

热环境下复合式柔性蒙皮简化复合材料组合壳的模态分析

李昊男

沈阳航空航天大学航空宇航学院, 辽宁 沈阳

收稿日期: 2025年5月6日; 录用日期: 2025年6月6日; 发布日期: 2025年6月12日

摘 要

针对当前变体飞机变弯度柔性前缘较高的气动载荷和较大的变形需求的问题, 本研究提出并设计了一种新型柔性蒙皮模型。首先, 将柔性蒙皮模型设计为复合材料-粘弹性材料组合壳结构, 基于瑞利-里兹法和有限元法分析得到系统的固有频率和模态振型, 与理论值进行了对比。通过改变温度、耦合角度, 在多个工况下进行结果分析, 讨论了温度、耦合角度对组合壳结构的固有频率和振型的影响。研究发现, 温度对固有频率的影响主要来自于温度导致材料力学性能下降, 小耦合角下对低阶频率影响较大, 为提高柔性蒙皮性能提供了一种新思路。

关键词

复合材料壳, 组合结构, 粘弹性材料, 有限元, 固有频率, 瑞利-里兹法

Modal Analysis of Simplified Composite Combined Shell with Composite Flexible Skin in Thermal Environment

Haonan Li

Aeronautics and Astronautics Institute, Shenyang Aerospace University, Shenyang Liaoning

Received: May 6th, 2025; accepted: Jun. 6th, 2025; published: Jun. 12th, 2025

Abstract

Aiming at the current problem of higher aerodynamic loads and larger deformation requirements of variable-angle flexible leading edge for morphing aircraft, a new flexible skin model is proposed and designed in this study. Firstly, the flexible skin model is designed as a composite-viscoelastic

material combination shell structure, and the natural frequency and modal vibration pattern of the system are analyzed based on the Rayleigh-Ritz method and the finite element method, and compared with the theoretical values. The effects of temperature and coupling angle on the natural frequencies and vibration shapes of the combined shell structure are discussed by varying the temperature and coupling angle and analyzing the results under several working conditions. It is found that the effect of temperature on the natural frequency mainly comes from the temperature-induced degradation of the mechanical properties of the material; the small coupling angle has a greater effect on the low-order frequency, which provides a new way of thinking to improve the performance of the flexible skin.

Keywords

Composite Shell, Composite Structure, Viscoelastic Material, Finite Element, Natural Frequency, Rayleigh-Ritz Method

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

目前的飞行器由于构型固定, 设计大多针对单一任务和性能需求。以单一目标开展整体方案、外形参数和布局方案设计的方法已经趋于成熟。但随着目前飞行任务的复杂化, 对飞行器的要求逐渐拓展到跨速域、跨空域飞行, 要求飞行器能够执行多种任务。因此传统飞行器的固定构型逐渐成为飞行器发展的阻碍, 能够根据任务目标自主改变气动外形变得尤为重要。变形飞机可以定义为改变配置以在完全不同的飞行条件下最大限度地提高其性能的飞机[1]。变体飞机按变形尺度可大致分为三类: 大尺度变形、中间尺度变形和局部小尺度变形。目前的机翼前缘变弯度主要依靠各类机械结构的襟翼、副翼等变形装置[2]。这些传统增升机构的空腔内流动存在着严重的流动分离, 这将导致高幅值的气动噪声[3]。为了实现变弯度机翼前缘表面连续、光滑, 柔性蒙皮成为机翼前缘变弯度发展的关键技术。目前的柔性蒙皮实现途径主要有材料自身弹性变形、通过“叠片”式蒙皮的层间滑动和基于机构的变形蒙皮三种方式实现[4]-[14]。但硅橡胶类材料由于其较低的弹性模量难以承载较大的载荷, “叠片”式蒙皮存在整体气密性、转动机构与变形机构协调控制等问题, 基于结构的变形蒙皮的蜂窝结构/波纹板结构都较为复杂, 占用机翼内宝贵的空间。本文提出了一种新型的由复合材料层合壳-粘弹性窄壳-复合材料层合壳组合的柔性蒙皮结构。由于飞机在飞行中机翼存在发动机等多重激励下的振动现象, 因此对蒙皮结构的动力学分析十分重要。

目前对组合壳结构的研究已经较为广泛, 1999年, Messina等基于Love壳理论, 利用Ritz方法研究了复合材料层合开口圆柱壳的自由振动[15]。2014年, Ye等结合切比雪夫多项式和Rayleigh-Ritz法, 基于经典壳理论, 给出了任意边界条件和各种几何参数(如圆心角、锥度)下的自由振动同一公式[16]。2017年, Wang等给出了一般条件下Pasternak边界下厚开口圆柱壳自由振动的三维精确解[17]。但在边界问题上大多仍然使用经典边界, 对于开口壳问题, 经典边界存在计算准确性和效率问题。2017年, Qin等使用人工弹簧模拟边界, 基于Ritz法分别通过修正的傅里叶级数、正交多项式和切比雪夫多项式作为容许函数研究了任意边界条件下圆柱壳的自由振动特性[18]。

基于变体飞机变弯度机翼的特性下柔性蒙皮对于较大弯度变化的需求, 组合结构在不同耦合角下的

振动特性同样重要。2022 年, Chen 等对开口圆柱壳和矩形板耦合结构进行了自由振动分析[19]。但是目前对于不同材料在多个耦合角度下的组合结构的振动特性分析是较难实现的问题。

由于粘弹性材料的温度依赖特性和复合材料中基底对温度变化的高度敏感, 高温可能会导致粘弹性材料由玻璃态逐步向橡胶态甚至液态转变, 长期高温环境中, 也可能会导致复合材料性能的退化。在高温环境下的研究也十分重要。2009 年, Jeyaraj 等对复合材料层合板在热环境下的振动和响应特性进行了数值研究[20]。2013 年, Fazzolari 等利用 Carrera 公式, 使用 Ritz 方法对各向异性层合板在热环境下进行了自由振动分析[21]。2020 年, Li 等基于 Rayleigh-Ritz 方法提出了一种利用特征正交多项式处理功能梯度多孔阶梯柱壳体(FGP-SCS)热振动特性的通用方法[22]。

本文的结构安排如下: 第 1 节建立了简化后的组合壳动力学模型。第 2 节通过瑞利 - 里兹法求解了组合壳结构在不同耦合角和不同温度下的固有频率和模态振型, 并将结果与有限元法进行对比, 验证理论的准确性。第 3 节总结全文。

2. 动力学模型

2.1. 模型简述

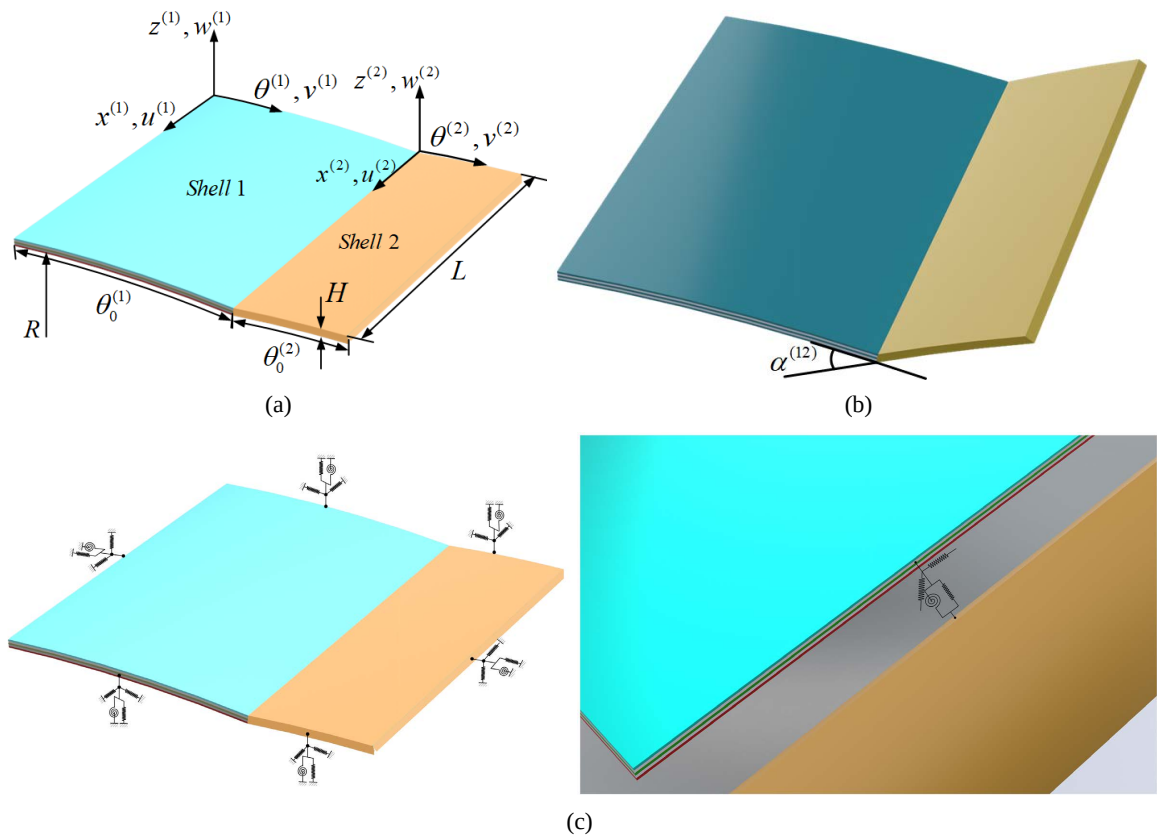


Figure 1. (a) Simplified model of the combined shell; (b) coupling angle of the combined shell; (c) simulation of the combined shell boundary

图 1. (a) 组合壳的简化模型; (b) 组合壳的耦合角; (c) 组合壳边界的模拟

如图 1(a)所示为柔性蒙皮结构简化后的组合壳的简化动力学模型, 组合壳结构的两端固定, 由左到右分别定义为壳 1、2, 组合壳结构的母线长为 L , 对应的圆心角为 $\theta^{(1)}$ 和 $\theta^{(2)}$, 半径为 R 。坐标系分别定义为 $Ox_1\theta_1z_1$ 和 $Ox_2\theta_2z_2$ 位于壳的左上角, 对应的位移分别为 u 、 v 和 w 。组合壳耦合角的定义如图 1(b),

壳 1 与壳 2 的耦合角定义为壳 1 与壳 2 在连接处周向延长线夹角的补角。组合壳结构的边界条件均由均布在边界上的人工弹簧模拟, 如图 1(c), 壳连接处的能量传递由均布在连接处的人工弹簧模拟。复合材料壳的铺层方式为 $[0 \ 90]_{8s}$ 共 16 层。

2.2. 理论推导

为了提高计算效率, 引入一组无量纲参数:

$$\xi = \frac{x}{L}, \eta = \frac{\theta}{\theta_0} \quad (1)$$

组合壳系统的总势能和总动能可被表示如下:

$$T = T^{(1)} + T^{(2)} \quad (2)$$

$$U = U_{shell} + U_{sprb} + U_{sprc} + U_{hx} \quad (3)$$

其中:

$$U_{shell} = U_{shell}^{(1)} + U_{shell}^{(2)} \quad (4)$$

$$U_{sprb} = U_{sprb}^{(1)} + U_{sprb}^{(2)} \quad (5)$$

$$U_{hx} = U_{hx}^{(1)} + U_{hx}^{(2)} \quad (6)$$

其中上标(i)代表壳 i, 下标 *shell*, *sprc*, *sprb* 和 *hx* 分别代表壳的势能、耦合势能、边界势能和热势能。

取壳 1 为例, 动能可被表示为:

$$T^{(1)} = LR\theta_0^{(1)} \int_0^1 \int_0^1 \dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 d\xi d\eta \quad (7)$$

其中 $\dot{u}$, $\dot{v}$ 和 $\dot{w}$ 分别代表位移 u , v , 和 w 对时间 t 的导数。

势能可用如下形式表示:

$$U_{shell}^{(1)} = LR\theta_0^{(1)} \int_0^1 \int_0^1 \varepsilon^{(1)T} [S^{(1)}] \varepsilon^{(1)} d\xi d\eta \quad (8)$$

ε 为应变, $[S]$ 为刚度阵, 将在下面给出。

对于复合开放式圆柱形壳体, 应变向量可表示如下:

$$\varepsilon^{(1)} = [\gamma^{(1)} \ \kappa^{(1)}]^T = [\varepsilon_\xi^{(1)} \ \varepsilon_\eta^{(1)} \ \gamma_{\xi\eta}^{(1)} \ \kappa_\xi^{(1)} \ \kappa_\eta^{(1)} \ \chi_{\xi\eta}^{(1)}]^T \quad (9)$$

根据 Donnel 壳理论, 圆柱形壳体的应变 - 位移关系可表示为:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\xi^{(1)} &= \frac{1}{L} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi^{(1)}}, \varepsilon_\eta^{(1)} = \frac{1}{R\theta_0^{(1)}} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \eta^{(1)}}, \gamma_{\xi\eta}^{(1)} = \frac{1}{R\theta_0^{(1)}} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \eta^{(1)}} + \frac{1}{L} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \xi^{(1)}} \\ \kappa_\xi^{(1)} &= -\frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial \xi^{(1)2}}, \kappa_\eta^{(1)} = \frac{1}{R^2\theta_0^{(1)}} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \eta^{(1)}} - \frac{1}{R^2\theta_0^{(1)2}} \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial \eta^{(1)2}} \\ \chi_{\xi\eta}^{(1)} &= \frac{1}{RL} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \xi^{(1)}} - \frac{2}{RL\theta_0^{(1)}} \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial \xi^{(1)} \partial \eta^{(1)}} \end{aligned} \quad (10)$$

复合材料开口壳体的刚度矩阵可由以下公式给出:

$$S = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \quad (11)$$

其中:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (h_k - h_{k+1}), B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (h_k^2 - h_{k+1}^2), D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (h_k^3 - h_{k+1}^3) \quad (12)$$

分别为拉伸矩阵、耦合矩阵和弯曲矩阵。

第 k 层的折减刚度矩阵可被定义为:

$$\bar{Q} = T^{-1} Q (T^{-1})^T \quad (13)$$

转换矩阵可表示为:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & -2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -2 \sin \alpha \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{bmatrix}$$

折减刚度阵的元素给出如下:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}, Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}, Q_{12} = \frac{\mu_{12}E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}, Q_{66} = G_{12} \quad (15)$$

边界势能可被表示为:

$$\begin{aligned} U_{sprb}^{(1)} = & L \int_0^1 \left(K_{w_\eta \eta 0}^{(1)} \frac{1}{\theta_0^{(1)}} \frac{\partial w^{(1)2}}{\partial \eta^{(1)}} + K_{w_\xi \xi 0}^{(1)} \frac{1}{L} \frac{\partial w^{(1)2}}{\partial \xi^{(1)}} + K_{u \eta 0}^{(1)} u^{(1)2} + K_{v \eta 0}^{(1)} v^{(1)2} + K_{w \eta 0}^{(1)} w^{(1)2} \right) d\xi \bigg|_{\eta=0} \\ & + L \int_0^1 \left(K_{w_\eta \eta 1}^{(1)} \frac{1}{\theta_0^{(1)}} \frac{\partial w^{(1)2}}{\partial \eta^{(1)}} + K_{w_\xi \xi 1}^{(1)} \frac{1}{L} \frac{\partial w^{(1)2}}{\partial \xi^{(1)}} + K_{u \eta 1}^{(1)} u^{(1)2} + K_{v \eta 1}^{(1)} v^{(1)2} + K_{w \eta 1}^{(1)} w^{(1)2} \right) d\xi \bigg|_{\eta=1} \\ & + \theta_0^{(1)} \int_0^1 \left(K_{w_\eta \xi 0}^{(1)} \frac{1}{\theta_0^{(1)}} \frac{\partial w^{(1)2}}{\partial \eta^{(1)}} + K_{w_\xi \xi 0}^{(1)} \frac{1}{L} \frac{\partial w^{(1)2}}{\partial \xi^{(1)}} + K_{u \xi 0}^{(1)} u^{(1)2} + K_{v \xi 0}^{(1)} v^{(1)2} + K_{w \xi 0}^{(1)} w^{(1)2} \right) d\eta \bigg|_{\xi=0} \\ & + \theta_0^{(1)} \int_0^1 \left(K_{w_\eta \xi 1}^{(1)} \frac{1}{\theta_0^{(1)}} \frac{\partial w^{(1)2}}{\partial \eta^{(1)}} + K_{w_\xi \xi 1}^{(1)} \frac{1}{L} \frac{\partial w^{(1)2}}{\partial \xi^{(1)}} + K_{u \xi 1}^{(1)} u^{(1)2} + K_{v \xi 1}^{(1)} v^{(1)2} + K_{w \xi 1}^{(1)} w^{(1)2} \right) d\eta \bigg|_{\xi=1} \end{aligned} \quad (16)$$

热势能可定义为:

$$U_{hx}^{(1)} = \frac{LR\theta_0^{(1)}}{2} \int_0^1 \int_0^1 \left(N_\xi^{(1)} \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x^{(1)}} \right)^2 + N_\theta^{(1)} \left(\frac{\partial v^{(1)}}{\partial \eta^{(1)}} \right) + 2N_{\xi\theta}^{(1)} \frac{\partial w^{(1)}}{\partial x^{(1)}} \frac{\partial w^{(1)}}{\partial \eta^{(1)}} \right) d\xi d\eta \quad (17)$$

其中热应力 $N_{\xi}^{(1)}$, $N_{\theta}^{(1)}$ 和 $N_{\xi\theta}^{(1)}$ 可被定义为:

$$\begin{Bmatrix} N_{\xi}^{(1)} \\ N_{\theta}^{(1)} \\ N_{\xi\theta}^{(1)} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N_k} \int_{-h_k/2}^{h_{k+1}/2} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^k & \bar{Q}_{12}^k & \bar{Q}_{16}^k \\ \bar{Q}_{12}^k & \bar{Q}_{22}^k & \bar{Q}_{26}^k \\ \bar{Q}_{13}^k & \bar{Q}_{26}^k & \bar{Q}_{66}^k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{\xi} \\ \chi_{\theta} \\ \chi_{\xi\theta} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

当温度均匀变化时, 热应力可表示为:

$$\begin{Bmatrix} \chi_{\xi} \\ \chi_{\theta} \\ \chi_{\xi\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_{\xi} \\ \alpha_{\theta} \\ \alpha_{\xi\theta} \end{Bmatrix} \Delta T \quad (19)$$

其中 ΔT 为温度改变量。

公式(20)中的 α_{ξ} , α_{θ} 和 $\alpha_{\xi\theta}$ 可定义如下:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_{\xi} \\ \alpha_{\theta} \\ \alpha_{\xi\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

其中 $[\psi]$ 是热环境中的主方向转换矩阵, 可表示为:

$$[\psi] = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\sin 2\alpha & 2 \cos 2\alpha \end{bmatrix} \quad (21)$$

两个壳体之间的能量传递由耦合弹簧势能给出:

$$\begin{aligned} U_{sprc} = & L \int_0^1 Kc^{(12)} \left(\frac{1}{\theta_0^{(2)}} \frac{\partial w^{(2)}}{\partial \eta} \bigg|_{\eta=0} - \frac{1}{\theta_0^{(1)}} \frac{\partial w^{(1)}}{\partial \eta} \bigg|_{\eta=1} \right)^2 \\ & + Kcu^{(12)} \left(u^{(2)} \bigg|_{\eta=0} - u^{(1)} \bigg|_{\eta=1} \right)^2 \\ & + Kcv^{(12)} \left(v^{(2)} \bigg|_{\eta=0} - v^{(1)} \cos(\alpha^{(12)}) \bigg|_{\eta=1} + w^{(1)} \sin(\alpha^{(12)}) \bigg|_{\eta=1} \right)^2 \\ & + Kcw^{(12)} \left(w^{(2)} \bigg|_{\eta=0} - w^{(1)} \cos(\alpha^{(12)}) \bigg|_{\eta=1} - v^{(1)} \sin(\alpha^{(12)}) \bigg|_{\eta=1} \right)^2 d\xi \end{aligned} \quad (22)$$

上式中的位移试探函数假定为 $m \times n$ 阶正交多项式, 如下所示:

$$\begin{cases} u(\xi, \eta, t) = U \cdot e^{-j\omega t} \\ v(\xi, \eta, t) = V \cdot e^{-j\omega t} \\ w(\xi, \eta, t) = W \cdot e^{-j\omega t} \end{cases} \quad (23)$$

其中, $U = \sum_{m=1}^{mm} \sum_{n=1}^{nn} a_{mn} U(\xi)_m U(\eta)_n$, v , w 同理。由于所有边界都是用人造弹簧模拟的, 因此一阶多项式都使用自由边界条件, 即 $u_1 = v_1 = w_1 = 1$ 。

在瑞利-里兹法中, 薄壁开放式圆柱复合壳的拉格朗日函数可表示为:

$$\Pi = T - U \quad (24)$$

根据瑞利-李兹法的基本原理, 频率方程可计算如下:

$$(K - \omega^2)X = 0 \quad (25)$$

其中, $X = \{a_{mn} \ b_{mn} \ c_{mn} \ d_{mn} \ e_{mn} \ f_{mn} \ g_{mn} \ h_{mn} \ i_{mn}\}^T$ 是里兹向量, K 、 M 分别是由总势能、动能转化为二次矩阵得到的广义刚度矩阵和广义质量矩阵。

矩阵的形式如下:

$$K = K + K_{sprb} + K_{sprc} + K_{hx} \quad (26)$$

$$K_{shell} = \begin{bmatrix} Kaa^{(1)} & Kab^{(1)} & Kac^{(1)} & & & \\ Kba^{(1)} & Kbb^{(1)} & Kbc^{(1)} & & & \\ Kca^{(1)} & Kcb^{(1)} & Kcc^{(1)} & & & \\ & & & Kaa^{(2)} & Kab^{(2)} & Kac^{(2)} \\ & & & Kba^{(2)} & Kbb^{(2)} & Kbc^{(2)} \\ & & & Kca^{(2)} & Kcb^{(2)} & Kcc^{(2)} \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$K_{sprb} = \begin{bmatrix} Ksaa^{(1)} & & & & & \\ & Ksbb^{(1)} & & & & \\ & & Kscc^{(1)} & & & \\ & & & Ksaa^{(2)} & & \\ & & & & Ksbb^{(2)} & \\ & & & & & Kscc^{(2)} \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$K_{sprc} = \begin{bmatrix} Ksaa & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Ksbb & Ksbc & 0 & Ksbe & Ksbf \\ 0 & Kscb & Kscc & 0 & Ksce & Kscf \\ Ksda & 0 & 0 & Ksdd & 0 & 0 \\ 0 & Kseb & Ksec & 0 & Ksee & Ksef \\ 0 & Ksfb & Ksfc & 0 & Ksfe & Ksff \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$K_{hx} = \begin{bmatrix} K_{hxu}^{(1)} & & & & & \\ & K_{h xv}^{(1)} & & & & \\ & & K_{h xw}^{(1)} & & & \\ & & & K_{h xu}^{(2)} & & \\ & & & & K_{h xv}^{(2)} & \\ & & & & & K_{h xw}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$M = \begin{bmatrix} Maa^{(1)} & & & & & \\ & Mbb^{(1)} & & & & \\ & & Mcc^{(1)} & & & \\ & & & Maa^{(2)} & & \\ & & & & Mbb^{(2)} & \\ & & & & & Mcc^{(2)} \end{bmatrix} \quad (31)$$

求解频率方程即可得到组合壳体的固有频率和模态矢量。

3. 结果与分析

3.1. 计算结果验证

理论上, 在瑞利-利兹法中, 位移试探函数的截断次数足够高时得到的解足够接近理论精确解。但在工程实际中, 工程人员出于经济性和计算效率的考虑, 通常在符合实际需求的情况下使用尽可能低的截断次数。不同截断次数下的频率如图 2 所示, 在取 4 阶到 8 阶截断次数的理论计算结果中, 随着截断次数的提高, 计算精度不断提高, 计算结果逐渐收敛至准确解, 系统固有频率的前 4 阶在 6 阶截断次数前均呈下降趋势, 在 6 阶后基本保持稳定, 说明 6 阶截断次数得到的解达到足够的精度。考虑到计算效率和合理性, 后续计算均采用 7 阶截断次数。

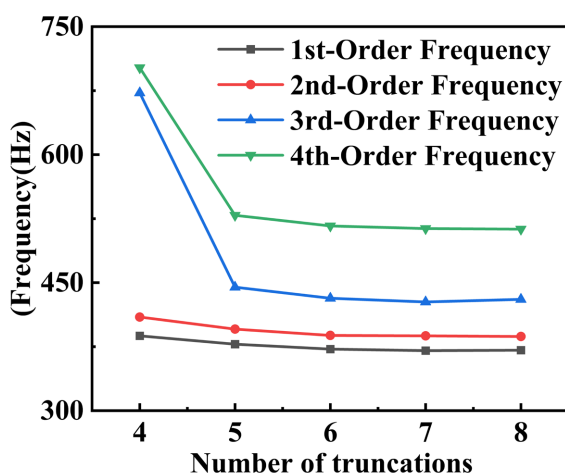


Figure 2. Verification of convergence of theoretical calculations

图 2. 理论计算的收敛性验证

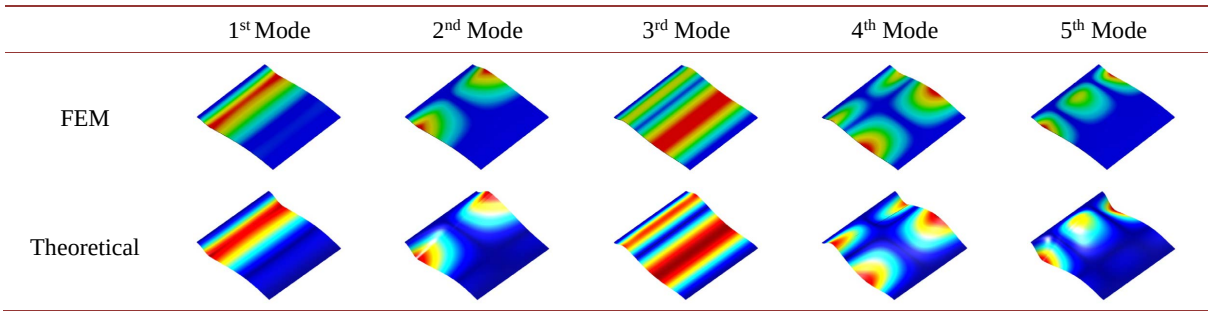
如表 1 所示为理论计算和有限元法获得的前 5 阶固有频率及误差对比。表 2 所示是理论计算和有限元法获得的 20℃时, 0°耦合角下的前 5 阶模态形状对比。如表 1 所示, 最高误差为 0.43%, 最低误差为 0.04%, 系统的总体误差不超过 0.3%, 可以认为有限元计算得出的结果与理论计算得出的结果具有相当高的一致性。且如表 2 中的振型可以看出, 有限元法获得的振型与理论计算得到的振型形状基本一致, 这表明上文提出的建模方法是正确的。

Table 1. Comparison of natural frequencies of composite combined shell with present and FEM

表 1. 组合壳结构固有频率的比较

模态阶次	频率		误差(%)
	理论结果(Hz)	有限元(Hz)	
1	370.438	371.75	-0.35
2	387.7689	387.191	-0.04
3	427.4411	429.27	-0.43
4	513.4459	512.49	0.19
5	563.6875	562.88	0.14

Table 2. Mode shapes of combined shell structure
表 2. 组合壳结构的模态振型



3.2. 结果分析

前文已经对推导的模型进行了收敛性验证和准确性验证，证明了推导的模型是足够准确的，在本节将在更多工况下进行结果分析，包括不同耦合角度下和更高温度下的结果分析。

3.2.1. 不同耦合角度下耦合壳结构的动力学特性

表 3 列举了基于 20℃ 环境温度时 0°~30° 耦合角度下理论计算和有限元法得到的固有频率，误差均低于 1.5%，这进一步验证了理论方法的准确性。如表 3 所示，组合壳结构的固有频率随耦合角度的升高，在 0°~10° 耦合角度下的固有频率逐渐下降，在 10°~30° 耦合角度下的固有频率逐渐上升，并随着耦合角度的升高继续上升。

Table 3. Comparison of natural frequencies at 0°~30° coupling angles
表 3. 0°~30° 耦合角度下固有频率的对比

耦合角度(°)	模态阶次	有限元(Hz)	理论计算(Hz)	误差(%)	模态阶次	有限元(Hz)	理论计算(Hz)	误差(%)
0	1	371.75	370.44	-0.35	3	429.27	427.44	-0.43
	2	387.91	387.77	-0.04	4	512.49	513.45	0.19
5	1	179.36	179.26	-0.06	3	491.4	497.95	1.32
	2	218.69	218.31	-0.17	4	516.34	515.42	-0.18
10	1	156.57	156.65	0.05	3	577.3	579.16	0.32
	2	210.35	211.55	0.57	4	657.25	656.68	-0.09
15	1	196.1	196.14	0.02	3	698.9	700.14	0.18
	2	256.87	256.03	-0.33	4	801.82	802.50	0.08
20	1	223.56	223.73	0.08	3	783.05	784.12	0.14
	2	290.1	290.44	0.12	4	888.4	892.08	0.41
25	1	240.59	240.75	0.07	3	829.14	830.26	0.13
	2	310.93	311.46	0.17	4	918.71	925.09	0.69
30	1	251.82	251.99	0.07	3	854.25	855.52	0.15
	2	324.67	325.19	0.16	4	928.32	935.94	0.81

为了更直观地展现耦合角度对固有频率的影响，如图 3 所示是理论计算和有限元计算得到的组合壳结构固有频率随耦合角度变化的曲线。观察曲线可以发现，在 0°~5° 耦合角时固有频率快速下降，在 5°~10°

耦合角时的固有频率进一步下降至最低值，在 10°~30°耦合角时的固有频率逐渐上升，这进一步验证了前文得到的规律，且有限元法得到的固有频率曲线与理论计算得到的固有频率曲线基本重合，这也验证了理论方法极高的准确性。

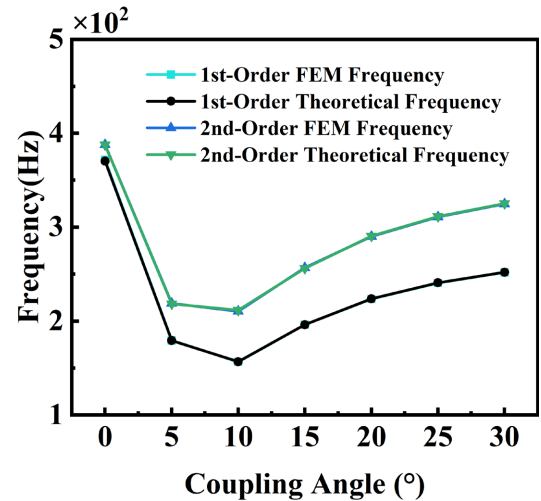


Figure 3. Trend curve of intrinsic frequency of combined shell structure with coupling angle: theory and finite element
图 3. 组合壳结构固有频率随耦合角度变化的趋势曲线：理论与有限元

3.2.2. 温度对固有频率的影响

表 4 列举了基于 0°耦合角度，在 20℃~70℃下理论计算和有限元法得到的固有频率，如表 3 所示，组合壳结构的固有频率随温度的升高而降低，且下降速度随温度升高而减缓。随着温度的升高，理论计算的计算误差逐渐升高，20℃时的最大误差为 0.43%，70℃时的最大误差为 5.79%，整体误差仍小于 6%，因此能够认为理论模型的计算结果是准确的。

Table 4. Comparison of natural frequencies of combined shell structures in thermal environments
表 4. 组合壳结构在热环境下的频率对比

温度(℃)	模态阶次	有限元(Hz)	理论计算(Hz)	误差(%)	模态阶次	有限元(Hz)	理论计算(Hz)	误差(%)
20	1	371.75	370.44	−0.35	3	429.27	427.44	−0.43
	2	387.91	387.77	−0.04	4	512.49	513.45	0.19
30	1	280.7	279.29	−0.50	3	393.47	395.22	0.44
	2	301.05	298.28	−0.93	4	463.01	464.12	0.24
40	1	187.75	187.67	−0.04	3	364.06	365.44	0.38
	2	212.2	210.68	−0.72	4	414.92	417.45	0.61
50	1	122.99	116.98	−5.13	3	305.9	312.61	2.15
	2	152.04	145.61	−4.42	4	317.96	316.03	−0.61
60	1	94.443	93.92	−0.55	3	222.32	230.84	3.69
	2	127.08	125.22	−1.48	4	228.18	234.84	2.84
70	1	81.329	84.84	4.14	3	170.93	181.44	5.79
	2	115.57	111.44	−3.71	4	176.53	182.12	3.07

图4分别画出了理论计算和有限元计算得到的组合壳结构的固有频率随温度变化的曲线,系统固有频率的前两阶随温度的升高呈现速度逐渐减缓的下降趋势,理论计算和有限元计算得出的趋势基本一致,这进一步验证了我们理论的正确性。

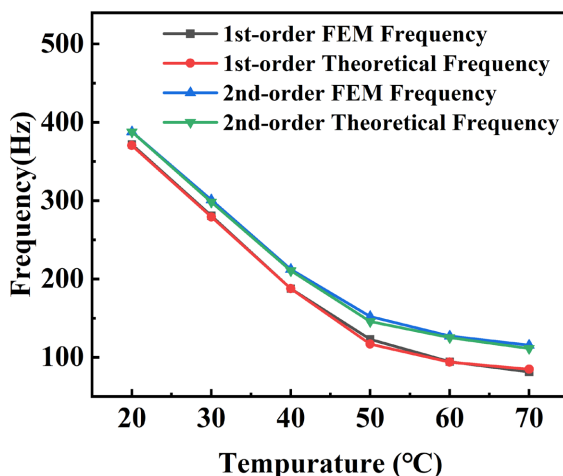


Figure 4. Trend curves of intrinsic frequency versus temperature for combined shell structures: theory and finite element

图4. 组合壳结构固有频率随温度变化的趋势曲线:理论与有限元

4. 结论

本文将一种新型的柔性蒙皮结构简化为组合壳结构,通过瑞利-李兹法求解出了结构的固有频率、模态振型和固有频率随温度、耦合角度变化的趋势,并通过有限元法的验证确定了准确性,得到如下主要结论:

(1) 推导出的数学模型能够有效地计算在不同耦合角度、不同温度下复合材料壳-粘弹性壳组合结构的固有频率和模态振型。在改变耦合角度时不影响模型的计算精度,在提高温度时,随温度的升高结果的计算精度随之降低,但可以通过适当改变壳间的人工耦合弹簧的刚度来提升计算精度。

(2) 组合壳结构的固有频率受耦合角度变化影响较大,在耦合角度由 0° 变化至 5° 时固有频率快速下降,耦合角度由 5° 变化至 10° 时固有频率进一步下降至最低值,然后耦合角度由 10° 升高时,固有频率将缓慢上升。

(3) 组合壳结构的固有频率在热环境中受温度影响,组合壳的固有频率随温度升高而降低,随温度的升高降低速度呈下降趋势,达到 50°C 时组合壳结构的固有频率的下降现象不再明显。

参考文献

- [1] Jha, A.K. and Kudva, J.N. (2004) Morphing Aircraft Concepts, Classifications, and Challenges. *Smart Structures and Materials 2004: Industrial and Commercial Applications of Smart Structures Technologies*, San Diego, 14-18 March 2004, 213. <https://doi.org/10.1117/12.544212>
<http://proceedings.spiedigitallibrary.org/proceeding.aspx?doi=10.1117/12.544212>
- [2] Barbarino, S., Bilgen, O., Ajaj, R.M., Friswell, M.I. and Inman, D.J. (2011) A Review of Morphing Aircraft. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, **22**, 823-877. <https://doi.org/10.1177/1045389x11414084>
- [3] Satti, R., Li, Y., Shock, R. and Noelting, S. (2008) Computational Aeroacoustic Analysis of a High-Lift Configuration. *46th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, 7-10 January 2008, 1-13.
<https://doi.org/10.2514/6.2008-34>
<https://arc.aiaa.org/doi/10.2514/6.2008-34>

- [4] Thill, C., Etches, J.A., Bond, I.P., *et al.* (2007) Corrugated Composite Structures for Aircraft Morphing Skin Applications. *18th International Conference on Adaptive Structures and Technologies, ICAST 2007*. Ottawa, 3-5 October 2007, 210-223.
- [5] Yokozeki, T., Takeda, S., Ogasawara, T. and Ishikawa, T. (2006) Mechanical Properties of Corrugated Composites for Candidate Materials of Flexible Wing Structures. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, **37**, 1578-1586. <https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2005.10.015>
- [6] Thill, C., Etches, J.A., Bond, I.P., Potter, K.D. and Weaver, P.M. (2010) Composite Corrugated Structures for Morphing Wing Skin Applications. *Smart Materials and Structures*, **19**, Article 124009. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/19/12/124009>
- [7] Peel, L.D., Mejia, J., Narvaez, B., Thompson, K. and Lingala, M. (2009) Development of a Simple Morphing Wing Using Elastomeric Composites as Skins and Actuators. *Journal of Mechanical Design*, **131**, Article 091003. <https://doi.org/10.1115/1.3159043>
- [8] Long, J.H., Hale, M.E., Mchenry, M.J. and Westneat, M.W. (1996) Functions of Fish Skin: Flexural Stiffness and Steady Swimming of Longnose Gar *Lepisosteus Osseus*. *Journal of Experimental Biology*, **199**, 2139-2151. <https://doi.org/10.1242/jeb.199.10.2139>
- [9] Reed, Jr., J.L., Hemmelgarn, C.D., Pelley, B.M. and Havens, E. (2005) Adaptive Wing Structures. *Smart Structures and Materials 2005: Industrial and Commercial Applications of Smart Structures Technologies*, San Diego, 7-10 March 2005, 132. <https://doi.org/10.1117/12.599922>
- [10] Gross, K. (2009) Mechanical Characterization of Shape Memory Polymers to Assess Candi-Dacy as Morphing Aircraft Skin. <https://www.semanticscholar.org/paper/MECHANICAL-CHARACTERIZATION-OF-SHAPE-MEMORY-TO-AS-Gross/77d173d31b1e8aa714bbdf55c8243d0530a26415>
- [11] Keihl, M.M., Bortolin, R.S., Sanders, B., Joshi, S. and Tidwell, Z. (2005) Mechanical Properties of Shape Memory Polymers for Morphing Aircraft Applications. *Smart Structures and Materials 2005: Industrial and Commercial Applications of Smart Structures Technologies*, San Diego, 7-10 March 2005, 143. <https://doi.org/10.1117/12.600569>
- [12] 尹维龙, 孙启健, 张波, 等. 形状记忆聚合物在可变形飞行器上的应用[C/OL]//中国力学学会. 第十五届全国复合材料学术会议论文集(下册). 2008. https://kns.cnki.net/kcms2/article/abstract?v=4HX-653LtvLIMW-sutYoQyVdnGNjeK1mPX1_WksldOwNEpQbh5wRZ9Vt-HCRELjyOGxQw2Pp10rcn3oUmJaWHX6g_Ey-VFh8SQ5PJZRm47uavJ-2wh96UxzEYyxYGPzjk2ro2JZcu0vknN6Ivk3KxzL.w==&uniplatform=NZKPT&language=CHS, 2024-07-05.
- [13] Flanagan, J., Strutzenberg, R., Myers, R. and Rodrian, J. (2007) Development and Flight Testing of a Morphing Aircraft, the Nextgen Mfx-1. *48th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, Honolulu, 23-26 April 2007, 1-3. <https://doi.org/10.2514/6.2007-1707>
- [14] Andersen, G., Cowan, D. and Piatak, D. (2007) Aeroelastic Modeling, Analysis and Testing of a Morphing Wing Structure. *48th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, Honolulu, 23-26 April 2007, 1-15. <https://doi.org/10.2514/6.2007-1734>
- [15] Messina, A. and Soldatos, K.P. (1999) Vibration of Completely Free Composite Plates and Cylindrical Shell Panels by a Higher-Order Theory. *International Journal of Mechanical Sciences*, **41**, 891-918. [https://doi.org/10.1016/s0020-7403\(98\)00069-1](https://doi.org/10.1016/s0020-7403(98)00069-1)
- [16] Ye, T., Jin, G., Chen, Y. and Shi, S. (2014) A Unified Formulation for Vibration Analysis of Open Shells with Arbitrary Boundary Conditions. *International Journal of Mechanical Sciences*, **81**, 42-59. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2014.02.002>
- [17] Wang, Q., Shi, D., Pang, F. and e Ahad, F. (2017) Benchmark Solution for Free Vibration of Thick Open Cylindrical Shells on Pasternak Foundation with General Boundary Conditions. *Meccanica*, **52**, 457-482. <https://doi.org/10.1007/s11012-016-0406-2>
- [18] Qin, Z., Chu, F. and Zu, J. (2017) Free Vibrations of Cylindrical Shells with Arbitrary Boundary Conditions: A Comparison Study. *International Journal of Mechanical Sciences*, **133**, 91-99. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.08.012>
- [19] Chen, Z., Qin, B., Wang, Q., Zhong, R. and Wang, A. (2022) Vibration Analysis of Laminated Open Cylindrical Shell Coupled with Rectangular Plates. *Composite Structures*, **292**, Article 115607. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2022.115607>
- [20] Jeyaraj, P., Ganesan, N. and Padmanabhan, C. (2009) Vibration and Acoustic Response of a Composite Plate with Inherent Material Damping in a Thermal Environment. *Journal of Sound and Vibration*, **320**, 322-338.

- <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.08.013>
- [21] Fazzolari, F.A. and Carrera, E. (2013) Free Vibration Analysis of Sandwich Plates with Anisotropic Face Sheets in Thermal Environment by Using the Hierarchical Trigonometric Ritz Formulation. *Composites Part B: Engineering*, **50**, 67-81. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.01.020>
- [22] Li, Z., Zhong, R., Wang, Q., Qin, B. and Yu, H. (2020) The Thermal Vibration Characteristics of the Functionally Graded Porous Stepped Cylindrical Shell by Using Characteristic Orthogonal Polynomials. *International Journal of Mechanical Sciences*, **182**, Article 105779. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2020.105779>