

耦合集中质量复合材料层合板的振动特性研究

吴悦, 张振*

沈阳航空航天大学航空宇航学院, 辽宁 沈阳

收稿日期: 2025年5月4日; 录用日期: 2025年6月3日; 发布日期: 2025年6月11日

摘要

本文针对新能源飞机复合材料层合板结构在耦合附加集中质量下的刚柔耦合振动问题开展研究。在薄板假设基础上, 推导耦合附加集中质量的复合材料层合板的动力学控制方程。通过对比有无耦合附加集中质量的复合材料层合板的固有频率和模态振型, 分析了附加集中质量对复合材料层合板振动特性的影响。结果表明, 附加集中质量显著改变了复合材料层合板的部分振动特性。本研究为新能源飞机的复合材料层合板结构设计提供理论支撑。

关键词

复合材料层合板, 附加集中质量, 刚柔耦合结构, 振动特性

Study on Vibration Characteristics of Composite Laminated Plate with Coupled Concentrated Mass

Yue Wu, Zhen Zhang*

College of Aeronautics and Astronautics, Shenyang Aerospace University, Shenyang Liaoning

Received: May 4th, 2025; accepted: Jun. 3rd, 2025; published: Jun. 11th, 2025

Abstract

The rigid-flexible coupled vibration problem of new energy aircraft composite composed plate structure under coupled additional concentrated mass is studied. Based on the thin plate hypothesis, the dynamic governing equation of coupled additional concentrated mass composite laminated plate (CLPCM) is derived. By comparing the natural frequencies and mode shapes of the composite laminated plates with or without coupled additional concentrated mass, the influence of additional

*通讯作者。

文章引用: 吴悦, 张振. 耦合集中质量复合材料层合板的振动特性研究[J]. 声学 & 振动, 2025, 13(2): 37-49.
DOI: 10.12677/ojav.2025.132004

concentrated mass on the vibration characteristics of the composite laminated plate is analyzed. The results show that the addition of concentrated mass significantly changes the partial vibration characteristics of composite laminated plates. This study provides theoretical support for the design of composite laminate structures for new energy aircraft.

Keywords

Composite Laminated Plate, Additional Concentrated Mass, Rigid-Flexible Coupling Structure, Vibration Characteristics

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

随着复合材料在航空航天、船舶、汽车等各个领域的广泛应用, 针对复合材料的振动特性的研究也越来越多。在新能源飞机上, 特别是在操作舱室、仪表盘等电子设备都安装在复合材料板上。这种安装形式会对整体复合材料板结构的动力学特性产生较大影响, 在执行飞行任务过程中可能出现不可预测的振动情况。因此, 为了保证电子设备的精度, 确保飞行安全, 深入研究耦合附加集中质量的复合材料层合板这种具有刚柔耦合特性结构的振动特性至关重要。

板状结构在工程中应用广泛, 是汽车、高铁、船舶、飞机等车辆结构的重要组成部分。许多专家学者对复合材料板的振动特性进行了研究。研究对象包括矩形板[1][2]、三角形板[3]和圆形板[4][5]等。Zhai 等人[6]研究了层压复合结构的振动性能, 探讨了不同边界条件下, 板结构的长宽比、宽厚比、弹性模量比及铺层角度等参数与振动频率的关系。毛启智等人[7]通过一种新的改进切比雪夫级数展开, 建立了含裂纹旋转板自由振动分析的半解析模型。徐卓等人[8]提出了考虑磁场强度对复合材料影响的磁流变弹性网格复合夹层板非线性振动响应模型。

在实际工程应用中, 设备或电子元件通常安装在复合材料板上。此时, 可以认为是复合材料板与附加集中质量的耦合。Kopmaz 等人[9]利用离散化分析研究了改变附加均匀分布质量的密度、面积和分布位置对矩形板基频的影响。王一波等人[10]研究了不同材料参数、不同工况和动量轮角速度对耦合动量轮空间结构颤振的影响。胡玉东等人[11]研究了刚体旋转与柔性梁的耦合效应, 并结合压电控制刚柔耦合多体系统的小角度机动。

本文研究了耦合附加集中质量的复合材料层合板(Composite laminated plate with coupling concentrated mass, CLPCM)的振动特性。给出了 CLPCM 的简化力学模型, 结合 Kirchhoff 薄板假设推导出耦合附加集中质量的复合材料层合板的振动微分方程, 使用 Rayleigh 法对其进行求解, 并通过有限元方法进行验证。讨论了附加集中质量对 CLPCM 的影响。所得结论对实际工程应用具有一定的指导意义。

2. CLPCM 的力学模型

2.1. 模型描述

耦合附加集中质量复合材料层合板(CLPCM)的几何模型如图 1 所示。 a 为复合材料层合在 x 轴方向上的长度, y 轴方向上的宽度为 b , 厚度用 h 定义。复合材料层合板的分层设计为 $[0/90]_{8s}$ 。笛卡尔坐标系(O - x - y - z)位于复合材料层合板的中性表面。 u 、 v 为复合材料层合板在 x 、 y 方向上任意点的位移, w 为横

向位移。 P_0 为复合板的中心点, 附加集中质量耦合在 P_0 点。

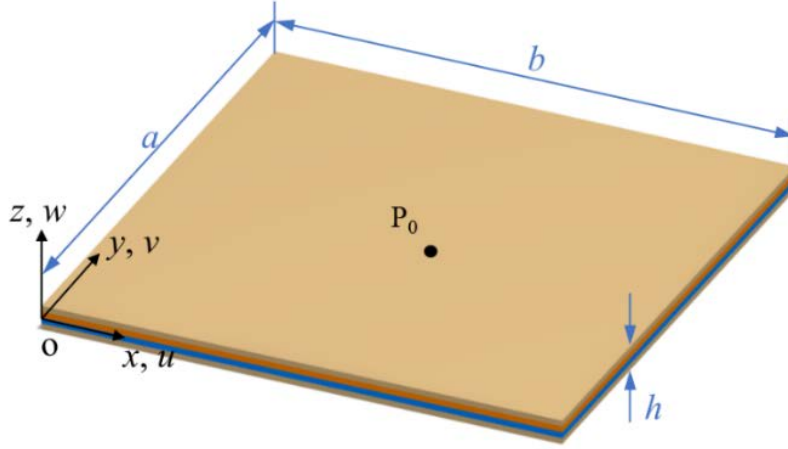


Figure 1. Mechanical model and coordinates of the CLPCM
图 1. CLPCM 的力学模型和坐标

2.2. CLPCM 的理论分析

2.2.1. 应变能

CLPCM 的本构方程如下

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} \quad (1)$$

式中 σ_1 、 σ_2 分别为 x 、 y 轴方向的法向应力。 τ_{12} 表示剪应力。

CLPCM 的刚度矩阵项定义为 Q_{ij} ($i, j = 1, 2, 6$)

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}, Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}, \\ Q_{12} &= Q_{21} = \frac{\mu_{21}E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} = \frac{\mu_{12}E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}, Q_{66} = G_{12}, \\ E_1 &\neq E_2, E_1\mu_{21} = E_2\mu_{12} \end{aligned} \quad (2)$$

式中 E_1 和 E_2 分别为 CLPCM 在纤维方向和垂直纤维方向的杨氏模量。 μ_{12} 和 μ_{21} 为对应的泊松比, 剪切模量用 G_{12} 表示。

将各层的本构方程转换为坐标系(O - x - y - z)中的本构方程。第 k 层板坐标下的应力应变关系为

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}^{(k)} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{pmatrix}^{(k)} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}^{(k)} \quad (3)$$

$Q_{ij}^{(k)}$ 与 $\bar{Q}_{ij}^{(k)}$ 之间的关系可以用矩阵的形式表示为

$$\begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{pmatrix} = \Gamma^{-1} \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{pmatrix} (\Gamma^{-1})^T \quad (4)$$

其中 Γ 为坐标变换矩阵, 可以表示为

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (5)$$

式中, θ 表示光纤方向与坐标轴的夹角。基于 Kirchhoff 薄板理论, 纤维增强复合材料薄板的中平面位移场可表示为[12]

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, z) - z_h \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, z) - z_h \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial y} \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, z) \end{aligned} \quad (6)$$

其中, u_0 、 v_0 、 w_0 分别表示中性面在复合板的 x 、 y 、 z 方向上的位移。时间用 t 表示。 z_h 表示复合材料层合板任意点到中性面之间的距离。

复合材料层合板中任意点的位移 - 应变关系为[13]

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z_h \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z_h \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z_h \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (7)$$

式中, ε_x 、 ε_y 分别表示沿 x 、 y 方向的法向应变, γ_{xy} 表示 O - x - y 平面内的剪切应力。

CLPCM 中性面弯曲的挠度和扭转率可表示为

$$\kappa_x = \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \kappa_y = \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \kappa_{xy} = 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \quad (8)$$

任意点的应变可表示为

$$\varepsilon_x = -z_h \kappa_x, \varepsilon_y = -z_h \kappa_y, \gamma_{xy} = -z_h \kappa_{xy} \quad (9)$$

CLPCM 的应变能可简化为

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dV \\ &= \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dV \\ &= \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b (D_{11} \kappa_x^2 + 2D_{12} \kappa_x \kappa_y + 4D_{16} \kappa_x \kappa_{xy} + D_{22} \kappa_y^2 + 4D_{26} \kappa_y \kappa_{xy} + 4D_{66} \kappa_{xy}^2) dy dx \end{aligned} \quad (10)$$

式中 D_{ij} 为抗弯刚度系数, 可定义为

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \bar{Q}_{ij}^{(k)} z_h^2 dz_h, (i, j = 1, 2, 6) \quad (11)$$

2.2.2. 弹性边界势能

如图 2 所示, 复合材料层合板的弹性支撑边界由平行于 z 方向的平移弹簧 k_w 和绕 z 轴(旋转方向)的

旋转弹簧 $k_{w\theta}$ 组成。通过选取合适的刚度值, 可以模拟四边固定支承的边界条件。因此, 复合材料层合板的弹性边界势能为

$$U^E = \int_0^a \left[k_w w_0^2 + k_{w\theta} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right] \Big|_{y=0} dx + \int_0^a \left[k_w w_0^2 + k_{w\theta} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right] \Big|_{y=b} dx + \int_0^b \left[k_w w_0^2 + k_{w\theta} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right] \Big|_{x=0} dy + \int_0^b \left[k_w w_0^2 + k_{w\theta} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right] \Big|_{x=a} dy \quad (12)$$

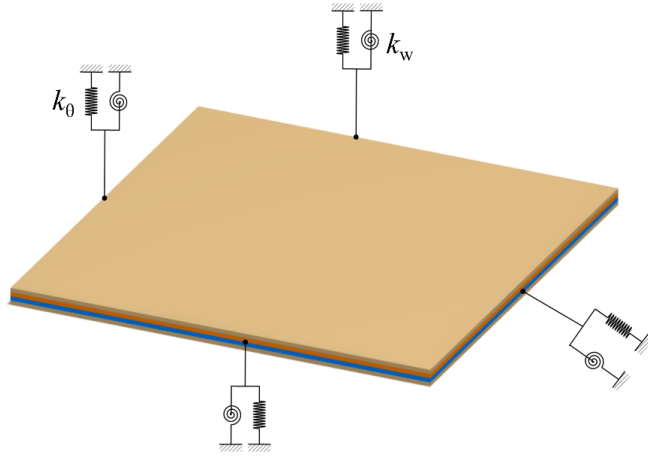


Figure 2. The elastic boundary of the CLPCM
图 2. CLPCM 的弹性边界

2.2.3. 动能

CLPCM 的动能表达式为

$$T = \frac{1}{2} \rho \iiint_V \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dV = \frac{1}{2} \rho h \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 dy dx \quad (13)$$

附加集中质量的动能表达式为

$$T^m = \frac{1}{2} m_e \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 \Big|_{R_0} \quad (14)$$

2.3. 求解过程

假设位移 $w_0(x, y, t) = W(\xi, \eta) e^{i\omega t}$, 其中 ξ 和 η 分别为 x 和 y 方向的无量纲长度

$$\xi = \frac{x}{a}, \eta = \frac{y}{b} \quad (15)$$

将式(15)代入式(10)、(12)~(14), 应变能定义如下

$$U_{\max} = \frac{1}{2} ab \int_0^1 \int_0^1 \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 W}{a^2 \partial \xi^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 W}{a^2 \partial \xi^2} \frac{\partial^2 W}{b^2 \partial \eta^2} + D_{22} \left(\frac{\partial^2 W}{b^2 \partial \eta^2} \right)^2 + 4 \left(D_{16} \frac{\partial^2 W}{a^2 \partial \xi^2} + D_{26} \frac{\partial^2 W}{b^2 \partial \eta^2} \right) \frac{\partial^2 W}{ab \partial \xi \partial \eta} + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 W}{ab \partial \xi \partial \eta} \right)^2 \right] d\eta d\xi \quad (16)$$

弹簧的边界势能定义为

$$U_{\max}^E = \frac{1}{2}a \left[\int_0^1 \left[k_w w_0^2 + k_{w\theta} \left(\frac{\partial W}{b \partial \eta} \right)^2 \right] \right]_{y=0} d\zeta + \int_0^1 \left[k_w w_0^2 + k_{w\theta} \left(\frac{\partial W}{b \partial \eta} \right)^2 \right]_{y=1} d\zeta + \frac{1}{2}b \left[\int_0^1 \left[k_w w_0^2 + k_{w\theta} \left(\frac{\partial W}{a \partial \zeta} \right)^2 \right] \right]_{x=0} d\eta + \int_0^1 \left[k_w w_0^2 + k_{w\theta} \left(\frac{\partial W}{a \partial \zeta} \right)^2 \right]_{x=1} d\eta \quad (17)$$

复合材料层合板的动能为

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \rho h a b \omega^2 \int_0^1 \int_0^1 (W^2) d\eta d\zeta \quad (18)$$

单点连接的附加集中质量的动能如下

$$T_{\max}^m = \frac{1}{2} m_e \omega^2 \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \bigg|_{B_0} \quad (19)$$

其中 ω 为复合材料层合板的固有圆频率。

根据瑞利-里兹法, 弹性边界复合材料层合板的能量定义表达式为

$$L = T_{\max}^* + T_{\max}^{m*} - (U_{\max}^* + U_{\max}^{E*}) \quad (20)$$

通过对能量函数 L 求极值, 可以表示为

$$\frac{\partial L}{\partial a_{ij}} = 0, (i = 1, 2, \dots, M; j = 1, 2, \dots, N) \quad (21)$$

其中 a_{ij} 为待定多项式系数。

得到了层合板自由振动的特征方程

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}^E - \omega^2 (\mathbf{M} + \mathbf{M}^m)) \mathbf{X} = 0 \quad (22)$$

其中, $\mathbf{K}$ 、 $\mathbf{K}^E$ 分别为刚度矩阵、弹性边界弹簧刚度矩阵。 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{M}^m$ 是质量矩阵和附加集中质量的质量矩阵。 $\mathbf{X} = (a_{11}^k, a_{12}^k, a_{1N}^k, a_{21}^k, a_{22}^k, a_{2N}^k, a_{M1}^k, a_{M2}^k, a_{MN}^k)$ 是里兹向量。 ω 为耦合附加集中质量所对应的无量纲频率参数。

3. 收敛性分析

复合材料层合板的材料选择碳纤维树脂基 T700, 单层厚度为 0.0001 m, 铺层方向为 0° 和 90° 交替对称铺设, 共铺设 32 层; 附加集中质量看作刚体。耦合附加集中质量复合材料层合板 (CLPCM) 的具体参数如表 1 所示。

在数学上, 特征多项式中截断项数的选择对模型的收敛性和计算的准确性有着重要的影响。为了验证所提方法的正确性, 表 2 给出了基于理论计算和有限元仿真的四边固支耦合附加集中质量复合材料层合板 (CLPCM) 的前 10 阶固有频率, 并计算了两种方法的误差, 最大误差为 0.151%。结果表明: 随着 M 和 N 的增大, CLPCM 的固有频率逐渐收敛, 理论计算结果与有限元计算结果一致; 但在实际应用中, 工程技术人员应综合考虑计算的可靠性和经济性。因此后续计算关于 M 和 N 的数值设置为 6, 误差中的理论计算选取 $M = N = 6$ 对应的固有频率。表 3 显示出理论分析和有限元分析所得的前 10 阶模态振型。可以看出, 两种方法得到的模态振型是一致的。

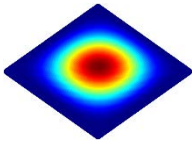
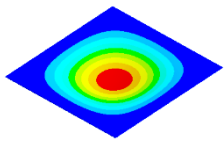
Table 1. CLPCM geometry and material parameters (20°C)
表 1. CLPCM 几何及材料参数(20°C)

参数	符号	数值	单位
厚度	h	0.0032	m
长度	a	0.5	m
宽度	b	0.5	m
密度	ρ	1512	Kg/m ³
泊松比	μ_{12}	0.32	-
纤维方向杨氏模量	E_{11}	149.47	GPa
垂直纤维方向杨氏模量	E_{12}	8.02	GPa
剪切模量	G_{12}	12.27	GPa
纤维方向热膨胀系数	α_1	0.189	ppm/°C
垂直纤维方向热膨胀系数	α_2	26.829	ppm/°C
附加集中质量	m_e	0.946	Kg

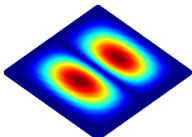
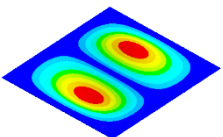
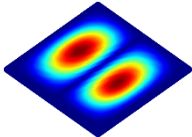
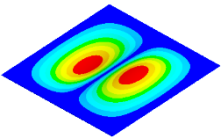
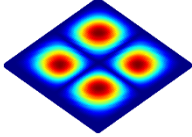
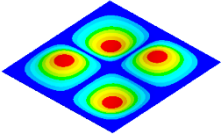
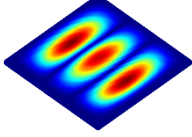
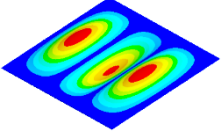
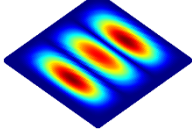
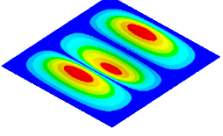
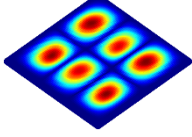
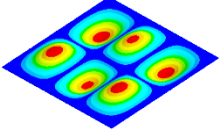
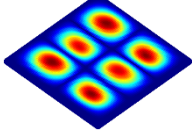
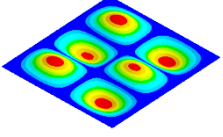
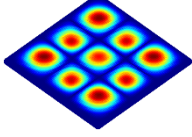
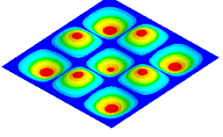
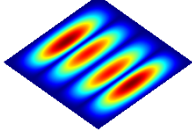
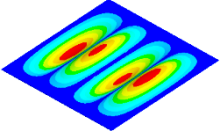
Table 2. Frequency comparison of CLPCM with fixed support ($m_e = 0$)
表 2. 固定支承 CLPCM 的频率对比($m_e = 0$)

阶次	理论计算(Hz)				有限元	误差(%)
	$M = N = 5$	$M = N = 6$	$M = N = 7$	$M = N = 8$		
1	141.375	141.375	141.375	141.375	141.39	0.011
2	282.568	282.496	282.496	282.496	282.85	0.125
3	299.848	299.769	299.768	299.768	300.13	0.120
4	404.704	404.593	404.593	404.593	405.16	0.140
5	517.408	517.408	516.551	516.551	518.01	0.116
6	557.576	557.576	556.631	556.631	558.08	0.090
7	611.252	611.205	610.507	610.507	612.13	0.151
8	637.704	637.661	636.865	636.864	638.54	0.138
9	807.131	807.131	805.997	805.997	807.97	0.104
10	921.773	839.842	839.842	834.955	839.22	0.074

Table 3. Modal shapes of composite plates ($m_e = 0$)
表 3. 复合材料板的模态振型($m_e = 0$)

模态	理论	有限元
1		
频率	141.375	141.39

续表

2		
频率	282.496	282.85
3		
频率	299.769	300.13
4		
频率	404.593	405.16
5		
频率	517.408	518.01
6		
频率	557.576	558.08
7		
频率	611.205	612.13
8		
频率	637.661	638.54
9		
频率	807.131	807.97
10		
频率	839.842	839.22

为了模拟经典边界, 表 4 给出了不同弹性边界对应的弹簧刚度值。表 5 给出了典型边界和弹性边界复合材料板的固有频率。得到经典边界与弹性边界的最大误差为 0.897%。结果验证了所提出的弹性边界的准确性。将由弹性边界得到的频率与经典边界得到的频率进行了比较。可以看出, 在相同条件下, 弹性边界与经典边界所取得结果具有显著的一致性, 表明该方法对 CLPCM 研究具有较高的准确性。

Table 4. Spring stiffness for various types of tradition support

表 4. 适用于各种传统类型支座的弹簧刚度

符号	边界条件	弹簧刚度(N/m or N/rad)			
		k_u (N/m)	k_v (N/m)	k_w (N/m)	k_θ (N/rad)
F	自由	0	0	0	0
S	简支	10^{10}	10^{10}	10^{10}	0
C	固支	10^{10}	10^{10}	10^{10}	10^{10}

Table 5. Vibration of CLPCM with typical boundary and elastic edge ($m_e = 0$, $[0/90]_{8s}$)

表 5. 经典边界和弹性边界对比($m_e = 0$, $[0/90]_{8s}$)

边界条件	阶次	1	2	3	4	5	6
CCCC	弹性边界	141.380	282.593	299.875	404.761	517.497	557.670
	传统边界	141.375	282.496	299.768	404.593	516.551	556.631
	误差(%)	0.004	0.034	0.035	0.042	0.017	0.017
SSSS	弹性边界	68.828	180.554	192.500	275.314	384.998	415.710
	传统边界	68.828	180.553	192.498	275.312	381.589	411.982
	误差(%)	0.000	0.001	0.001	0.001	0.886	0.897
FCFS	弹性边界	19.603	72.815	102.503	150.298	210.571	273.122
	传统边界	19.603	72.814	102.502	150.295	210.544	273.077
	误差(%)	0.000	0.001	0.001	0.002	0.013	0.017

由表 6 可以看出, 当附加集中质量复合材料层合板的边界条件为四边固定时, 理论计算得到的固有频率与有限元仿真得到的固有频率相比, 最大误差为 3.342%, 满足收敛条件, 验证了理论计算的准确性。

Table 6. Coupling additional concentrated mass frequency comparison

表 6. 耦合附加集中质量频率对比

边界条件	阶次	P_0		
		理论	有限元	误差(%)
CCCC	1	55.122	54.60	0.956
	2	282.377	282.85	0.167
	3	299.642	300.13	0.163
	4	339.188	328.22	3.342
	5	404.593	405.16	0.140
	6	536.338	537.64	0.242
	7	610.302	612.13	0.299
	8	636.654	638.54	0.295
	9	731.146	720.20	1.520
	10	833.808	839.22	0.645

4. 结果与讨论

图 3 比较了附加集中质量位于中心点 P_0 和无附加集中质量两种情况下的复合材料层合板的前 10 阶固有频率。通过对比分析可以明显看出, 附加集中质量的存在对复合材料层合板的固有频率产生了显著影响, 尤其是对第一阶固有频率的影响更为敏感。这表明, 附加集中质量是影响复合材料层合板振动特性的重要因素, 其变化可能导致复合材料层合板振动特性的显著改变。中心点附加集中质量复合材料层合板的固有频率普遍低于无附加集中质量复合材料层合板的固有频率, 显然, 附加集中质量增加了系统的总质量, 导致系统固有频率下降。

图 4 为无附加集中质量和有附加集中质量的复合材料层合板前 10 阶模态振型对比。可以发现附加集中质量的存在对复合材料层合板模态振型有一定影响, 其部分阶次的模态振型发生了显著变化。这表明附加集中质量的引入影响了复合材料层合板振动时的位移分布, 改变了其部分阶次的模态振型。随着模态阶次的增加, 振型的复杂性逐渐提高, 节点数量增多。结合图 3 和图 4 进一步分析, 当附加集中质量位于振型节点线上时(如 2、3、7、8、10 阶模态振型中点), 对振型无影响, 固有频率基本不变; 而第 4、6、9 阶模态对附加集中质量敏感, 节线变化显著。附加集中质量引入后, 第 1 阶模态振动区域形态受附加集中质量影响轻微改变, 第 4、5、6、9 阶模态振型发生明显改变, 从规则变为不规则, 节线位置发生改变。

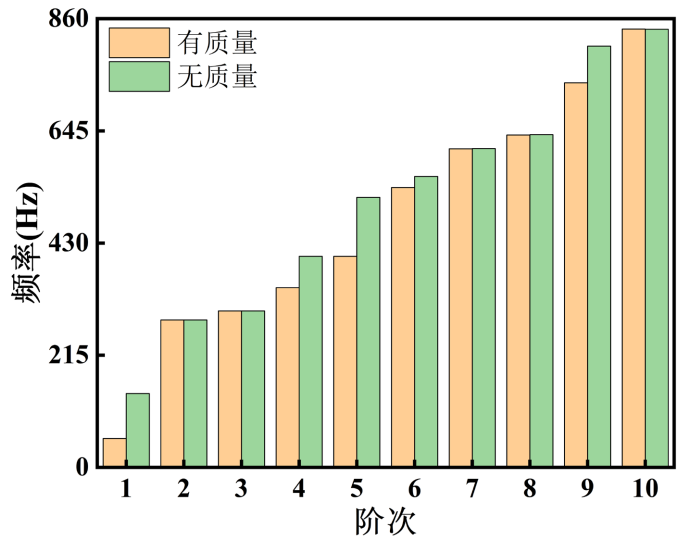


Figure 3. Natural frequencies of the composite laminated plate with or without additional concentrated mass
图 3. 有无附加集中质量的复合材料层合板固有频率

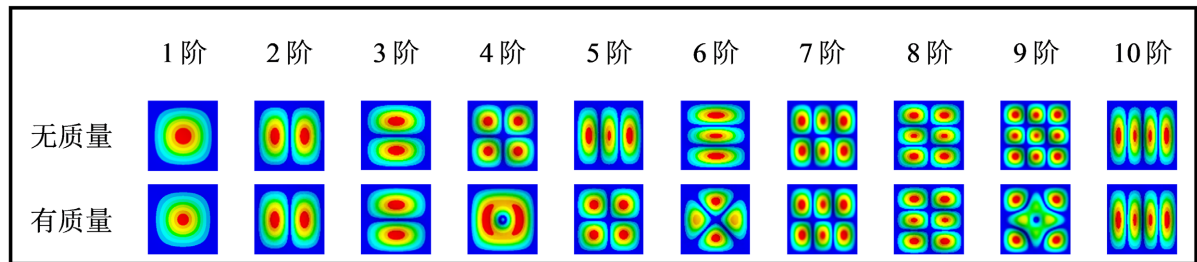


Figure 4. Modal shapes of the composite laminated plate with or without additional concentrated mass
图 4. 有无附加集中质量的复合材料层合板的模态振型

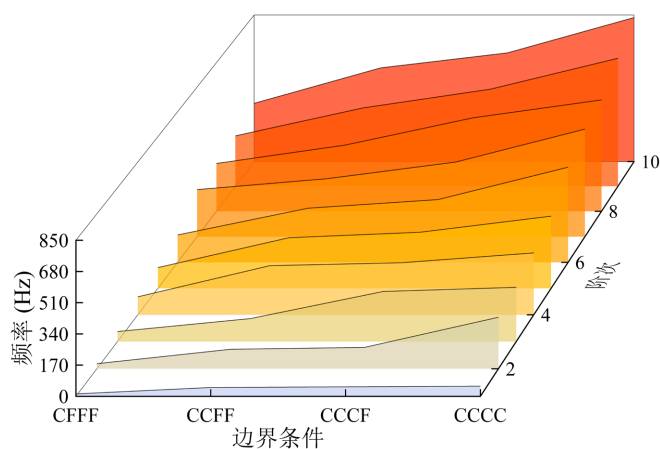


Figure 5. Natural frequencies of coupled additional concentrated mass composite laminates under different boundary conditions

图 5. 不同边界条件下耦合附加集中质量复合材料层合板固有频率

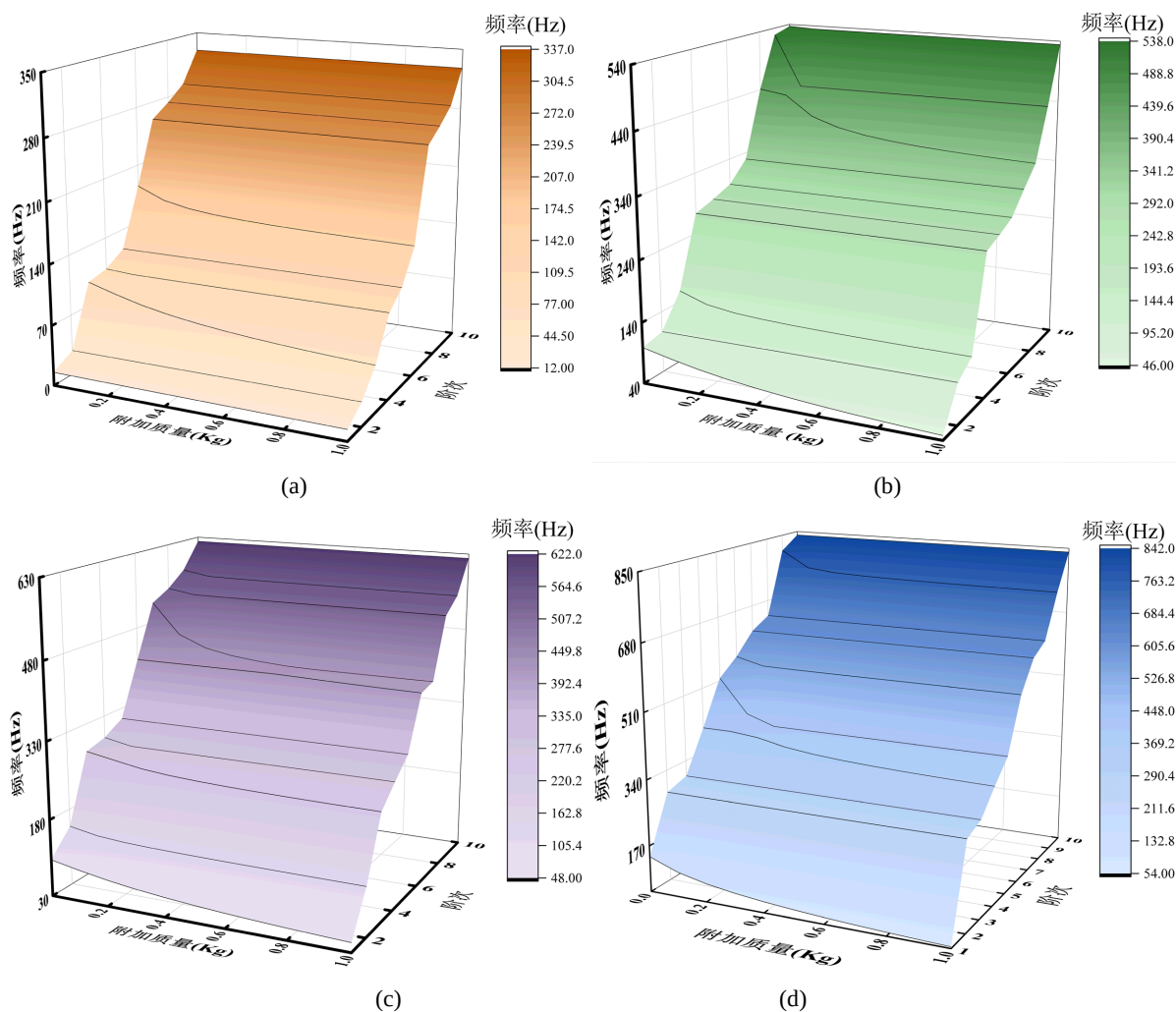


Figure 6. Effects of different additional concentrated masses on natural frequencies of composite laminates under different boundary conditions: (a) CFFF; (b) CCFF; (c) CCCF; (d) CCCC

图 6. 不同边界条件下不同附加集中质量对复合材料层合板固有频率的影响: (a) CFFF; (b) CCFF; (c) CCCF; (d) CCCC

图 5 呈现了不同边界条件(CFFF、CCFF、CCCF、CCCC)下耦合附加集中质量($m_e = 0.946 \text{ kg}$)的复合材料层合板前 10 阶固有频率分布, 展示了边界条件变化对耦合附加集中质量的复合材料层合板各阶固有频率的影响规律。分析发现: 相同振动阶次下, 随着边界条件中固定端数量从 CFFF 到 CCCC 增加, 复合材料层合板的固有频率整体上升, 反映出边界固定约束越强, 固有频率越高。深入分析还能发现, 同一边界条件下, 复合材料层合板固有频率呈非线性增长趋势, 例如 CCCC 边界条件下, 高阶次(如 8~10 阶)频率增长幅度明显大于低阶次(如 2~4 阶); 在低阶次(如 2 阶)时, 各边界条件同阶次固有频率差异相对较小, 而随着阶次升高(如 8~10 阶), 不同边界条件下, 复合材料层合板的同阶次固有频率差距逐渐拉大, 如 CFFF 与 CCCC 边界条件在 10 阶时的频率差显著大于 2 阶时的差值, 说明边界约束强度对高阶固有频率的影响更明显。整体来看, 边界固定端数量越多(约束越强), 复合材料层合板固有频率增长的“梯度”越陡, 这揭示了耦合附加集中质量的复合材料层合板的边界约束与固有频率间的内在关联——约束强化提升系统整体刚度, 进而更显著地影响高阶固有频率。

图 6 给出了在 CCCC、CCCF、CCFF 和 CFFF 边界条件下, 附加集中质量的变化($m_e = 0 \sim 1 \text{ kg}$)对中心点耦合附加集中质量的复合材料层合板固有频率的影响。分析表明, 不同边界下附加集中质量增加都会降低各阶固有频率, 遵循振动理论中质量与频率的负相关关系。在附加集中质量增加的初始阶段, 固有频率下降速度较快, 这表明在该阶段附加集中质量对复合材料层合板振动特性的影响较为显著。随着附加集中质量进一步增加, 固有频率下降速度逐渐趋于平缓。而边界约束对固有频率的影响大于附加集中质量对固有频率的影响, 固定端数量的增加提升了系统刚度, 使强约束边界(如 CCCC)的固有频率显著高于弱约束边界的固有频率。对比这四张图可以看出 CCCC 与 CFFF 边界条件下高阶固有频率变化较小, CCFF 与 CCCF 边界则相反。高阶固有频率的变化幅度由边界约束强度和附加集中质量重量决定: 强约束边界(如 CCCC)通过高刚度抑制附加集中质量影响, 弱约束边界(如 CFFF)因刚度过弱弱化了质量效应, 两者变化均较小; 而介于中间约束的 CCFF 与 CCCF 边界, 边界约束刚度不足以完全抵抗附加集中质量变化, 导致高阶频率变化更显著。

5. 结论

本文采用理论分析和有限元方法对耦合附加集中质量复合材料层合板(CLPCM)的振动特性进行了研究。基于基尔霍夫薄板假设, 推导了 CLPCM 的动力学方程。在四边固定边界条件下, 理论计算预测的耦合附加集中质量复合材料层合板固有频率与有限元法结果的最大误差为 3.342%, 验证了理论计算的准确性和可靠性。讨论了附加集中质量对复合材料层合板振动特性的影响。分析得出以下结论:

(1) 附加集中质量对复合材料层合板的振动特性有重要影响。附加集中质量的引入会降低复合材料层合板部分阶次的固有频率, 尤其是第一阶固有频率。此外, 由于附加集中质量的影响, 复合材料层合板的部分阶次模态振型发生了显著变化, 这表明在结构设计中需要考虑附加集中质量对复合材料层合板振动特性的影响。

(2) 当附加质量固定($m_e = 0.946 \text{ kg}$)时, 系统固有频率随边界约束增强(CFFF $\rightarrow$ CCCC)及振动阶次升高呈显著非线性增长, 高阶模态频率增幅显著高于低阶模态, 且频率差异随阶次升高显著增大。

(3) 研究揭示了复合材料层合板在不同边界约束下附加集中质量对固有频率的影响规律: 附加集中质量增加会导致固有频率初期下降速率较快、后期趋于平缓; 边界约束强度主导固有频率基准值。高阶固有频率变化幅度由约束强度和附加集中质量重量共同决定。

参考文献

- [1] Zhang, Y.P., Wang, C.M., Pedroso, D.M. and Zhang, H. (2018) Extension of Hencky Bar-Net Model for Vibration

- Analysis of Rectangular Plates with Rectangular Cutouts. *Journal of Sound and Vibration*, **432**, 65-87. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.06.029>
- [2] Hsu, M. (2010) Vibration Analysis of Orthotropic Rectangular Plates on Elastic Foundations. *Composite Structures*, **92**, 844-852. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.09.015>
 - [3] Zhang, J., Xu, G., Liu, F., Lian, J. and Yan, X. (2016) Experimental Investigation on the Flow Induced Vibration of an Equilateral Triangle Prism in Water. *Applied Ocean Research*, **61**, 92-100. <https://doi.org/10.1016/j.apor.2016.08.002>
 - [4] Gui, Z., Shao, Z., Zhang, F., Shen, T., Zou, T. and Zhang, J. (2024) Effect of Material Anisotropy on the First-Order Vibration of Piezoelectric Oscillators in Circular Plate Configurations. *Sensors and Actuators A: Physical*, **379**, Article ID: 115918. <https://doi.org/10.1016/j.sna.2024.115918>
 - [5] Saltmarsh, K., Pan, J., Matthews, D. and Karrech, A. (2025) Integrated Analytical, Experimental, and Numerical Study of the Effect of Hydro-Static Loading on the Vibrational Response of Clamped Circular Plates. *Applied Acoustics*, **228**, Article ID: 110306. <https://doi.org/10.1016/j.apacoust.2024.110306>
 - [6] Zhai, Y., Zhang, X., Zhou, Y. and Wan, Z. (2024) Parametric Analysis of Vibration Characteristics of Laminated Composite Plate Structures. *Journal of Physics: Conference Series*, **2842**, Article ID: 012096. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2842/1/012096>
 - [7] Mao, Q., Chen, Y., Jin, G., Ye, T. and Zhang, Y. (2025) An Extended Chebyshev Spectral Method for Vibration Analysis of Rotating Cracked Plates. *Mechanical Systems and Signal Processing*, **229**, Article ID: 112558. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2025.112558>
 - [8] Xu, Z., Xu, P., Li, H., Wang, X., Sun, P., Gu, D., *et al.* (2025) Nonlinear Vibration Modeling and Control of MRE Grid Composite Sandwich Plates. *Applied Mathematical Modelling*, **143**, Article ID: 116006. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2025.116006>
 - [9] Kopmaz, O. and Telli, S. (2002) Free Vibrations of a Rectangular Plate Carrying a Distributed Mass. *Journal of Sound and Vibration*, **251**, 39-57. <https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.3977>
 - [10] Wang, Y., Qian, Y., Wang, Y., Yang, X. and Xu, L. (2024) Flutter Analysis of a Rigid-Flexible Coupled Composite Space Structure with Momentum Wheels under Thermal Load. *Aerospace Science and Technology*, **148**, Article ID: 109114. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2024.109114>
 - [11] Hu, Y., Chen, C., Fan, M., *et al.* (2025) Dynamic Analysis of Rigid-Flexible Structures with Piezoelectric Actuation and Control. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*.
 - [12] Zang, J., Liu, P., Zhang, Y. and Chen, L. (2023) The Performance of Nonlinear Vibration Control via Nitinol-Steel Wire Ropes. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **118**, Article ID: 107058. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2022.107058>
 - [13] Zhang, Y., Wang, Z., Cao, M., Song, X., Zang, J., Lacarbonara, W., *et al.* (2023) Vibration Control of Composite Laminate via Nitinol-Steel Wire Ropes: Modeling, Analysis, and Experiment. *Mechanical Systems and Signal Processing*, **204**, Article ID: 110775. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2023.110775>