

新能源飞机复合材料螺旋桨整流罩组合结构动力学分析

刘家乐, 宋旭圆

沈阳航空航天大学航空航天工程学部(院), 辽宁 沈阳

收稿日期: 2026年1月22日; 录用日期: 2026年2月21日; 发布日期: 2026年2月28日

摘要

本文针对新能源飞机推进系统中复合材料桨罩的动力学分析需求, 开展圆球-圆锥-圆盘组合结构(CSCPS)动力学建模的分析研究。基于Donnell壳体理论, 建立了该组合结构的能量泛函, 其中圆盘的控制方程通过令圆锥壳半顶角取极限导出。采用分布式弹簧技术模拟结构的连接界面与广义边界条件, 并应用Rayleigh-Ritz法和Hamilton原理推导出弹性边界下复合材料桨罩组合结构的动力学控制方程。基于参数分析探讨了弹簧刚度对系统固有频率的影响, 通过有限元仿真验证了所提建模方法的有效性与计算精度。

关键词

复合材料桨, 人工弹簧, 板壳耦合, 动力学分析

Dynamic Analysis of the Composite Material Propeller Cowling Composite Structures for New Energy Aircraft

Jiale Liu, Xuyuan Song

College of Aerospace Engineering, Shenyang Aerospace University, Shenyang Liaoning

Received: January 22, 2026; accepted: February 21, 2026; published: February 28, 2026

Abstract

This paper addresses the needs for dynamic analysis of composite propeller cowling structures in new-energy aircraft propulsion systems, conducting research on the dynamic modeling analysis of combined spherical-conical-plate structures (CSCPS). Based on the Donnell shell theory, the energy

functional of the CSCPS is established, with the governing equations for the disk derived by taking the limit of the semi-vertex angle of the conical shell. Distributed spring technology is employed to simulate the connection interfaces and generalized boundary conditions of the structure, while the Rayleigh-Ritz method and Hamilton's principle are applied to derive the dynamic governing equations of the composite blade casing assembly under elastic boundary conditions. The influence of spring stiffness on the natural frequencies of the system is investigated through parameter analysis, and the effectiveness and computational accuracy of the proposed modeling method are validated via finite element simulations.

Keywords

Composite Propeller Cowling, Artificial Spring, Plate-Shell Coupling, Dynamic Analysis

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在绿色航空战略背景下, 具有高强度、轻量化等优异性能的复合材料已成为新能源飞机结构设计的关键材料。作为推进系统的核心部件, 新能源飞机推进系统中的复合材料整流罩在实际飞行中可能产生不可预测的振动, 进而影响飞机结构的疲劳寿命。因此, 将整流罩简化为圆球-圆锥-圆盘组合结构(CSCPS), 并深入研究其振动特性, 对于提升飞行可靠性、保障飞行安全具有重要理论与工程意义。

从现有研究来看, 壳与板的振动特性一直是学术界关注的重点, 其中针对圆锥壳[1]-[4]、球壳[5]-[8]及平板[9]-[11]的振动分析已取得较为系统的成果。吴江海[12]等基于层合薄壳理论用谱元法构建层合锥壳及组合壳动力学模型, 经有限元验证, 分析多参数对振动特性的影响。Mirzaei [13]研究了碳纳米管增强复合材料锥形壳的线性热屈曲问题, 基于材料性能温度相关性与厚度梯度分布假设, 采用多方法联合分析揭示了碳纳米管体积分数对屈曲行为的关键影响。Song [14]等人结合 Donnell 壳体假设与弹性弹簧耦合支撑模型, 采用修正正交多项式及 Rayleigh-Ritz 法, 推导了湿热环境下氢动力飞机复合材料电池舱的振动控制方程, 并通过实验验证揭示了热湿耦合机理对振动特性的影响规律。伊海铭[15]等采用解析法研究环肋锥壳振动, 经 ANSYS 验证方法有效性, 揭示环肋等参数的抑振作用; 王威远[16]等通过模态试验识别蜂窝锥壳固有频率与阻尼比, 振动台试验表明其对 85 Hz 以上振动隔振效能理想。Jichuan [17]等研究了旋转球壳及功能梯度材料结构振动特性, 采用伽辽金法、Rayleigh-Ritz 法和一阶剪切变形理论, 分析了不同结构的振动行为, 提出了提高减振能力的建议。

通过对基本结构单元振动特性的广泛研究, 学者们不仅巩固了这一领域的理论基础, 而且开始了对组合结构的全面研究。Francesco [18]采用 Carrera 统一公式结合 z-zag 效应和广义微分求积法, 研究了双弯壳及功能梯度壳板结构的振动问题, 通过理论比较及文献验证确认了方法有效性。李鑫[19]等人针对航空发动机压气机叶片, 利用振动台试验中简谐激励高阶谐波引发的多模态耦合振动特征, 通过试验明确失效位置与应力叠加的关联及频差对高阶模态应力的影响。龙伦[20]等人考虑转静子耦合, 采用有限元结合试验研究直升机传动轴-机匣系统耦合振动, 验证方法有效性, 指出需规避工作转速内耦合共振以辅助动力学设计。Erasmio 等[21]基于 UTSDT 及 GDQ 法, 研究了功能梯度壳结构静动力分析, 揭示了关键参数对响应及振动特性的影响, 为复杂梯度材料设计提供理论支持。此外, Y. G. Qu 等人[22]的变分方法

——通过位移函数系数的独立广义变化推导结构运动方程的经典方法——在耦合壳结构建模中具有广泛的适用性。同时, Sobhani 等人[23] [24]采用广义微分正交法(GDQM)来表征耦合壳结构(包括椭球-椭球双弯曲壳和半球-圆柱-圆锥组合)的振动行为, 同时系统地评估了边界条件和结构参数对振动响应的影响, 但都集中在传统的边界条件上。直到 C. G. Wang [25]等人采用 Rayleigh-Ritz 方法并结合离散弹簧系统, 模拟了圆锥-圆柱壳之间的弹性耦合, 以更准确地反映真实的连接条件。综上所述, 既有研究虽已对单一板、壳结构及经典壳体组合结构进行了广泛而深入的探讨, 然而针对复杂板壳耦合结构(如球-锥-板组合体)的动力学建模与分析研究则相对匮乏。因此, 发展一套适用于此类复合材料耦合结构的通用动力学建模方法, 不仅能够填补现有理论研究的空白, 对于指导相关工程结构的设计与安全评估亦具有重要的理论与实用价值。

为此, 本文以新能源电动飞机推进系统桨罩为研究对象, 开展复杂异性复合材料球形壳-锥形壳-环形圆板组合结构(CSCPS)的动力学建模及分析研究。基于 Donnell 壳体理论构建其理论模型, 为精确模拟复杂的连接与边界约束, 在 CSCPS 的各连接界面及边界处引入了一系列人工弹簧, 通过调节其刚度值实现经典简支、固支到弹性约束等多种边界条件的连续表征。结合 Rayleigh-Ritz 方法与能量原理, 推导系统的动能、应变能以及由连接弹簧与边界弹簧引入的耦合弹性势能与边界弹性势能, 建立该组合结构的统一动力学控制方程。通过有限元仿真对本文方法的计算精度与收敛性进行验证。

2. 动力学模型

2.1. 模型建立

如图 1 所示, 桨罩的结构可以简化为球体、圆锥体和环形板的组合(CSCPS), 并给出相应的几何参数。在结构中性能面建立直角坐标系 (φ, θ, z) , 其中 φ, θ, z 分别表示在 x, y, z 方向上的位移。在该体系中, S, C, P 分别代表球壳、圆锥壳和环形板。

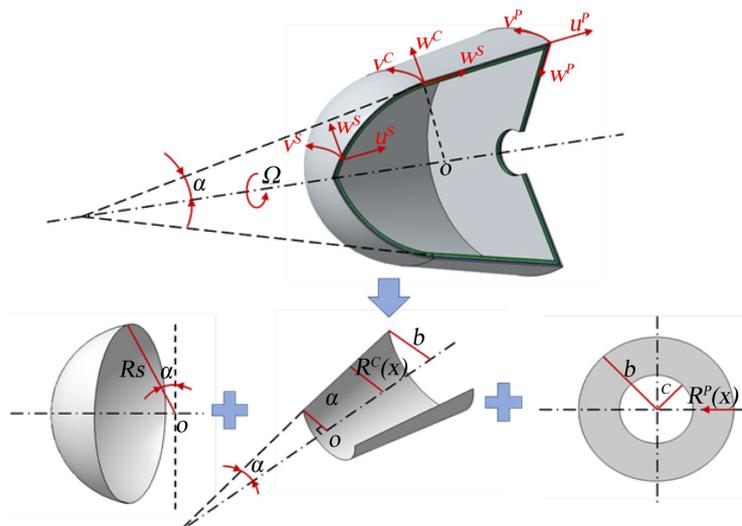


Figure 1. Three-dimensional simplified model of the composite material propeller cowling (CSCPS)
图 1. 复合材料整流罩(CSCPS)三维简化模型

模型中, 整体结构厚度为 H , 球壳半径为 R^s , 且球壳与圆锥壳相切于交接点。圆锥壳的几何参数包括: 小端半径 a 、大端半径 b 、母线长 l 。沿其母线方向定义的坐标 x 处, 壳体的周长半径为 $R^c(x)$ 。环形板的内半径为 c , 外半径与圆锥壳大端半径 b 相等。板的宽度为 L_p , 板上对应点的半径定义为 $R^p(x)$ 。

2.2. 复合材料整流罩结构的能量表达式

本文使用 Donell 薄壳理论进行建模, 在笛卡尔坐标系上, 结构的位移 - 应变关系可以写成:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\varphi &= \varepsilon_\varphi^\xi + z \chi_\varphi^\xi \\ \varepsilon_\theta &= \varepsilon_\theta^\xi + z \chi_\theta^\xi \\ \gamma_{\varphi\theta} &= \gamma_{\varphi\theta}^\xi + z \chi_{\varphi\theta}^\xi \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $\varepsilon_\varphi^\xi, \varepsilon_\theta^\xi, \gamma_{\varphi\theta}^\xi$ 为中曲面的薄膜应变分量, $\chi_\varphi^\xi, \chi_\theta^\xi, \chi_{\varphi\theta}^\xi$ 为中曲面的弯曲应变分量(或曲率应变分量), $\xi = S, C, P$ 分别代表球壳、锥壳与环形板。这些应变分量的表达式为:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\varphi^S &= \frac{1}{R^S} \frac{\partial u^S}{\partial \varphi} + \frac{w^S}{R^S}, \varepsilon_\theta^S = \frac{1}{R^S \cdot S_\varphi} + \frac{u^S \cdot C_T}{R^S} + \frac{w^S}{R^S} \\ \gamma_{\varphi\theta}^S &= \frac{1}{R^S \cdot S_\varphi} \frac{\partial u^S}{\partial \theta} + \frac{1}{R^S} \frac{\partial v^S}{\partial \varphi} - \frac{v^S \cdot C_T}{R^S}, \chi_\varphi^S = -\frac{1}{(R^S)^2} \frac{\partial^2 w^S}{\partial \varphi^2} \\ \chi_\theta^S &= -\frac{1}{(R^S \cdot S_\varphi)^2} \frac{\partial^2 w^S}{\partial \theta^2} - \frac{1}{(R^S)^2} \cdot C_T \frac{\partial w^S}{\partial \varphi} \\ \chi_{\varphi\theta}^S &= -\frac{2}{(R^S)^2} \frac{\partial^2 w^S}{\partial \varphi \partial \theta} + \frac{2 \cdot C_T}{(R^S)^2} \frac{\partial w^S}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_\varphi^C &= \frac{\partial u^C}{\partial \varphi}, \varepsilon_\theta^C = \frac{1}{R^C} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u^C \cdot S_\alpha + w^C \cdot C_\alpha}{R^C} \\ \gamma_{\varphi\theta}^C &= \frac{1}{R^C} \frac{\partial u^C}{\partial \theta} + \frac{\partial v^C}{\partial \varphi} - \frac{v^C \cdot S_\alpha}{R^C}, \chi_\varphi^C = -\frac{\partial^2 w^C}{\partial \varphi^2} \\ \chi_\theta^C &= -\frac{1}{(R^C)^2} \frac{\partial^2 w^C}{\partial \theta^2} + \frac{C_\alpha}{(R^C)^2} \frac{\partial v^C}{\partial \theta} + \frac{S_\alpha}{R^C} \frac{\partial w^C}{\partial \varphi} \\ \chi_{\varphi\theta}^C &= -\frac{2}{R^C} \frac{\partial^2 w^C}{\partial \varphi \partial \theta} + \frac{2 \cdot S_\alpha}{(R^C)^2} \frac{\partial w^C}{\partial \theta} + \frac{2 \cdot C_\alpha}{R^C} \frac{\partial v^C}{\partial \varphi} - \frac{2 \cdot v}{(R^C)^2} \cdot S_\alpha \cdot C_\alpha \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_\varphi^P &= \frac{\partial u^P}{\partial \varphi}, \varepsilon_\theta^P = \frac{1}{R^P} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{u^P}{R^P} \\ \gamma_{\varphi\theta}^P &= \frac{1}{R^P} \frac{\partial u^P}{\partial \theta} + \frac{\partial v^P}{\partial \varphi} + \frac{v^P}{R^P}, \chi_\varphi^P = -\frac{\partial^2 w^P}{\partial \varphi^2} \\ \chi_\theta^P &= -\frac{1}{(R^P)^2} \frac{\partial^2 w^P}{\partial \theta^2} - \frac{1}{R^P} \frac{\partial w^P}{\partial \varphi} \\ \chi_{\varphi\theta}^P &= -\frac{2}{R^P} \frac{\partial^2 w^P}{\partial \varphi \partial \theta} - \frac{2}{(R^P)^2} \frac{\partial w^P}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (4)$$

其中, 球壳中的 $C_\varphi = \cos\varphi$, $S_\varphi = \sin\varphi$, 和 $C_T = \cot\varphi$, 锥壳中 $C_\alpha = \cos\alpha$, $S_\alpha = \sin\alpha$ 。值得注意的是, 圆盘的应变分量表达式是由圆锥壳的圆锥角 α 取 $-\pi/2$ 简化而来。

复合材料的特点之一是在不同方向上的刚度是不同的, 本结构的纤维夹角为 β , 如图 2 所示。

可得出各层板在非材料主轴方向的应力 - 应变关系为:

$$\begin{bmatrix} \sigma_\varphi \\ \sigma_\theta \\ \tau_{\varphi\theta} \end{bmatrix} = [T]^{-1} [Q] ([T]^{-1})^T \begin{bmatrix} \varepsilon_\varphi \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{\varphi\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_\varphi \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{\varphi\theta} \end{bmatrix} \quad (5)$$

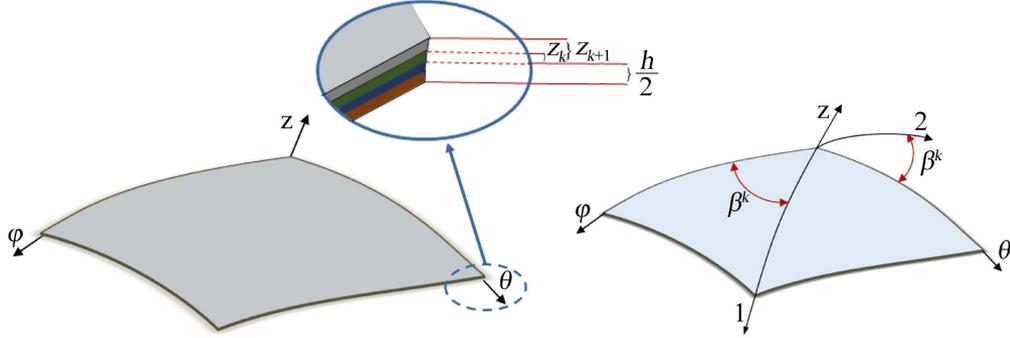


Figure 2. Schematic diagram of fiber angle
图 2. 纤维夹角示意图

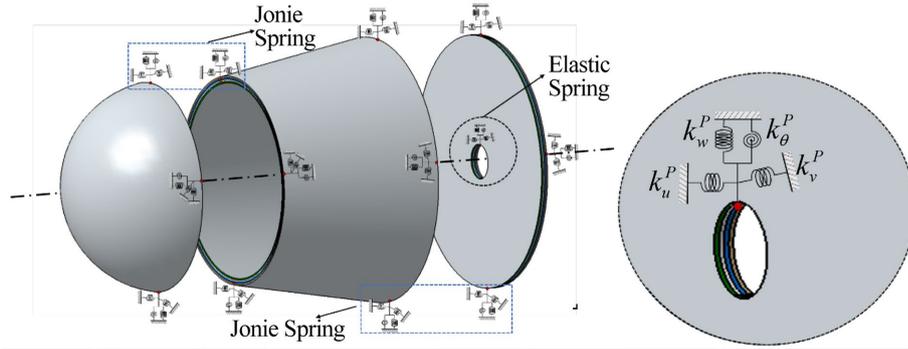


Figure 3. Boundary conditions of spring simulation
图 3. 弹簧模拟的边界条件

其中坐标转换矩阵 $[T]$ 、刚度矩阵 $[Q]$ 和折算刚度系数 \bar{Q}_{ij} 定义如下:

$$[T] = \begin{bmatrix} mm^2 & nn^2 & 2mn \\ nn^2 & mm^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} \\ \bar{Q}_{12} \\ \bar{Q}_{22} \\ \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^4 & 2m^2n^2 & n^4 & 4m^2n^2 \\ m^2n^2 & m^4 + n^4 & m^2n^2 & -4m^2n^2 \\ n^4 & 2m^2n^2 & m^4 & 4m^2n^2 \\ m^3n & mn^3 - m^3n - mn^3 & 2(mn^3 - m^3n) & \\ mn^3 & m^3n - mn^3 - m^3n & 2(m^3n - mn^3) & \\ m^2n^2 & -2m^2n^2 & m^2n^2 & (m^2 - n^2)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{12} \\ Q_{22} \\ Q_{66} \end{bmatrix} \quad (8)$$

这里 $m = \cos\beta$ 和 $n = \sin\beta$; 并且 Q_{ij} 可以表示为:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu_{12}E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{22} &= \frac{E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, Q_{66} = G_{12} \end{aligned} \quad (9)$$

其中, E_{11} , E_{22} 和 G_{12} 是复合材料的杨氏模量和剪切模量。而泊松比 ν_{12} 和 ν_{21} 可以由 $E_{11}\nu_{12} = E_{22}\nu_{21}$ 来确定。

之后只要对每一层的应力沿厚度积分并求和, 可得合内力 N_α , N_β , $N_{\alpha\beta}$ 及合内力矩 M_α , M_β , $M_{\alpha\beta}$ 与应变的关系为:

$$\begin{bmatrix} N_\alpha \\ N_\beta \\ N_{\alpha\beta} \\ M_\alpha \\ M_\beta \\ M_{\alpha\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_\phi^\varepsilon \\ \varepsilon_\theta^\varepsilon \\ \gamma_{\phi\theta}^\varepsilon \\ \chi_\phi^\varepsilon \\ \chi_\theta^\varepsilon \\ \chi_{\phi\theta}^\varepsilon \end{bmatrix} = S \cdot \varepsilon^\varepsilon \quad (10)$$

式中

$$\begin{cases} A_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \\ B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\ D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \end{cases} \quad (11)$$

其中, A_{ij} , B_{ij} , D_{ij} ($i, j = 1, 2, 6$), 分别被称为拉伸刚度(tensile stiffness)、耦合刚度(coupling stiffness)及弯曲刚度(bending stiffness), N 为该结构的层数 z_k 和 z_{k-1} 为从中性层到该层的上下表面的距离。

因此, 对复合材料结构整个区域进行积分, 便可求得结构应变能, 为:

$$\begin{aligned} U_\varepsilon^S &= \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_0^{2\pi} (\varepsilon^S)^T \cdot S \cdot \varepsilon^S \cdot (R^S)^2 \cdot \sin\varphi \, d\theta d\varphi \\ U_\varepsilon^C &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} (\varepsilon^C)^T \cdot S \cdot \varepsilon^C \cdot R^C \, d\theta d\varphi \\ U_\varepsilon^P &= \frac{1}{2} \int_0^{L^P} \int_0^{2\pi} (\varepsilon^S)^T \cdot S \cdot \varepsilon^S \cdot R^P \, d\theta d\varphi \end{aligned} \quad (12)$$

对于 CSCPS 结构动能表达式为:

$$\begin{aligned} M^S &= \frac{\rho h}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \int_0^{2\pi} [(\dot{u})^2 + (\dot{v})^2 + (\dot{w})^2] \cdot R^S \sin\varphi \, d\theta d\varphi \\ M^C &= \frac{\rho h}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \int_0^{2\pi} [(\dot{u})^2 + (\dot{v})^2 + (\dot{w})^2] \cdot R^S \sin\varphi \, d\theta d\varphi \\ M^P &= \frac{\rho h}{2} \int_0^{L^P} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{h^2}{12} [(\dot{u})^2 + (\dot{v})^2] + (\dot{w})^2 \right\} \cdot R^P \, d\theta d\varphi \end{aligned} \quad (13)$$

这里 ρ 和 h 是结构的密度和厚度。

为了得到 CSCPS 频率方程, 球壳 - 锥壳、锥壳 - 圆盘连接处, 位移关系如图 3 所示。通过改变弹簧刚度, 可以实现连接面的连接, 那么连接弹簧的势能可以计算为:

$$\begin{aligned}
 U_{jspr} = & \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\begin{aligned} & k_{ju} (u^c - u^s)^2 + k_{jv} (v^c - v^s)^2 \\ & + k_{jw} (w^c - w^s) + k_{j\theta} \left(\frac{\partial w^c}{\partial x^c} - \frac{1}{R^S} \left(\frac{\partial w^s}{\partial x^s} - u^s \right) \right) \right] \cdot ad\theta \right\}_{x^s = \varphi_1, x^c = 0} \\
 & + \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\begin{aligned} & k_{ju} (u^c + u^p \sin(\alpha) + w^p \cos(\alpha))^2 + k_{jv} (v^c - v^p)^2 \\ & + k_{jw} (w^c - w^p \sin(\alpha) + u^p \cos(\alpha)) \\ & + k_{j\theta} \left(\frac{\partial w^c}{\partial x^c} - \frac{\partial w^p}{\partial x^p} \right) \right] \cdot bd\theta \right\}_{x^c = L, x^p = 0}
 \end{aligned} \right. \quad (14)
 \end{aligned}$$

在球壳、锥壳、圆盘边界处, 也可使用弹簧连接来代替传统边界条件, 通过改变弹簧刚度, 来模拟不同边界条件(图 3), 则边界弹簧势能为:

$$\begin{aligned}
 U_{bspr}^S &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[k_u^S u^2 + k_v^S v^2 + k_w^S w^2 + k_\theta^S \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 \right] R^S \sin \varphi d\theta \\
 U_{bspr}^C &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[k_u^C u^2 + k_v^C v^2 + k_w^C w^2 + k_\theta^C \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 \right] R^C d\theta \\
 U_{bspr}^P &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[k_u^P u^2 + k_v^P v^2 + k_w^P w^2 + k_\theta^P \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 \right] R^P d\theta
 \end{aligned} \quad (15)$$

2.3. 假设位移函数

在本研究中, 在周向和轴向的模式可以用调和函数和多项式函数表示。因此, CSCPS 结构的振动位移特征函数可以写成如下形式:

$$\begin{aligned}
 u^\xi(\varphi, \theta, t) &= \cos(n\theta + \omega t) U^\xi(\varphi) \\
 v^\xi(\varphi, \theta, t) &= \sin(n\theta + \omega t) V^\xi(\varphi) \\
 w^\xi(\varphi, \theta, t) &= \cos(n\theta + \omega t) W^\xi(\varphi)
 \end{aligned} \quad (16)$$

其中, ω 为角频率, n 为周向波数。 $U^\xi(\varphi)$, $V^\xi(\varphi)$, $W^\xi(\varphi)$, 分别为 u^ξ 、 v^ξ 、 w^ξ ($\xi = S, C, P$) 方向上的振型函数。按照 Rayleigh-Ritz 方法, 这一系列正交多项式函数的线性组合可定义为:

$$\begin{cases} U^\xi(\varphi) = \sum_{m=1}^{NT} a_m^\xi \psi_m^u(\varphi) \\ V^\xi(\varphi) = \sum_{m=1}^{NT} b_m^\xi \psi_m^v(\varphi) \\ W^\xi(\varphi) = \sum_{m=1}^{NT} c_m^\xi \psi_m^w(\varphi) \end{cases} \quad (17)$$

其中 $\psi_m^u(\varphi)$ 、 $\psi_m^v(\varphi)$ 和 $\psi_m^w(\varphi)$ 分别是轴向、周向和径向的满足几何边界条件的正交多项式, a_m 、 b_m 和 c_m 是对应 Ritz 的系数, NT 为模态振型函数的截断阶数。

2.4. 求解

将公式(16)分别带入(12), (13), (14), (15)后, 可求得结构的应变能 U^ξ 、动能 T^ξ 、连接处的弹簧势能 U_{jspr}^ξ 和边界弹簧势能 U_{bspr}^ξ , 因此对于具有经典边界条件的复合材料 CSCPS 模型的拉格朗日函数可以

表示为:

$$L = \sum_{\xi=S,C,P} T^{\xi} - \sum_{\xi=S,C,P} (U_{\xi}^{\xi} + U_{jspr}^{\xi}) \quad (18)$$

复合材料结构的运动方程可由 Hamilton 原理推导出来, 其数学表达式为:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (19)$$

其中 $q = [q_u^S, q_v^S, q_w^S, q_u^C, q_v^C, q_w^C, q_u^P, q_v^P, q_w^P, q_u^T]^T$ 。

通过式子(19)可以得到复合材料结构的振动特性方程, 具体为:

$$[\omega^2 M + U] \mathbf{X} = 0 \quad (20)$$

其中 $X = [a_m^S, b_m^S, c_m^S, a_m^C, b_m^C, c_m^C, a_m^P, b_m^P, c_m^P]$ 是 Ritz 向量, $U = U_{\xi} + U_{jspr}$ 。

对于特性方程有非零解的充分必要条件是公式(20)的矩阵的行列式为零, 即

$$\det[\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{U}] = 0 \quad (21)$$

通过求解公式(21)的特征值和特征根, 可以求得具有传统边界条件的复合材料结构的角频率和模态系数。

3. 不同弹性支撑影响的模态分析

有效性和收敛性分析

复合材料 CSCPS 实验件的几何尺寸如表 1 所示。为避免球顶开口处出现应力集中, 同时保证计算模型的准确性, 将球壳开口半角设为 $\varphi_1 = 89.9^\circ$, 以近似模拟实际边界过渡。实验件采用 T700 碳纤维预浸料制造, 铺层顺序为 $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$, 其材料力学性能参数如表 2 所示。

Table 1. Geometric parameters of composite material structure

表 1. 复合材料结构的几何参数

| 几何参数 | 符号 | 值 | 单位 |
|----------|-------------|-------|-----|
| 圆球半径 | Rs | 91.4 | mm |
| 厚度 | h | 1.6 | mm |
| 圆球开口角度 1 | φ_1 | 89.9 | deg |
| 圆球开口角度 2 | φ_2 | 10 | deg |
| 圆锥角 | α | 10 | deg |
| 圆锥小半径 | a | 120 | mm |
| 圆锥大半径 | b | 117.3 | mm |
| 圆锥母线 | L | 157.4 | mm |
| 圆盘小半径 | c | 60 | mm |

下一步进行耦合弹簧和边界弹簧的刚度的确定。对于连接处和边界处的弹簧, 其刚度取值为 10^1 到 10^{15} 。图 4(a)中展示了在传统固定边界(F-C)下, 不同周向波数时, 改变连接处弹簧的刚度对于 CSCPS 的频率的影响。图 4(b)表示通过改变边界弹簧的刚度, 以达到弹性边界模拟传统边界条件的目的。由图可以看出, 耦合弹簧刚度在 $10^1 \sim 10^4$ 的范围内时, 结构的固有频率保持不变; 但在 $10^5 \sim 10^{10}$ 时, 会使得结构

固有频率激增, 而在大于 10^{10} 时又趋于稳定。对于边界弹簧, 在刚度在 $10^2 \sim 10^{10}$ 时, CSCPS 的频率一直处于增加状态, 而在刚度大于 10^{11} 后趋于稳定。结果表明, 连接弹簧和边界弹簧的刚度都会在分析 CSCPS 结构的固有频率时产生影响, 可以通过改变不同的刚度值, 以实现模拟不同的工程条件。

Table 2. Properties of carbon fiber T700 material

表 2. 碳纤维 T700 材料属性

| 参数 | 符号 | 值 | 单位 |
|------|------------|------|-------------------|
| 密度 | ρ | 1488 | kg/m ³ |
| 泊松比 | ν_{12} | 0.33 | |
| 弹性模量 | E_{11} | 140 | GPa |
| 弹性模量 | E_{22} | 7 | GPa |
| 剪切模量 | G_{12} | 5 | GPa |

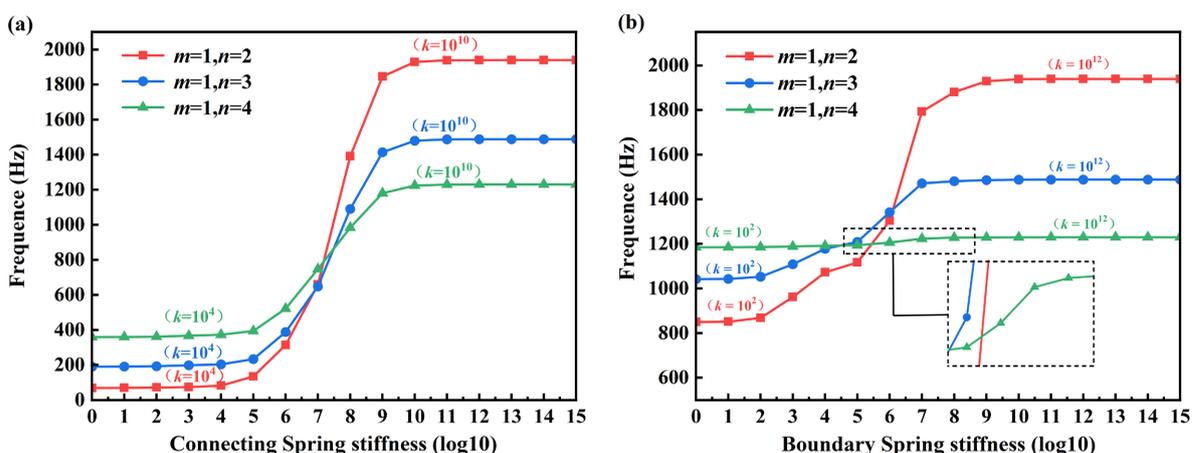


Figure 4. Frequencies at different spring stiffnesses: (a) Connecting spring; (b) Boundary spring

图 4. 在不同弹簧刚度下的频率: (a) 连接弹簧; (b) 边界弹簧

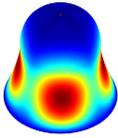
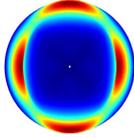
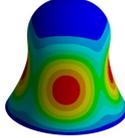
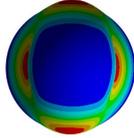
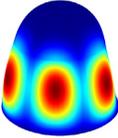
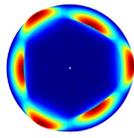
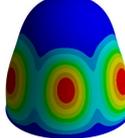
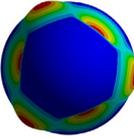
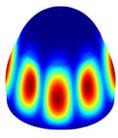
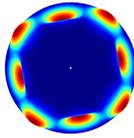
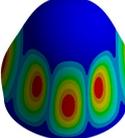
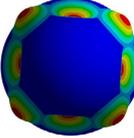
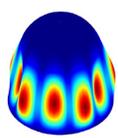
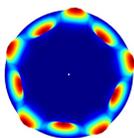
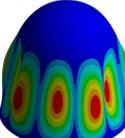
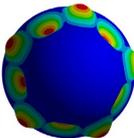
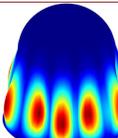
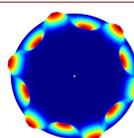
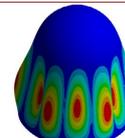
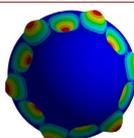
Table 3. The natural frequency of the composite material CSCPS structure

表 3. 复合材料 CSCPS 结构的固有频率

| 边界条件 | m | n | 理论频率(Hz) | | | | | 有限元 (Hz) | 误差 (%) |
|------|---|----|----------|----------|-----------|-----------|-----------|----------|--------|
| | | | $NT = 6$ | $NT = 8$ | $NT = 10$ | $NT = 12$ | $NT = 14$ | | |
| C | 1 | 6 | 1285.43 | 1284.17 | 1284.07 | 1284.06 | 1284.06 | 1280.7 | 0.26 |
| | | 7 | 1537.27 | 1536.55 | 1536.49 | 1536.48 | 1536.47 | 1532.5 | 0.29 |
| | | 8 | 1883.56 | 1883.07 | 1883.04 | 1883.04 | 1883.04 | 1878.2 | 0.26 |
| | | 9 | 2297.18 | 2296.46 | 2296.44 | 2296.44 | 2296.43 | 2291.8 | 0.20 |
| | | 10 | 2764.93 | 2763.06 | 2763.02 | 2763.01 | 2763.01 | 2759.2 | 0.14 |
| S | 2 | 6 | 2253.97 | 2249.62 | 2249.27 | 2249.24 | 2249.23 | 2248.2 | 0.05 |
| | | 7 | 2347.94 | 2343.42 | 2343.11 | 2343.08 | 2343.08 | 2339.8 | 0.14 |
| | | 8 | 2584.01 | 2578.09 | 2577.74 | 2577.72 | 2577.71 | 2574.1 | 0.14 |
| | | 9 | 2945.04 | 2934.48 | 2933.92 | 2933.89 | 2933.89 | 2930.7 | 0.11 |
| | | 10 | 3412.61 | 3391.72 | 3390.63 | 3390.61 | 3390.60 | 3390.9 | 0.01 |

下一步, 确定正交多项式的阶数。正交多项式位移函数可以有无穷多项, 理论上项数(NT)越多结果越精确, 但出于计算精度、经济效益和计算时间等方面的考量, 在计算时只能选取有限项进行计算, 因此, 确定项数的选择来确保计算方法的收敛性和结果的精确性。如表 3 所示本文所提出的计算模型结果收敛的很快, 为了达到所需的计算精度, 选取多项式阶数为 10 或以上。后续数值分析时选择 NT = 14 (表 4 为在 C 边界条件下的部分模态结果)。

Table 4. Comparison of modal diagrams of composite material CSCPS structure under C boundary condition
表 4. 复合材料 CSCPS 结构在 C 边界条件下的模态图对比

| 模态(m, n) | 理论模态 | | FEM | |
|----------|---|---|---|---|
| (1, 2) |  |  |  |  |
| | 1937.43 Hz | | 1936.1 Hz | |
| (1, 3) |  |  |  |  |
| | 1487.22 Hz | | 1486.7 Hz | |
| (1, 4) |  |  |  |  |
| | 1229.4 Hz | | 1226.9 Hz | |
| (1, 5) |  |  |  |  |
| | 1167.94 Hz | | 1165.7 Hz | |
| (1, 6) |  |  |  |  |
| | 1284.08 Hz | | 1280.7 Hz | |

4. 结论

本文研究了复合材料浆罩组合结构自由振动分析中的应用。通过将浆罩分为圆球 - 圆锥 - 圆盘组合结构(CSCPS), 使用 Donnell 壳体理论建立能量函数。值得一提的是圆盘结构的理论方程是通过将圆锥角取 $-\pi/2$ 而得来的。引入弹簧模拟技术, 作为圆球 - 圆锥、圆锥 - 圆盘连接处的计算方法, 并同时可以用来模拟一般边界条件, 利用拉格朗日方程和 Hamilton 原理得到了复合材料 CSCPSs 结构的运动方程, 并对所有数值结果进行了求解, 得出以下结论:

- 1) 连接与边界弹簧的刚度对结构固有频率具有显著的影响。在较低刚度范围($<10^4$)内, 其影响可忽

略不计; 当刚度增加至 $10^5 \sim 10^{10}$ 区间时, 频率呈现急剧上升趋势; 而当刚度超过 10^{10} 后, 频率进入稳定平台区, 因此在分析中弹簧刚度应取 10^{12} 以确保计算的准确性。

2) 针对位移多项式阶次 NT 的收敛性分析表明, 当 $NT = 14$ 时, 计算结果已达到充分收敛。此时, 理论计算结果与高精度有限元仿真结果之间的最大相对误差不超过 0.3%, 在计算精度与时间成本之间取得了最优平衡。

参考文献

- [1] Ansari, R., Faghih Shojaei, M., Rouhi, H. and Hosseinzadeh, M. (2015) A Novel Variational Numerical Method for Analyzing the Free Vibration of Composite Conical Shells. *Applied Mathematical Modelling*, **39**, 2849-2860. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2014.11.012>
- [2] Mirzaei, M. and Rabiei, R. (2024) On the Free and Forced Vibrations of Porous GPL Reinforced Composite Conical Panels Using a Legendre-Ritz Method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **163**, 378-393. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2024.03.024>
- [3] Huang, Q., Gao, Y., Hua, F., Fu, W., You, Q., Gao, J., et al. (2023) Free Vibration Analysis of Carbon-Fiber Plain Woven Reinforced Composite Conical-Cylindrical Shell under Thermal Environment with General Boundary Conditions. *Composite Structures*, **322**, Article 117340. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2023.117340>
- [4] 吴江海, 朱真慧, 胡东森, 等. 基于谱元法的任意边界层合圆柱壳振动特性分析[J]. 振动与冲击, 2025, 44(9): 37-44+108.
- [5] Ansari, E., Hemmatnezhad, M. and Taherkhani, A. (2023) Free Vibration Analysis of Grid-Stiffened Composite Truncated Spherical Shells. *Thin-Walled Structures*, **182**, Article 110237. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.110237>
- [6] Zhou, C., Zheng, X., Wang, Z., Xiong, S., Shi, Y. and Li, R. (2022) Benchmark Free Vibration Solutions of Spherical Shells by the State Space Method Incorporating Precise Matrix Exponential Computation. *Thin-Walled Structures*, **175**, Article 109305. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.109305>
- [7] Muc, A., Kubis, S., Bratek, Ł. and Muc-Wierzgoń, M. (2022) Higher Order Theories for the Buckling and Post-Buckling Studies of Shallow Spherical Shells Made of Functionally Graded Materials. *Composite Structures*, **295**, Article 115851. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2022.115851>
- [8] Evkin, A.Y. (2020) Composite Spherical Shells at Large Deflections. Asymptotic Analysis and Applications. *Composite Structures*, **233**, Article 111577. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111577>
- [9] 王壮壮, 王腾, 丁艳梅, 等. 基于高阶剪切变形理论的功能梯度板自由振动分析简化模型[J]. 振动工程学报, 2024, 37(3): 384-393.
- [10] Shi, X. and Shi, D. (2018) Free and Forced Vibration Analysis of T-Shaped Plates with General Elastic Boundary Supports. *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*, **37**, 355-372. <https://doi.org/10.1177/1461348418756021>
- [11] Li, Q., Sanchez, J., Benaroya, H., Wang, J. and Xue, K. (2019) Free Vibration Analysis of Moderately Thick Coupled Plates with Elastic Boundary Conditions and Point Supports. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, **19**, Article 1950150. <https://doi.org/10.1142/s0219455419501505>
- [12] 吴江海, 段勇, 尹志勇. 层合圆锥壳及组合壳的受迫与自由振动特性分析[J]. 振动工程学报, 2025, 38(11): 2825-2835.
- [13] Mirzaei, M. and Kiani, Y. (2015) Thermal Buckling of Temperature Dependent FG-CNT Reinforced Composite Conical Shells. *Aerospace Science and Technology*, **47**, 42-53. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2015.09.011>
- [14] Song, X., Li, H., Zhang, Z., Zang, J., Zhang, Y. and Chen, L. (2024) Vibration of Composite Open Shell of Hydrogen-Electric Fuselage with Rectangular Cutout in Hygrothermal Circumstances: Theoretical and Experimental Research. *Thin-Walled Structures*, **205**, Article 112473. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2024.112473>
- [15] 伊海铭, 王春旭. 基于幂级数法的环肋圆锥壳振动特性分析[J]. 中国舰船研究, 2023, 18(2): 140-148.
- [16] 王威远, 王聪, 邹振祝. 蜂窝锥壳结构动力学特性试验研究[J]. 振动与冲击, 2007(7): 164-168+189.
- [17] Cao, J. (2016) Dynamic Modeling and Vibration Suppression Evaluation of Composite Honeycomb Hemispherical Shell with Functional Gradient Protective Coating. *Thin-Walled Structures*, **202**, Article 112066.
- [18] Tornabene, F., Fantuzzi, N. and Baccocchi, M. (2014) Free Vibrations of Free-Form Doubly-Curved Shells Made of Functionally Graded Materials Using Higher-Order Equivalent Single Layer Theories. *Composites Part B: Engineering*, **67**, 490-509. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2014.08.012>
- [19] 李鑫, 陈官峰, 秦秀云, 等. 谐波激励下压气机叶片多模态耦合振动特性研究[J]. 振动与冲击, 2024, 43(5): 338-

344.

- [20] 龙伦, 李坚, 赵勇铭, 等. 动力传动轴-机匣系统耦合振动特性[J]. 科学技术与工程, 2021, 21(33): 14422-14427.
- [21] Viola, E., Rossetti, L., Fantuzzi, N. and Tornabene, F. (2014) Static Analysis of Functionally Graded Conical Shells and Panels Using the Generalized Unconstrained Third Order Theory Coupled with the Stress Recovery. *Composite Structures*, **112**, 44-65. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.01.039>
- [22] Qu, Y., Chen, Y., Long, X., Hua, H. and Meng, G. (2013) A Modified Variational Approach for Vibration Analysis of Ring-Stiffened Conical-Cylindrical Shell Combinations. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, **37**, 200-215. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2012.06.006>
- [23] Sobhani, E., Arbabian, A., Civalek, Ö. and Avcar, M. (2021) The Free Vibration Analysis of Hybrid Porous Nanocomposite Joined Hemispherical-Cylindrical-Conical Shells. *Engineering with Computers*, **38**, 3125-3152. <https://doi.org/10.1007/s00366-021-01453-0>
- [24] Sobhani, E., Masoodi, A.R., Civalek, Ö. and Avcar, M. (2022) Natural Frequency Analysis of FG-GOP/ Polymer Nanocomposite Spheroid and Ellipsoid Doubly Curved Shells Reinforced by Transversely-Isotropic Carbon Fibers. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **138**, 369-389. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2022.03.009>
- [25] Wang, C., Song, X., Zang, J. and Zhang, Y. (2023) Experimental and Theoretical Investigation on Vibration of Laminated Composite Conical-Cylindrical-Combining Shells with Elastic Foundation in Hygrothermal Environment. *Composite Structures*, **323**, Article 117470. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2023.117470>