \\ & - (1-\alpha) \left[K(x_L - (1-\alpha)w(x_N, t))^3 + C(\dot{x}_L - (1-\alpha)\dot{w}(x_N, t)) \right] \tilde{\delta}(x - x_N) = 0 \\ & m_L \ddot{x}_L + \left[K(x_L - (1-\alpha)w(x_N, t))^3 + C(\dot{x}_L - (1-\alpha)\dot{w}(x_N, t)) \right] = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

无量纲参数假设如下:

$$\bar{w} = \frac{w}{L}, \bar{x}_0 = \frac{x_0}{L}, \bar{x}_L = \frac{x_L}{L}, \bar{x}_N = \frac{x_N}{L}, \bar{t} = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{I_1}{m_1}} \quad (20)$$

则复合材料层合梁横向振动控制方程的无量纲形式表示如下:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2} - \bar{m} \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{t}^2} + \bar{\xi} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^4} - \frac{3}{2} \bar{P} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} - \bar{F} \sin(\omega \bar{t}) \\ & - (1-\alpha) \left[\bar{K}(\bar{x}_L - (1-\alpha)\bar{w}(\bar{x}_N, \bar{t}))^3 + \bar{C}(\dot{\bar{x}}_L - (1-\alpha)\dot{\bar{w}}(\bar{x}_N, \bar{t})) \right] \tilde{\delta}(\bar{x} - \bar{x}_N) = 0 \\ & \bar{m}_L \ddot{\bar{x}}_L + \left[\bar{K}(\bar{x}_L - (1-\alpha)\bar{w}(\bar{x}_N, \bar{t}))^3 + \bar{C}(\dot{\bar{x}}_L - (1-\alpha)\dot{\bar{w}}(\bar{x}_N, \bar{t})) \right] = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

其中

$$\bar{P} = \frac{P_1 L^2}{I_1}, \bar{m} = \frac{m_2}{m_1 L^2}, \bar{\xi} = \frac{L^2 \xi}{\sqrt{I_1 m_1}}, \bar{F} = \frac{F_0 L^3}{I_1}, \bar{C} = \frac{L^2 C}{\sqrt{I_1 m_1}}, \bar{K} = \frac{KL^6}{I_1}, \bar{m}_L = \frac{m_L}{m_1} \quad (22)$$

3. 解析方法

3.1. 伽辽金截断法

由于复合材料层合梁横向振动的无量纲控制方程(21)是一组偏微分方程, 需要利用伽辽金截断法将其截断为常微分方程。随后, 可应用龙格-库塔数值法来求解系统的时间响应。

假设复合材料层合梁偏微分方程的横向振动位移的解为:

$$\bar{w}(\bar{x}, \bar{t}) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(\bar{x}) q_i(\bar{t}) \quad (23)$$

其中, n 为大于或等 1 的正整数。 $\Phi_i(\bar{x})$ 为梁的势函数, $q_i(\bar{t})$ 则表示梁横向振动的广义坐标。将公式(23)带入方程(21), 可以得到:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \Phi_i(\bar{x}) \ddot{q}_i(\bar{t}) - \bar{m} \sum_{i=1}^n \Phi_i''(\bar{x}) \ddot{q}_i(\bar{t}) + \bar{\xi} \sum_{i=1}^n \Phi_i(\bar{x}) \dot{q}_i(\bar{t}) \\ & + \sum_{i=1}^n \Phi_i^{(4)}(\bar{x}) q_i(\bar{t}) - \frac{3}{2} \bar{P} \left(\sum_{i=1}^n \Phi_i(\bar{x}) q_i(\bar{t}) \right)^2 \left(\sum_{i=1}^n \Phi_i''(\bar{x}) q_i(\bar{t}) \right) - \bar{F} \sin(\omega \bar{t}) \\ & - (1-\alpha) \left[\bar{K} \left(\bar{x}_L - (1-\alpha) \left(\sum_{i=1}^n \Phi_i(\bar{x}_N) q_i(\bar{t}) \right) \right)^3 + \bar{C} \left(\dot{\bar{x}}_L - (1-\alpha) \left(\sum_{i=1}^n \Phi_i(\bar{x}_N) \dot{q}_i(\bar{t}) \right) \right) \right] \tilde{\delta}(\bar{x} - \bar{x}_N) = 0 \\ & \bar{m}_L \ddot{\bar{x}}_L + (1-\alpha) \left[\bar{K} \left(\bar{x}_L - (1-\alpha) \left(\sum_{i=1}^n \Phi_i(\bar{x}_N) q_i(\bar{t}) \right) \right)^3 + \bar{C} \left(\dot{\bar{x}}_L - (1-\alpha) \left(\sum_{i=1}^n \Phi_i(\bar{x}_N) \dot{q}_i(\bar{t}) \right) \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

鉴于复合材料层合梁两端为简支边界条件，因此模态函数可以假设为：

$$\Phi_i(\bar{x}) = \sqrt{2} \sin(i\pi\bar{x}) \quad (25)$$

Table 1. Composite properties of the graphite/epoxy material

表 1. 复合材料层合梁材料属性及参数

参数	数值	单位
b	0.03	m
h	0.01	m
L	0.2	m
ζ	3.1×10^{-3}	N·s/m
E_1	185	Gpa
E_2	10.5	Gpa
G_{12}	7.3	Gpa
μ_{12}	0.28	-
ρ	1600	kg/m
θ	45°	-

在应用伽辽金截断法时，选取梁的模态函数作为势函数和权函数。随后，将方程(24)两端乘以权函数 $\Phi_s(\bar{x})$ ，并在区间[0, 1]上积分，从而实现偏微分方程到常微分方程的转换。方程简化整理后，可以表示为：

$$\begin{aligned}
 & A_{1g} \ddot{q}_i(\bar{t}) + A_{2g} \dot{q}_i(\bar{t}) + A_{3g} q_i(\bar{t}) + F_{fg} \sin(\omega t) - \int_0^1 \frac{3}{2} \bar{P} \left(\sum_{i=1}^n \Phi_i'(\bar{x}) q_i(\bar{t}) \right)^2 \left(\sum_{i=1}^n \Phi_i''(\bar{x}) q_i(\bar{t}) \right) \Phi_s(\bar{x}) d\bar{x} \\
 & - (1-\alpha) \left[\bar{K} \left(\bar{x}_L - (1-\alpha) \left(\sum_{i=1}^n \Phi_i(\bar{x}_N) q_i(\bar{t}) \right) \right)^3 + \bar{C} \left(\dot{\bar{x}}_L - (1-\alpha) \left(\sum_{i=1}^n \Phi_i(\bar{x}_N) \dot{q}_i(\bar{t}) \right) \right) \right] \Phi_s(\bar{x}_N) = 0 \quad (26) \\
 & \bar{m}_L \ddot{\bar{x}}_L + (1-\alpha) \left[\bar{K} \left(\bar{x}_L - (1-\alpha) \left(\sum_{i=1}^n \Phi_i(\bar{x}_N) q_i(\bar{t}) \right) \right)^3 + \bar{C} \left(\dot{\bar{x}}_L - (1-\alpha) \left(\sum_{i=1}^n \Phi_i(\bar{x}_N) \dot{q}_i(\bar{t}) \right) \right) \right] = 0
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 A_{1g} &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \Phi_i(\bar{x}) \Phi_s(\bar{x}) d\bar{x} - \bar{m} \int_0^1 \sum_{i=1}^n \Phi_i''(\bar{x}) \Phi_s(\bar{x}) d\bar{x}, \\
 A_{2g} &= \bar{\zeta} \int_0^1 \sum_{i=1}^n \Phi_i(\bar{x}) \Phi_s(\bar{x}) d\bar{x}, \\
 A_{3g} &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \Phi_i^{(4)}(\bar{x}) \Phi_s(\bar{x}) d\bar{x}, \\
 F_{fg} &= -\bar{F} \int_0^1 \sum_{i=1}^n \Phi_s(\bar{x}) d\bar{x}
 \end{aligned} \quad (27)$$

表 1 给出了复合材料层合梁材料结构参数。图 2 为伽辽金截断阶数分别取 1、2、4 时，梁中点位置受迫振动数值解的幅频响应曲线。在此图中，系统参数设置为 $K = 5 \times 10^6 \text{ N/m}^3$ ， $C = 0.062 \text{ N·s/m}$ ， $m_L = 0.00096 \text{ kg}$ ， $\alpha = 4$ ， $F_0 = 0.001 \text{ N/m}$ 。值得注意的是，在部分频段上，1 阶伽辽金截断的响应与其他两阶的响应存在差异，这表明 1 阶伽辽金截断的精度不足。相比之下，2 阶和 4 阶伽辽金截断的响应在所选激

励频段范围上几乎完全重合, 由此表明 2 阶和 4 阶伽辽金截断皆可满足收敛条件。因此, 在保证精度的同时为了便于计算, 在本文后续讨论中都采用 2 阶伽辽金截断方程。

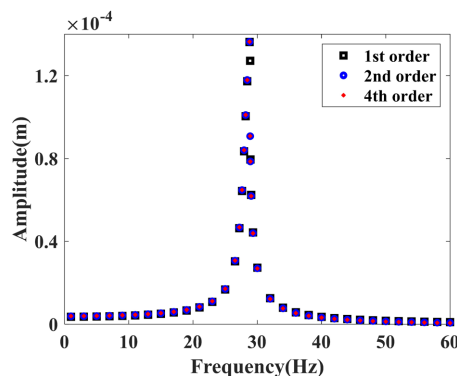


Figure 2. Convergence of different Galerkin truncation orders
图 2. 不同伽辽金截断阶数收敛性

3.2. 谐波平衡法

由伽辽金截断后的系统的常微分控制方程可以通过谐波平衡法对其进行近似解析求解。鉴于控制方程中含有立方非线性项, 因此在设定谐波解时仅考虑奇数项, 并忽略偶数阶及更高阶谐波的影响。因此, 只保留一阶和三阶谐波作为近似解析解, 系统的谐波解可以表示如下:

$$\begin{aligned} q_i(\bar{t}) &= a_{1,i} \cos(\omega \bar{t}) + b_{1,i} \sin(\omega \bar{t}) + a_{3,i} \cos(3\omega \bar{t}) + b_{3,i} \sin(3\omega \bar{t}) \\ u_L(\bar{t}) &= a_{1,L} \cos(\omega \bar{t}) + b_{1,L} \sin(\omega \bar{t}) + a_{3,L} \cos(3\omega \bar{t}) + b_{3,L} \sin(3\omega \bar{t}) \end{aligned} \quad (28)$$

式中 a 和 b 是待确定的谐波系数, i 是伽辽金截断阶数。

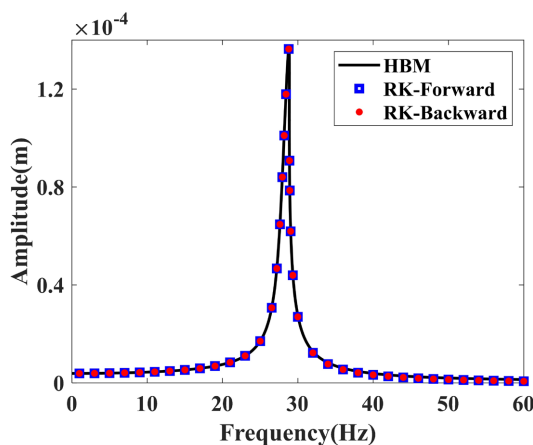


Figure 3. Comparison of approximate and numerical solutions
图 3. 近似解与数值解的对比

将公式(28)带入控制方程中, 所得到的代数方程组的解可以通过伪弧长法进行近似求得。随后, 通过计算系统响应的均方根(RMS), 可以绘制相应的振幅频率响应曲线。基于以上内容, 将龙格-库塔法求得的数值解与谐波平衡法求得的近似解进行对比, 以此验证求解方法的正确性。如图 3 所示, 系统参数设置为: $K = 5 \times 10^6 \text{ N/m}^3$, $C = 0.062 \text{ N}\cdot\text{s/m}$, $m_L = 0.00096 \text{ kg}$, $\alpha = 4$, $F_0 = 0.1 \text{ N/m}$ 。对比结果表明, 两种方法解析的结果具有很高的吻合度, 说明解析的结果是精确且可信的。

4. 减振效果分析

4.1. 瞬态响应

$$\begin{aligned} q_1 &= 0.002, \dot{q}_1 = 0, q_i = \dot{q}_i = 0, i = 2, 3, \dots, n \\ x_L &= \dot{x}_L = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

系统初始值如公式(29)所示, LNES 的参数为 $K = 5 \times 10^6 \text{ N/m}^3$, $C = 0.0062 \text{ N}\cdot\text{s/m}$, $m_L = 0.0096 \text{ kg}$, $\alpha = 4$ 。对比未控制系统与耦合 LNES 系统的瞬时响应时间历程。如图 4 所示, 未控制系统在给定初始值之后, 瞬态响应的衰减速度相对比较缓慢, 而耦合 LNES 系统则表现出极快的衰减速度。以此可以看出, LNES 结构对于系统的自由振动有着极为高效的抑制效果。

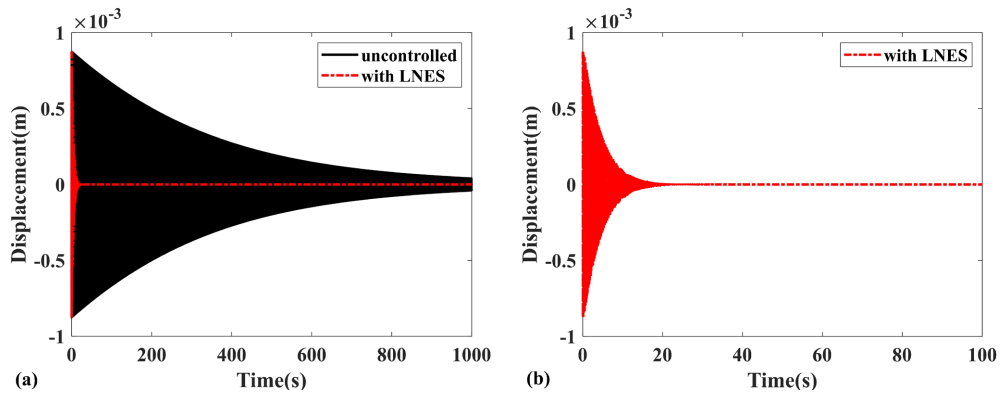


Figure 4. Comparison of transient response time histories of two systems (a) Time history plot; (b) Magnified view
图 4. 两种系统的瞬态响应时间历程对比(a) 时程图; (b) 放大图

对瞬态响应的结果进行小波变换分析可以得到两组时频图, 如图 5 所示。未受控制的系统和耦合 LNES 系统均表现出单一的主要频率成分, 即将 LNES 耦合至梁上并未对系统的固有频率产生显著影响。说明 LNES 能够在不改变结构固有频率的情况下有效地降低振动幅度。

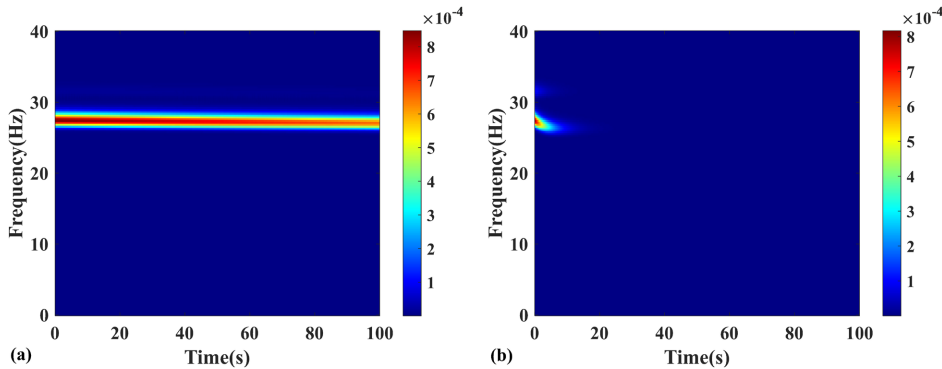


Figure 5. Time-frequency plots of the wavelet transform under transient response (a) Uncontrolled system (b) LNES system
图 5. 瞬态响应的小波变换时频图(a) 未控制系统; (b) LNES 系统

4.2. 稳态响应

分别针对耦合 LNES 与 NES 的梁系统, 分析了激励幅值变化对两个系统稳态响应的幅值 - 频率响应曲线的影响, 并以此观察 LNES 的振动抑制性能。系统参数设置为 $K = 5 \times 10^6 \text{ N/m}^3$, $C = 0.062 \text{ N}\cdot\text{s/m}$, $m_L = 0.00096 \text{ kg}$, $\alpha = 4$ 。首先观察图 6(a), 在均布简谐激励幅值 $F_0 = 0.01 \text{ N/m}$ 的条件下, 耦合 LNES 系

统的中点振幅显著小于耦合 NES 系统的振幅, 并且振动幅值降低了 90%。在图 6(b)中, 增大激励幅值至 $F_0 = 0.05$ N/m, 耦合 NES 系统的共振峰发生了明显的偏移, 而耦合 LNES 系统的变化相对较小, 其振动幅值降低了 86%。进一步增大激励幅值至 $F_0 = 0.1$ N/m, 如图 6(c)所示, 两种耦合系统的非线性硬化现象均有所加剧, 此时二者振动幅值的下降百分比降至 80%。总体而言, 随着激励振幅的增大, 系统的幅值及其非线性特性均得到增强, 而振动幅值的下降百分比却在逐渐降低。尽管如此, LNES 在振动抑制性能上相较于 NES 在仍然具有显著优势。特别是在图 6(d)中, 当激励幅值从 0.5 N/m 增大至 1.25 N/m 时, 仅考察耦合 LNES 系统的幅频响应曲线。结果显示, 尽管幅频曲线峰值随激励幅值增加而向右移动, 但在共振频率区间内, 系统的振幅反而随激励增加而减少。

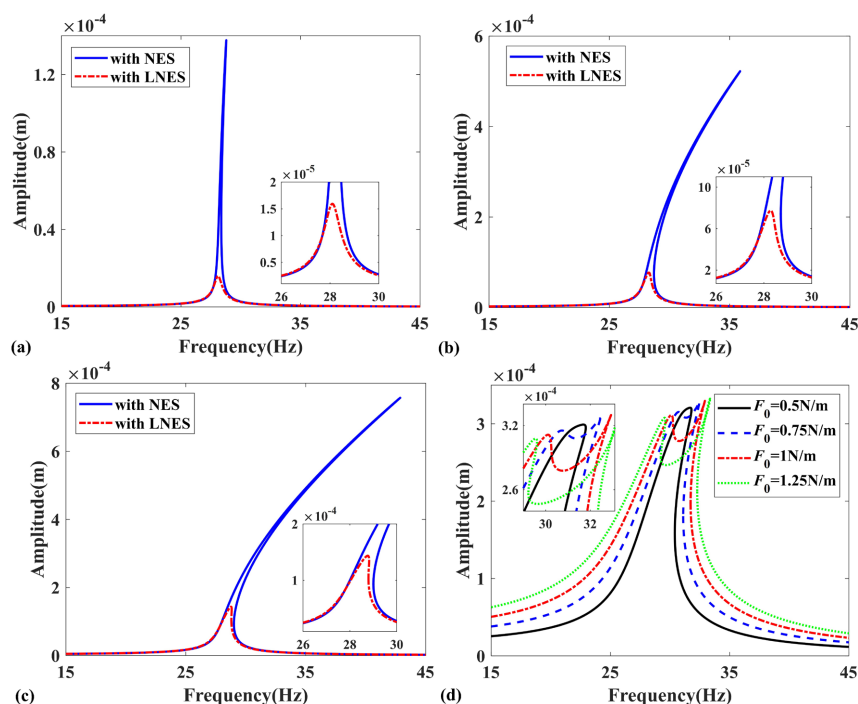


Figure 6. Frequency response curves of the beam's midpoint for different excitation amplitudes (a) $F_0 = 0.01$ N/m; (b) $F_0 = 0.05$ N/m; (c) $F_0 = 0.1$ N/m; (d) F_0 of LNES varies from 0.5 to 1.25 N/m

图 6. 不同激励幅值时梁中点位置的幅频响应曲线(a) $F_0 = 0.01$ N/m; (b) $F_0 = 0.05$ N/m; (c) $F_0 = 0.1$ N/m; (d) LNES 系统的 F_0 由 0.5 增加到 1.25 N/m

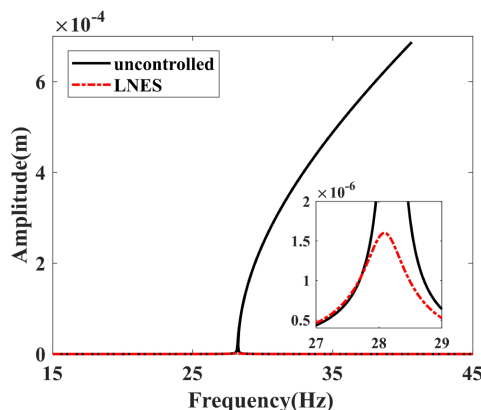


Figure 7. Vibration suppression effectiveness under harmonic excitation

图 7. 受简谐激励的振动抑制效果

图7展示了在0.001 N/m的激励幅值条件下,梁中点位置耦合LNES的幅频响应的振动抑制效果。在系统未耦合LNES时,共振峰的幅值高达 6.8712×10^{-4} m,然而,一旦与LNES耦合后,系统共振峰的幅值显著降至 1.6014×10^{-6} m,振动抑制效果达到了99.77%。这一显著结果彰显了LNES在抑制强迫振动方面的优异性能,突显了其在工程应用中的巨大潜力。

5. 参数对幅频响应的影响

杠杆型非线性能量阱的参数设置直接影响结构对系统的减振效果,主要涉及到参数 C (线性阻尼)、 m_L (附加质量)、 K (立方刚度)以及 α (杠杆率)。因此,合理的参数配置是实现结构高效减振的必要前提,讨论单一参数如何影响系统的幅频响应,对于优化减振效果至关重要。

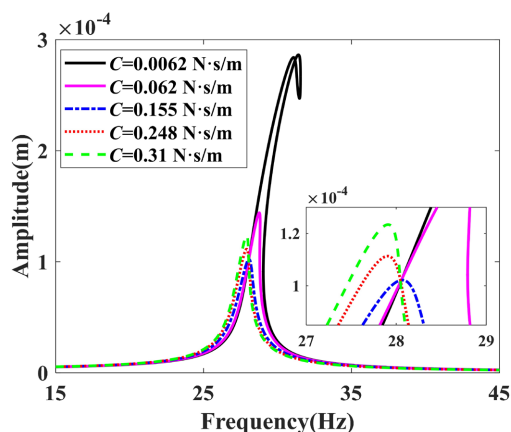


Figure 8. Frequency response curves of the beam's midpoint for different C

图8. 不同 C 时梁中点位置的幅频响应曲线

图8显示了杠杆型非线性能量阱的线性阻尼(C)变化对梁中点位置的幅频响应曲线的影响。系统参数设置为 $K = 5 \times 10^6$ N/m³, $m_L = 0.00096$ kg, $\alpha = 4$, $F_0 = 0.1$ N/m。当线性阻尼较小时($C = 0.0062$ N·s/m),系统呈现出明显的非线性硬化现象。随着线性阻尼的增加,非线性现象逐渐减弱,曲线共振峰也会发生偏移。特别的,当线性阻尼增至 $C = 0.155$ N·s/m时,观察到曲线峰值达到最小值。然而,进一步增大线性阻尼将引起曲线峰值的上升,同时增强系统非线性现象。这说明在调整系统的减振效果时,存在一个最佳的线性阻尼值。

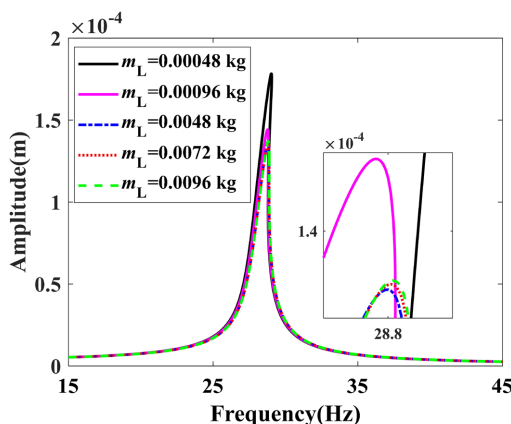


Figure 9. Frequency response curves of the beam's midpoint for different m_L

图9. 不同 m_L 时梁中点位置的幅频响应曲线

如图 9 所示, 展示了杠杆型非线性能量阱中附加质量(m_L)的变化对梁中点位置的幅频响应曲线的影响。系统参数设置为 $K = 5 \times 10^6 \text{ N/m}^3$, $C = 0.062 \text{ N}\cdot\text{s/m}$, $\alpha = 4$, $F_0 = 0.1 \text{ N/m}$ 。从图中可以观察到, 在附加质量较小时, 附加质量的增大, 幅频响应曲线的共振峰幅值降低速度较快。特别地, 当附加质量增至 $m_L = 0.0048 \text{ kg}$ 时, 共振峰的幅值降低到最小值。此外, 一旦附加质量超过此最优值, 共振峰的幅值反而开始缓慢上升, 同时共振峰也在向右偏移, 这意味着进一步增大附加质量并不会继续提高减振性能。因此, 在调整附加质量以优化减振性能时, 也存在优化值。

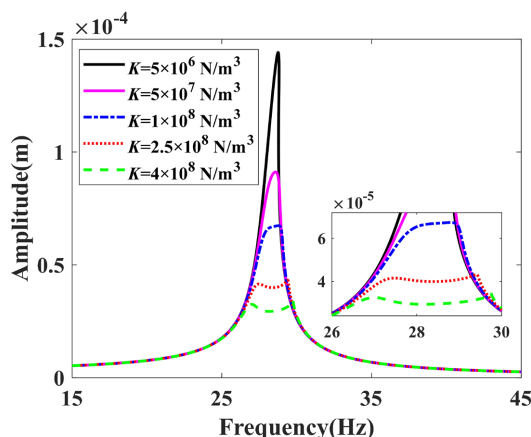


Figure 10. Frequency response curves of the beam's midpoint for different K
图 10. 不同 K 时梁中点位置的幅频响应曲线

图 10 为杠杆型非线性能量阱立方刚度(K)变化对梁中点位置的幅频响应曲线的影响。系统参数设置为 $C = 0.062 \text{ N}\cdot\text{s/m}$, $m_L = 0.00096 \text{ kg}$, $\alpha = 4$, $F_0 = 0.1 \text{ N/m}$ 。图中显示, 随着立方刚度的增加, 共振峰的峰值显著下降, 从而展现出卓越的减振效果。此外, 立方刚度的增大也使得结构的动力学特性变得更加复杂。这一结果表明, 通过调整立方刚度, 不仅可以有效地降低系统的振动幅度, 还能够一定程度上调控系统的非线性动态行为。

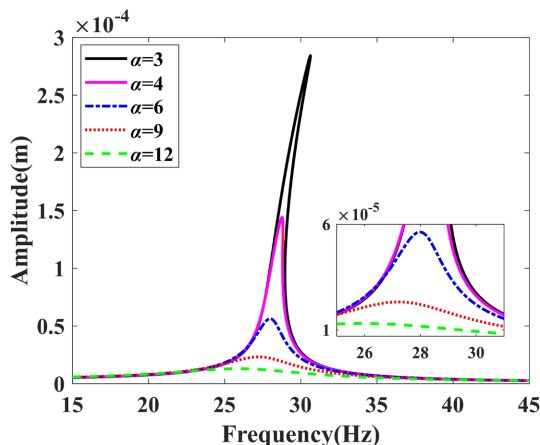


Figure 11. Frequency response curves of the beam's midpoint for different α
图 11. 不同 α 时梁中点位置的幅频响应曲线

图 11 给出了杠杆型非线性能量阱杠杆率(α)对梁中点位置的幅频响应曲线的影响。系统参数设置为 $K = 5 \times 10^6 \text{ N/m}^3$, $C = 0.062 \text{ N}\cdot\text{s/m}$, $m_L = 0.00096 \text{ kg}$, $F_0 = 0.1 \text{ N/m}$ 。观察到当 $\alpha = 3$ 时, 系统呈现出较强

的非线性硬化特性, 导致受迫振动响应的共振峰峰值相对较高。随着 α 的增大, 系统的共振峰峰值逐渐降低, 并且呈现不断向左偏移的趋势, 这意味着 α 的增大可以实现高效的振动抑制效果。

6. 结论

本文推导出了复合材料层合梁耦合 LNES 的横向振动控制方程。用系统响应评估了 LNES 的振动抑制性能, 并分析参数变化对梁中点位置幅频响应曲线峰值的影响。主要结论包括:

考虑瞬态响应时, 与未控制系统相比, 耦合 LNES 系统的时间历程图展示出更快的衰减速度, 证明 LNES 在抑制自由振动方面具有显著的效果。

在相同的激励幅值条件下, LNES 相较于 NES 展现出更佳的振动抑制性能。尽管振动幅值的下降百分比随激励幅值的增大而有所下降, LNES 仍然展示出明显的振动抑制优势。

对 LNES 的单一参数研究揭示, 在特定的参数取值范围内, LNES 的线性阻尼(C)和附加质量(m_L)存在最优值。而其立方刚度(K)和杠杆率(α)的取值越大, 其振动抑制效果越好。不过, 当 K 和 α 取值较小时, 系统的响应会表现出较强的非线性硬化现象。因此, 通过适当调节 LNES 的参数可以实现结构的最佳减振性能。

参考文献

- [1] Nguyen, T., Nguyen, N., Vo, T.P. and Thai, H. (2017) Trigonometric-series Solution for Analysis of Laminated Composite Beams. *Composite Structures*, **160**, 142-151. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.10.033>
- [2] Mohammad-Abadi, M. and Daneshmehr, A.R. (2015) Modified Couple Stress Theory Applied to Dynamic Analysis of Composite Laminated Beams by Considering Different Beam Theories. *International Journal of Engineering Science*, **87**, 83-102. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2014.11.003>
- [3] 徐鉴. 振动控制研究进展综述[J]. 力学季刊, 2015, 36(4): 547-565.
- [4] Ding, H. and Chen, L. (2020) Designs, Analysis, and Applications of Nonlinear Energy Sinks. *Nonlinear Dynamics*, **100**, 3061-3107. <https://doi.org/10.1007/s11071-020-05724-1>
- [5] Lee, Y.S., Vakakis, A.F., Bergman, L.A., McFarland, D.M., Kerschen, G., Nucera, F., et al. (2008) Passive Non-Linear Targeted Energy Transfer and Its Applications to Vibration Absorption: A Review. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-Body Dynamics*, **222**, 77-134. <https://doi.org/10.1243/14644193jmbd118>
- [6] Vakakis, A.F., Gendelman, O.V., Bergman, L.A., McFarland, D.M., Kerschen, G. and Lee, Y.S. (2008) Nonlinear Targeted Energy Transfer in Mechanical and Structural Systems. Springer Science & Business Media.
- [7] Kopidakis, G., Aubry, S. and Tsironis, G.P. (2001) Targeted Energy Transfer through Discrete Breathers in Nonlinear Systems. *Physical Review Letters*, **87**, Article ID: 165501. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.87.165501>
- [8] 钟锐, 陈建恩, 葛为民, 刘军. 串联非线性能量阱的高分支响应研究[J]. 动力学与控制学报, 2019, 17(3): 251-257.
- [9] Zhang, Z., Ding, H., Zhang, Y. and Chen, L. (2021) Vibration Suppression of an Elastic Beam with Boundary Inerter-Enhanced Nonlinear Energy Sinks. *Acta Mechanica Sinica*, **37**, 387-401. <https://doi.org/10.1007/s10409-021-01062-6>
- [10] 李继伟, 赵泽福. 冲击减振器与非线性能量阱耦合系统的振动抑制研究[J]. 动力学与控制学报, 2020, 18(2): 76-81.
- [11] Zang, J., Yuan, T., Lu, Z., Zhang, Y., Ding, H. and Chen, L. (2018) A Lever-Type Nonlinear Energy Sink. *Journal of Sound and Vibration*, **437**, 119-134. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.08.058>
- [12] Cao, R., Wang, Z., Zang, J. and Zhang, Y. (2022) Resonance Response of Fluid-Conveying Pipe with Asymmetric Elastic Supports Coupled to Lever-Type Nonlinear Energy Sink. *Applied Mathematics and Mechanics*, **43**, 1873-1886. <https://doi.org/10.1007/s10483-022-2925-8>
- [13] Rahmani, B. and Shenan, A.G. (2017) Robust Vibration Control of Laminated Rectangular Composite Plates in Hygrothermal and Thermal Environment. *Composite Structures*, **179**, 665-681. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.07.058>
- [14] Ghayesh, M.H. and Amabili, M. (2013) Steady-state Transverse Response of an Axially Moving Beam with Time-Dependent Axial Speed. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **49**, 40-49. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2012.08.003>

-
- [15] Ding, H. (2015) Periodic Responses of a Pulley–belt System with One-Way Clutch under Inertia Excitation. *Journal of Sound and Vibration*, **353**, 308-326. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.05.023>
- [16] Zang, J. and Zhang, Y. (2019) Responses and Bifurcations of a Structure with a Lever-Type Nonlinear Energy Sink. *Nonlinear Dynamics*, **98**, 889-906. <https://doi.org/10.1007/s11071-019-05233-w>