

弹性支撑输流管路的边界惯容减振器减振

金天成*, 张 振#

沈阳航空航天大学航空宇航学院, 辽宁 沈阳

收稿日期: 2026年5月1日; 录用日期: 2026年6月1日; 发布日期: 2026年6月9日

摘 要

本文研究边界惯容减振器对输流管路横向振动的减振作用。基于广义Hamilton原理建立边界耦合惯容减振器的弹性支撑输流管路系统的动力学方程, 应用Galerkin方法对偏微分方程进行离散处理, 结合谐波平衡法与伪弧长算法得到系统的稳态响应, 最后采用Runge-Kutta方法进行数值验证。通过对比有无边界惯容减振器的弹性支撑输流管路的稳态响应和传递率, 展示了边界惯容减振器的减振效果。此外本文还讨论了边界惯容减振器各项参数变化对管路系统稳态响应和传递率的影响。

关键词

惯性边界, 惯容减振器, 输流管路, 减振, 谐波平衡法

Vibration Reduction of Elastic Support Flow Pipelines Using Boundary Inertia Capacitance Dampers

Tiancheng Jin*, Zhen Zhang#

College of Aerospace Engineering, Shenyang Aerospace University, Shenyang Liaoning

Received: May 1, 2026; accepted: June 1, 2026; published: June 9, 2026

Abstract

This paper investigates the vibration reduction of boundary inertia capacitance dampers on the transverse vibration of conveyance pipelines. Based on the generalized Hamilton principle, the dynamic equations of an elastic supported conveyance pipeline system with boundary inertia capacitance dampers are established. The Galerkin method is applied to discretize the partial differential equations, and the system's steady state response is obtained by combining the harmonic balance

*第一作者。

#通讯作者。

method with the pseudo arc length algorithm. Finally, numerical verification is carried out using the Runge-Kutta method. By comparing the steady state response and transmissibility of elastic-supported pipelines with and without boundary inertia capacitance dampers, the vibration reduction effect of boundary inertia capacitance dampers is demonstrated. In addition, this paper also discusses the impact of variations in various parameters of the boundary inertia capacitance dampers on the steady-state response and transmissibility of the pipeline system.

Keywords

Inertial Boundary, Inertia Capacitance Dampers, Flow Pipelines, Vibration Reduction, Harmonic Balance Method

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

管路是流体输送和能量传递的核心结构,其广泛应用于石油化工[1]、核工业[2]、航空航天[3]、海洋工程[4]等重要工程领域。在实际工作环境中,管路经常受到流体脉动[5]、振动传递[6]以及外部环境载荷等多种因素的影响,从而产生振动问题。振动不仅会破坏管路的结构,降低输送系统的运行稳定性,而且还可能引发泄露、爆炸等安全事故。所以为了尽可能减少这些问题的存在,对结构进行有效的振动抑制是很重要的。因此,开展连续体管路结构的振动抑制研究是保障工程中安全稳定运行的关键,对完善相关理论和指导实际工程应用具有重要的意义。

随着时代的不断进步,为了面对振动给人们生产生活所带来的影响,人们对于减振的研究也逐渐深入,越来越多的减振装置也随之出现。惯容器作为一种新型的减振装置具有重量轻、体积小、高惯性比的特点,如今被越来越多的人广泛应用。如 Tong 等人设计出一种惯性弹性边界的单稳态非线性隔振器,分析其动态非线性特征,展示了其很好的隔振性能[7]。Wang 等人提出一种具有多方向惯性特征的多向隔振器[8]。Shi 等人以菱形连锁机构配置惯性元件的方式设计出一种非线性隔振器[9]。Huang 等人提出一种具有螺旋结构的惯性隔振器[10]。

作为流固耦合机械中的典型代表,输流管路的振动问题也吸引着大量学者进行研究。其中 Zhou 等人设计了一种不同于传统两端支撑的输流管路系统,研究悬臂式输流管路的非线性振动特性[11]。Ye 等人探究初始曲率对输送超临界流体管路的动态特征影响[12]。Wei 等人在输流管路边界两端加入非线性弹簧探究其对系统动态响应的显著差异[13]。Ding 等人设计了一种由三根弹簧组成的以准零刚度系统作为隔振器的非线性连续体系统,探究输流管路的非线性振动特征以及系统的隔振性能[14]。Philip 等人将非线性阻尼应用于非线性能量汇中,实现对输流管路振动的被动控制[15]。

本文将惯容减振器引入到弹性支撑输流管路的边界处,构建出一种具有惯性和粘弹性边界的输流管路系统。采用广义哈密顿原理建立输流管路及惯容减振器的横向振动控制方程和边界控制方程。根据线性派生系统动力学方程和分离变量法求解模态振型和固有频率。结合 Galerkin 截断法、谐波平衡法和伪弧长算法求解了输流管路的横向振动稳态响应。通过对比研究展示了边界惯性减振器的减振性能,并探讨了边界惯容减振器惯性和阻尼参数对输流管路的稳态幅频响应、系统传递率的影响。这项研究将促进和拓宽惯容器在实际工程中的应用,并为输流管路的横向振动减振提供一种新的方法。

2. 数学模型

本文研究弹性支撑输流管路横向振动的惯性边界减振, 其力学模型如图 1 所示, 管路受到外部均布载荷激励的作用, 即 $F(X, T) = F_0 \cos(\Omega T)$, 其中 F_0 和 Ω 分别为激励的幅值和激励频率。管路长度为 L , 横截面积为 A_p , 单位长度密度为 ρ_p , 外径为 D , 内径为 d 的欧拉伯努利管。管路内流体被视为不可压缩流体, 其以速度 v 流动, 横截面积为 A_f , 单位长度密度为 ρ_f 。对于输流管路的边界具有在垂直方向上自由振动, 且转角为零的特点。输流管路的横向振动位移为 $W(X, T)$; K_L 和 K_R 为边界左右两端垂直限制的弹簧的刚度系数; C_L 和 C_R 为边界阻尼的阻尼系数; C_{BL} 和 C_{BR} 为两端惯容器阻尼的阻尼系数; B_L 和 B_R 为两端惯容器的惯容系数。

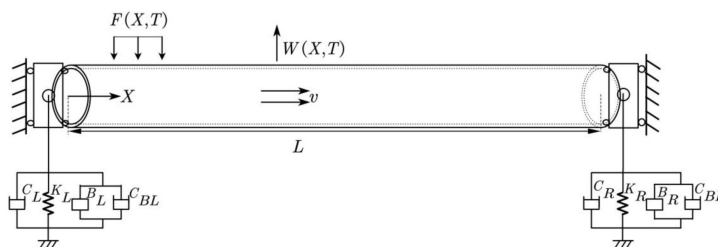


Figure 1. Mechanical model of the elastic support pipeline system coupled with boundary inertial dampers
图 1. 边界耦合惯容减振器的弹性支撑输流管路系统的力学模型

应用广义 Hamilton 原理、变分法以及泰勒级数展开推导系统的非线性偏微分控制方程为

$$\begin{aligned}
 & (\rho_p A_p + \rho_f A_f) W_{TT} + (\rho_f A_f v^2 - A_f P + U W_{XT}^2) W_{XX} + 2\rho_f A_f v W_{XT} \\
 & + EI W_{XXXX} + \mu I W_{XXXXT} + F_0(X, T) d_X + (C_L + C_{BL}) W_{LT} \delta(X) \\
 & + (C_R + C_{BR}) W_{RT} \delta(X - L) = 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

其中 E 和 I 分别为管路的杨氏模量和截面惯性矩, P 为管路中流体产生的压力, U 为流固耦合特征参数, μ 为粘性系数。

边界条件为

$$\begin{aligned}
 EI W_{LX} &= 0 \\
 EI W_{RX} &= 0 \\
 (\rho_f A_f v^2 - A_f P) W_{LX} + EI W_{LXXX} + K_L W_L + B_L W_{LTT} &= 0 \\
 (\rho_f A_f v^2 - A_f P) W_{RX} + EI W_{RXXX} - K_R W_R - B_R W_{RTT} &= 0
 \end{aligned} \tag{2}$$

对方程(1) (2)进行无量纲化处理引用无量纲变量和参数, 得到控制方程为

$$\begin{aligned}
 w_{tt} + (\gamma^2 - \kappa + \kappa_1 w_{xt}^2) w_{xx} + 2\gamma \varepsilon w_{xt} + w_{xxxx} + \eta w_{xxxxt} + f_0 \cos(\omega \cdot t) dx \\
 + \varsigma_L w_{L't} \delta(x) + \varsigma_R w_{R't} \delta(x - L) = 0
 \end{aligned} \tag{3}$$

无量纲边界为

$$\begin{aligned}
 w_{L'x} &= 0, w_{R'x} = 0, \\
 (\gamma^2 - \kappa) w_{L'x} + w_{L'xxx} + \kappa_L w_L + \theta_L \frac{1}{\sigma^2} w_{L't} &= 0, \\
 (\gamma^2 - \kappa) w_{L'x} + w_{R'xxx} - \kappa_R w_L - \theta_R \frac{1}{\sigma^2} w_{R't} &= 0
 \end{aligned} \tag{4}$$

式中

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{W}{L}, x = \frac{X}{L}, t = \frac{T}{T_0}, T_0 = L^2 \sqrt{\frac{\rho_p A_p + \rho_f A_f}{EI}}, \gamma = \nu L \sqrt{\frac{\rho_f A_f}{EI}}, \eta = \frac{\mu}{EIT_0}, \\
 \varepsilon &= \sqrt{\frac{\rho_f A_f}{\rho_p A_p + \rho_f A_f}}, f_0 = \frac{L^3}{EI} F_0, \omega = \Omega^2 \sqrt{\frac{\rho_p A_p + \rho_f A_f}{EI}}, \sigma = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{I}{A}}, \\
 \theta_L &= \frac{B_L}{(\rho_p A_p + \rho_f A_f)L}, \theta_R = \frac{B_R}{(\rho_p A_p + \rho_f A_f)L}, \kappa = \frac{PA_f L^2}{EI}, \kappa_1 = \frac{UL^4}{EI}, \\
 \kappa_L &= K_L \frac{L^3}{EI}, \kappa_R = K_R \frac{L^3}{EI}, \varsigma_L = \frac{(C_L + C_{BL})T_0}{\rho_p A_p L}, \varsigma_R = \frac{(C_R + C_{BR})T_0}{\rho_p A_p L}
 \end{aligned} \tag{5}$$

3. 固有频率和模态函数

通过忽略方程(4)和(5)中流体流动、阻尼器、流固耦合非线性项以及外部激励项, 可以得到静止管路简化的系统动力学方程及其边界条件如下

$$(\rho_p A_p + \rho_f A_f)W_{TT} + EIW_{xxxx} = 0 \tag{6}$$

$$EIW_{LX} = 0$$

$$EIW_{RX} = 0$$

$$EIW_{Lxxx} + K_L W_L + B_L W_{LTT} = 0 \tag{7}$$

$$EIW_{Rxxx} - K_R W_R - B_R W_{RTT} = 0$$

假设管路横向自由振动位移解的形式为

$$W(X, T) = \Psi(X)Q(T) \tag{8}$$

式中 $\Psi(X)$ 和 $Q(T)$ 分别为管路的模态函数及其相应的广义坐标。

模态函数可以写成如下形式

$$\Psi(X) = C_1 \cos \beta X + C_2 \sin \beta X + C_3 \operatorname{ch} \beta X + C_4 \operatorname{sh} \beta X \tag{9}$$

式中待定系数 $C_j (j=1, 2, 3, 4)$ 和特征值 β 可通过管路的边界条件求得。特征值 β 与固有频率 Ω 存在如下关系式

$$\beta^4 = \frac{\rho_p A_p + \rho_f A_f}{EI} \Omega^2 \tag{10}$$

由方程(10)可得

$$\Omega^2 = \frac{EI\beta^4}{\rho_p A_p + \rho_f A_f} \tag{11}$$

其中 $(\rho_p A_p + \rho_f A_f)L$ 为管和不可压缩流体的质量之和, 因此有

$$\begin{aligned}
 B_L \Omega^2 &= B_L \frac{EI\beta^4}{\rho_p A_p + \rho_f A_f} \frac{L}{L} = \frac{B_L}{(\rho_p A_p + \rho_f A_f)L} EIL\beta^4 = \Upsilon_L EIL\beta^4, \\
 B_R \Omega^2 &= B_R \frac{EI\beta^4}{\rho_p A_p + \rho_f A_f} \frac{L}{L} = \frac{B_R}{(\rho_p A_p + \rho_f A_f)L} EIL\beta^4 = \Upsilon_R EIL\beta^4
 \end{aligned} \tag{12}$$

式中, $\Upsilon_L = \frac{B_L}{(\rho_p A_p + \rho_f A_f)L}$, $\Upsilon_R = \frac{B_R}{(\rho_p A_p + \rho_f A_f)L}$, 其中 Υ_L, Υ_R 分别为左边界和右边界惯容器惯性质量

与管加流体惯性质量和之比。

边界条件(7)整理为

$$\begin{aligned}\Psi'(0) &= 0, \Psi'(L) = 0, \\ EI\Psi'''(0) + (K_L - B_L\Omega^2)\Psi(0) &= 0, \\ EI\Psi'''(L) - (K_R - B_R\Omega^2)\Psi(L) &= 0\end{aligned}\quad (13)$$

将式(9)带入边界条件(13)中, 整理得

$$\begin{aligned}C_2\beta + \beta C_4 &= 0, \\ -C_1\beta \sin \beta L + \beta C_2 \cos \beta L + \beta C_3 \operatorname{sh} \beta L + \beta C_4 \operatorname{ch} \beta L &= 0, \\ EI(-\beta^3 C_2 + \beta^3 C_4) + (K_L - \Upsilon_L EI L \beta^4)(C_1 + C_3) &= 0, \\ EI(C_1\beta^3 \sin \beta L - \beta^3 C_2 \cos \beta L + \beta^3 C_3 \operatorname{sh} \beta L + \beta^3 C_4 \operatorname{ch} \beta L) \\ - (K_R - \Upsilon_R EI L \beta^4)(C_1 \cos \beta L + C_2 \sin \beta L + C_3 \operatorname{ch} \beta L + C_4 \operatorname{sh} \beta L) &= 0\end{aligned}\quad (14)$$

由(14)整理可得

$$\begin{aligned}C_2 &= -C_4, \\ C_1 &= \frac{(K_L - \Upsilon_L EI L \beta^4) \cos \beta L - (K_L - \Upsilon_L EI L \beta^4) \operatorname{ch} \beta L + 2EI\beta^3 \operatorname{sh} \beta L}{(K_L - \Upsilon_L EI L \beta^4)(\sin \beta L + \operatorname{sh} \beta L)} C_2, \\ C_3 &= \frac{(K_L - \Upsilon_L EI L \beta^4) \operatorname{ch} \beta L - (K_L - \Upsilon_L EI L \beta^4) \cos \beta L + 2EI\beta^3 \sin \beta L}{(K_L - \Upsilon_L EI L \beta^4)(\sin \beta L + \operatorname{sh} \beta L)} C_2\end{aligned}\quad (15)$$

式中 C_2 为非零常数。

将方程(15)整理为矩阵形式表达可得

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \Gamma_L & -EI\beta^3 & \Gamma_L & EI\beta^3 \\ -s_{\text{in}} & c_{\text{os}} & s_{\text{h}} & c_{\text{h}} \\ EI\beta^3 s_{\text{in}} - \Gamma_R c_{\text{os}} & -EI\beta^3 c_{\text{os}} - \Gamma_R s_{\text{in}} & EI\beta^3 s_{\text{h}} - \Gamma_R c_{\text{h}} & EI\beta^3 c_{\text{h}} - \Gamma_R s_{\text{h}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = 0\quad (16)$$

式中

$$\begin{aligned}c_{\text{os}} &= \cos \beta L, s_{\text{in}} = \sin \beta L, c_{\text{h}} = \operatorname{ch} \beta L, s_{\text{h}} = \operatorname{sh} \beta L, \\ \Gamma_L &= K_L - \Upsilon_L EI L \beta^4, \Gamma_R = K_R - \Upsilon_R EI L \beta^4\end{aligned}\quad (17)$$

Table 1. Physical and geometric parameters of tubes and fluids

表 1. 管及流体的物理和几何参数

名称	符号	值
杨氏模量	E	72 GPa
管路密度	ρ_p	2,700 kg/m ³
流体密度	ρ_f	1,000 kg/m ³
管路横截面积	A_p	$1.131 \times 10^{-4} \text{ m}^4$
流体横截面积	A_f	$2.011 \times 10^{-4} \text{ m}^4$

续表

管路粘性阻尼	μ	$1 \times 10^7 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$
截面惯性矩	I	$4.637 \times 10^{-9} \text{ m}^4$
流体压力	P	$-1 \times 10^6 \text{ N}$
左端垂向弹簧刚度	K_L	46,025.2 N/m
右端垂向弹簧刚度	K_R	46,025.2 N/m
左端惯容器惯性	B_L	0.56 kg
右端惯容器惯性	B_R	0.56 kg
左端阻尼	C_L	0.4 N·s/m
右端阻尼	C_R	0.4 N·s/m
左端惯容器阻尼	C_{BL}	5 N·s/m
右端惯容器阻尼	C_{BR}	5 N·s/m

输流管路的材料选为铝合金材料, 其物理参数和几何参数如表 1 所示。管路的两端考虑为对称边界条件, 其中管路中流体流速 $v = 20 \text{ m/s}$, 垂直弹簧刚度为 $K_L = K_R = 46,025.2 \text{ N/m}$, 阻尼为 $C_L = C_R = 0.1 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$, 惯容器阻尼为 $C_{BL} = C_{BR} = 0.4 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$, 惯容器惯性为 $B_L = B_R = 0.56 \text{ kg}$ 。基于给定的系统参数, 求得模态函数特征值为 $\beta_1 = 2.758337952$ 、 $\beta_2 = 2.969477008$ 、 $\beta_3 = 4.946207899$ 、 $\beta_4 = 7.983191822$ 。对应输流管路的前四阶固有频率分别为 $f_1 = 33.00943224 \text{ Hz}$ 、 $f_2 = 38.22375501 \text{ Hz}$ 、 $f_3 = 104.6828417 \text{ Hz}$ 、 $f_4 = 268.9819916 \text{ Hz}$ 。输流管路的前四阶模态函数如式(18)所示

$$\begin{aligned}
 \Psi_1(x) &= 0.19 \cos(2.76x) + \sin(2.76x) + 1.14 \cosh(2.76x) - \sinh(2.76x), \\
 \Psi_2(x) &= -11.59 \cos(2.97x) + \sin(2.97x) + 0.90 \cosh(2.97x) - \sinh(2.97x), \\
 \Psi_3(x) &= -1.27 \cos(4.95x) + \sin(4.95x) + 1.01 \cosh(4.95x) - \sinh(4.95x), \\
 \Psi_4(x) &= -1.14 \cos(7.98x) + \sin(7.98x) + 1.00 \cosh(7.98x) - \sinh(7.98x)
 \end{aligned} \tag{18}$$

本文还对 $v = 0 \text{ m/s}$ 、 20 m/s 以及 30 m/s 时管路系统的前四阶固有频率进行比较, 对比结果列于表 2 中所示。由此可得, 流速对固有频率的影响较小, 后续不单独考虑流速对固有频率的影响。

Table 2. The first four natural frequencies of the pipeline system under different flow velocities
表 2. 不同流速下管路系统前四阶固有频率

流速/(m/s)	第一阶/(Hz)	第二阶/(Hz)	第三阶/(Hz)	第四阶/(Hz)
0	30.93412524	36.18975785	99.73237840	261.1905248
20	33.00943224	38.22375501	104.6828417	268.9819916
30	34.35922753	39.71027905	107.4310333	273.6534478

4. 幅频响应

4.1. Galerkin 截断方程及其收敛性判断

为应用 Galerkin 方法得到简化的模态函数 $\Psi(x)$, 将无量纲位移假定为式(18)如下

$$\begin{cases} w(x,t) = \Psi(x)q(t), \\ \Psi(x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x + C_3 \operatorname{ch} \beta x + C_4 \operatorname{sh} \beta x \end{cases} \quad (19)$$

得到简化模态函数后将偏微分控制方程(3)截断为常微分方程。然后利用四阶 Runge-Kutta 方法求解管路系统的时间历程。假设控制方程(3)中横向振动位移的近似解为

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^N \Psi_n(x)q_n(t) \quad (20)$$

式中, N 为大于等于 1 的整数, $\Psi_n(x)$ 为管路的模态函数, $q_n(t)$ 为管路横向振动的广义位移。Galerkin 方法的势函数和权函数都选择为管路的模态函数如式(18)所示。偏微分方程(3)经 Galerkin 截断处理后得

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \sum_{n=1}^N \Psi_n(x) \ddot{q}_n(t) \psi_m(x) dx + 2\gamma \varepsilon \int_0^1 \sum_{n=1}^N \dot{\Psi}_n(x) \dot{q}_n(t) \psi_m(x) dx \\ & + \left(\gamma^2 - \kappa - \kappa_1 \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^N \dot{\Psi}_n(x) q_n(t) \right)^2 \psi_m(x) dx \right) \int_0^1 \sum_{n=1}^N \ddot{\Psi}_n(x) q_n(t) \psi_m(x) dx \\ & + \eta \int_0^1 \sum_{n=1}^N \Psi_n^{(4)}(x) \dot{q}_n(t) \psi_m(x) dx + \int_0^1 \sum_{n=1}^N \Psi_n^{(4)}(x) q_n(t) \psi_m(x) dx \\ & + \int_0^1 f_0 \cos(\omega \cdot t) \psi_m(x) dx = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

式中 $m=1, 2, \dots, N$ 。

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \Psi_n(x) \psi_m(x) dx = 0, n \neq m, \int_0^1 \Psi_n^{(4)}(x) \psi_m(x) dx = 0, n \neq m, \\ & \int_0^1 \dot{\Psi}_n(x) \psi_m(x) dx = 0, n \neq m, \int_0^1 \ddot{\Psi}_n(x) \psi_m(x) dx = 0, n \neq m \end{aligned} \quad (22)$$

方程(21)可以简化为

$$\begin{aligned} & Q_m \ddot{q}_n(t) + 2\gamma \varepsilon T_m \dot{q}_n(t) + \eta Z_m \dot{q}_n(t) + \left(\gamma^2 - \kappa + \kappa_1 R_m (q_n(t))^2 \right) Y_m q_n(t) + Z_m q_n(t) \\ & + F_m f_0 \cos(\omega \cdot t) = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

式中

$$\begin{aligned} Q_m &= \int_0^1 \Psi_m(x) \psi_m(x) dx, Z_m = \int_0^1 \Psi_m^{(4)}(x) \psi_m(x) dx, \\ R_m &= \int_0^1 (\dot{\Psi}_m(x))^2 \psi_m(x) dx, F_m = \int_0^1 \psi_m(x) dx, \\ Y_m &= \int_0^1 \ddot{\Psi}_m(x) \psi_m(x) dx, T_m = \int_0^1 \dot{\Psi}_m(x) \psi_m(x) dx \end{aligned} \quad (24)$$

采用 Runge-Kutta 数值方法求解截断后的常微分方程组, 初始条件设置如下

$$q_1 = 0.01, \dot{q}_1 = 0, q_j = 0, \dot{q}_j = 0, j = 2, \dots, N \quad (25)$$

将式(25)初始值设为 0.01, 外部激励均布载荷设为 $F_0 = 40$ N。图 2 展示了不同 Galerkin 截断阶次下受迫振动稳态响应曲线。在图 2 中, 对比管路左端和中点的稳态响应幅值, 管路中点的响应幅值要明显高于左端。通过对比 2 阶、4 阶及 6 阶 Galerkin 截断结果可以发现, 4 阶与 6 阶截断的计算结果能够高度重合, 而 2 阶 Galerkin 截断结果则存在一定差异。综合来看, 使用 4 阶 Galerkin 截断可以更好地体现管路系统稳态响应的收敛性要求。因此本文在接下来的计算中, 均采用 4 阶 Galerkin 截断, 并讨论一阶共振峰的影响结果。

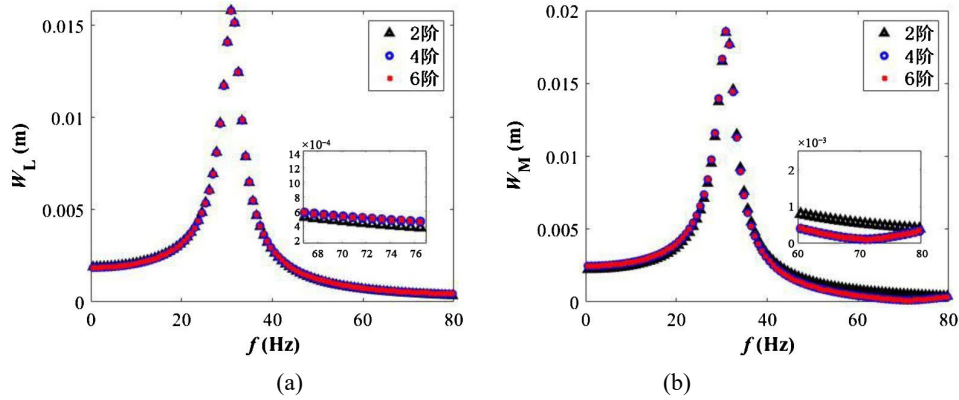


Figure 2. Convergence of Galerkin truncation order: (a) Left endpoint of the pipeline; (b) Midpoint of the pipeline
图 2. Galerkin 截断阶数的收敛性: (a) 管左端点; (b) 管中点

4.2. 谐波平衡方法求解及其数值验证

采用谐波平衡法对管路 Galerkin 截断处理后得到的常微分控制方程进行近似解析求解。假设常微分方程的解为

$$\begin{aligned}
 q_1 &= a_{1,1} \sin(\omega t) + b_{1,1} \cos(\omega t) + a_{1,3} \sin(3\omega t) + b_{1,3} \cos(3\omega t) \\
 q_2 &= a_{2,1} \sin(\omega t) + b_{2,1} \cos(\omega t) + a_{2,3} \sin(3\omega t) + b_{2,3} \cos(3\omega t) \\
 q_3 &= a_{3,1} \sin(\omega t) + b_{3,1} \cos(\omega t) + a_{3,3} \sin(3\omega t) + b_{3,3} \cos(3\omega t) \\
 q_4 &= a_{4,1} \sin(\omega t) + b_{4,1} \cos(\omega t) + a_{4,3} \sin(3\omega t) + b_{4,3} \cos(3\omega t)
 \end{aligned} \tag{26}$$

以一阶 Galerkin 截断方程和一阶谐波假设解为例给出谐波平衡法的推导过程。取一阶 Galerkin 截断时，管路系统的控制方程为

$$\begin{aligned}
 Q_1 \ddot{q}_1 + 2\gamma \varepsilon T_1 \dot{q}_1 + \eta Z_1 \dot{q}_1 + (\gamma^2 - \kappa + \kappa_1 R_1 q_1^2) Y_1 q_1 + Z_1 q_1 + F_1 f_0 \cos(\omega t) \\
 + \zeta_L \Psi_{L,1} \dot{q}_1 \psi_{L,1} + \zeta_R \Psi_{R,1} \dot{q}_1 \psi_{R,1} = 0
 \end{aligned} \tag{27}$$

式中

$$\Psi_{L,1} = \Psi_1(0), \psi_{L,1} = \psi_1(0), \Psi_{R,1} = \Psi_1(1), \psi_{R,1} = \psi_1(1) \tag{28}$$

一阶谐波假设解为

$$q_1 = a_{1,1} \sin(\omega t) + b_{1,1} \cos(\omega t) \tag{29}$$

将式(29)带入到方程(27)中整理各阶谐波对应系数得到代入方程

$$\begin{aligned}
 -\omega^2 a_{1,1} Q_1 + \gamma^2 a_{1,1} Y_1 - a_{1,1} \kappa Y_1 + \frac{3}{4} a_{1,1}^3 R_1 Y_1 \kappa_1 + \omega b_{1,1} \eta Z_1 + \omega b_{1,1} \zeta_L \psi_{L,1}^2 \\
 + \omega b_{1,1} \zeta_R \psi_{R,1}^2 + a_{1,1} Z_1 + \frac{3}{4} a_{1,1} b_{1,1}^2 R_1 Y_1 \kappa_1 + 2\gamma \omega b_{1,1} \varepsilon Q_1 = 0, \\
 -\omega^2 b_{1,1} Q_1 + \gamma^2 b_{1,1} Y_1 - b_{1,1} \kappa Y_1 + \frac{3}{4} b_{1,1}^3 R_1 Y_1 \kappa_1 - \omega a_{1,1} \eta Z_1 - \omega a_{1,1} \zeta_L \psi_{L,1}^2 \\
 - \omega a_{1,1} \zeta_R \psi_{R,1}^2 + b_{1,1} Z_1 + \frac{3}{4} b_{1,1} a_{1,1}^2 R_1 Y_1 \kappa_1 - 2\gamma \omega a_{1,1} \varepsilon Q_1 = 0,
 \end{aligned} \tag{30}$$

采用伪弧长算法对方程(30)求解，得到系统的稳态响应曲线。前一节已讨论过，采用 Galerkin 第四阶截断以保证结果的可靠性和准确性，将四阶 Runge-kutta 算法获得的管路系统的正反扫幅频响应曲线与四

阶 Galerkin 截断的结果进行分析对比如图 3 可以看出, 数值解与解析解高度重合, 从而证明谐波平衡解析解的正确性。

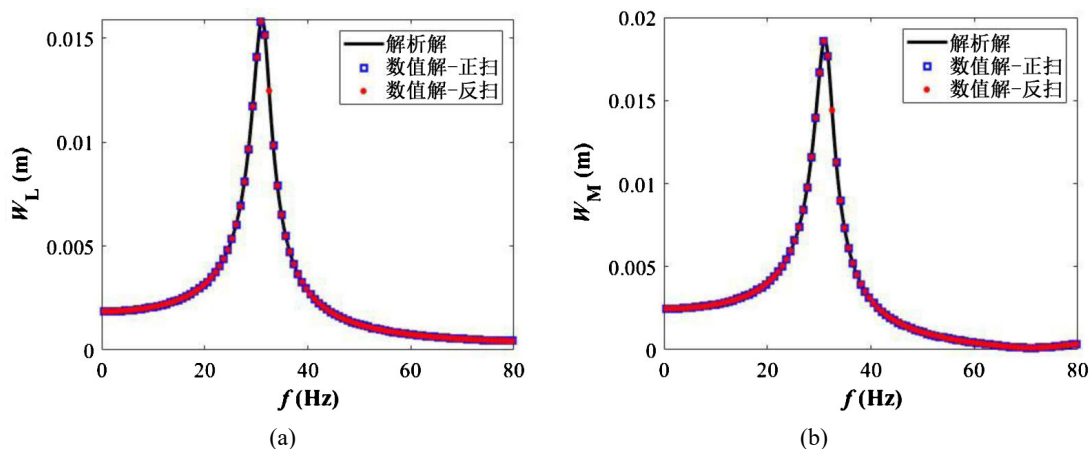


Figure 3. Comparison of analytical solution using harmonic balance method and numerical solution using Runge-Kutta method: (a) Left endpoint of the pipeline; (b) Midpoint of the pipeline

图 3. 谐波平衡方法解析解与 Runge-Kutta 方法数值解比较: (a) 管左端点; (b) 管中点

4.3. 惯性和粘弹性边界输流管路传递率的定义

在管路系统的振动响应达到稳态后, 为了进一步分析振动通过两端支撑结构向下方基础传递的规律, 需要对支撑位置的振动传递特性进行量化描述。基于此, 本文将管路系统两端弹性支撑处的传递率定义为

$$F_p(t) = \begin{cases} -\left[K_L w(0,t) + K_R w(1,t) \right] - \left[B_L \frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial t^2} + B_R \frac{\partial^2 w(1,t)}{\partial t^2} \right] \\ - \left[(C_L + C_{BL}) \frac{\partial w(0,t)}{\partial t} + (C_R + C_{BR}) \frac{\partial w(1,t)}{\partial t} \right], \text{ if } w(0,t) < 0, w(1,t) < 0, \\ -K_L w(0,t) - B_L \frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial t^2} - (C_L + C_{BL}) \frac{\partial w(0,t)}{\partial t}, \text{ if } w(1,t) > 0, \\ -K_R w(1,t) - B_R \frac{\partial^2 w(1,t)}{\partial t^2} - (C_R + C_{BR}) \frac{\partial w(1,t)}{\partial t}, \text{ if } w(0,t) > 0 \end{cases} \quad (31)$$

将管路系统的传递率定义为

$$T_F = 20 \log \left\{ \max \left[\frac{F_p(t)}{F_0 L} \right] \right\} \quad (32)$$

4.4. 惯性和粘弹性边界输流管路横向振动减振效果分析

以最大幅值频率减小百分比 R_Ω 作为惯容系统稳态响应的隔振减振性能评价指标, 其核心反映系统经隔振减振设计后, 稳态响应中最大幅值对应的频率相较于未控状态的衰减程度。

$$R_\Omega = \frac{\Omega_u - \Omega_i}{\Omega_u} \cdot 100\% \quad (33)$$

其中 Ω_u 为未控系统输流管路共振峰值对应的频率值, Ω_i 为惯容系统输流管路对应的频率值。

惯容系统的减振效果如图 4 所示。首先, 图 4(a)、图 4(b)分别给出了惯容系统与未控系统的幅频响应对比结果: 相较于未控系统, 惯容系统管路左端的一阶共振峰固有频率降低 23.7%, 响应幅值降低 35.3%; 管路右端的一阶共振峰固有频率降低 23.9%, 响应幅值降低 43.1%, 展现出优异的减振性能。其次, 由图 4(c)的管路系统传递率曲线可知, 惯容系统的传递率峰值及对应一阶固有频率均较未控系统显著下降, 降幅分别达 46.5%和 23.4%, 进一步验证了其良好的减振效果

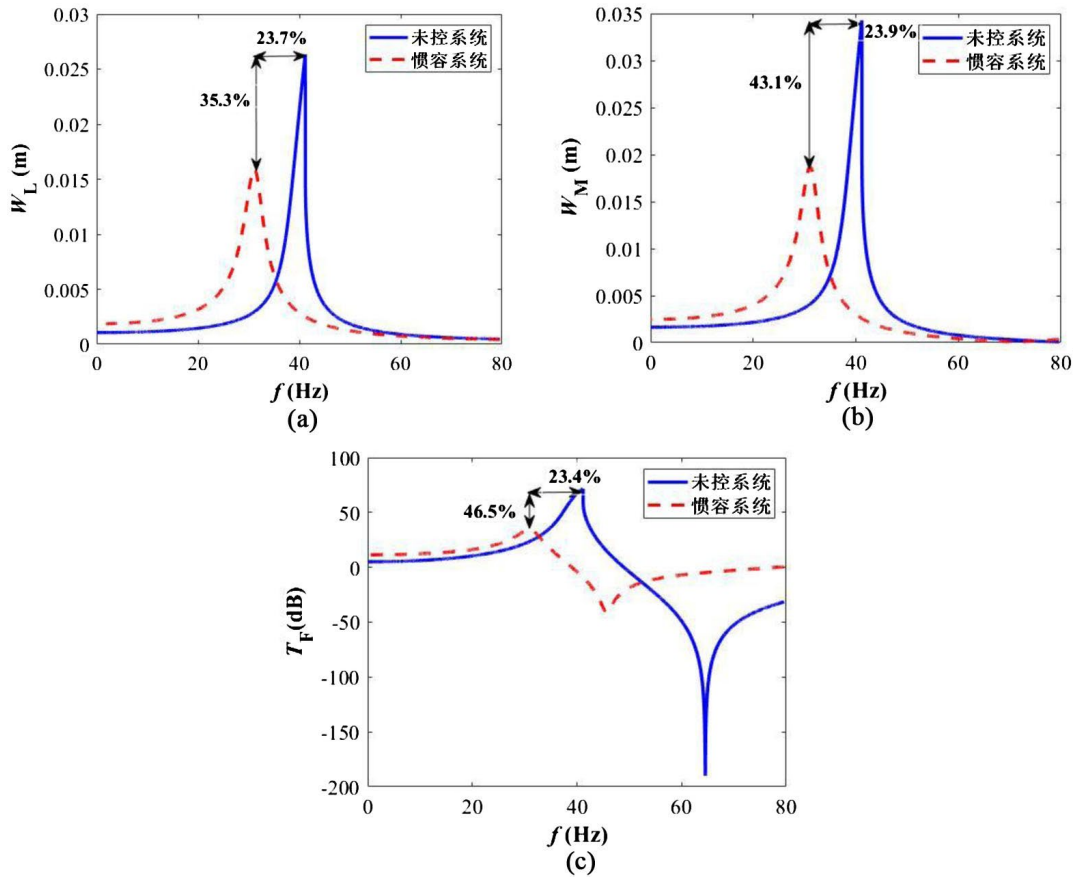


Figure 4. Vibration damping effect of boundary inertial dampers: (a) Left endpoint of the pipeline; (b) Midpoint of the pipeline; (c) Transmissibility

图 4. 边界惯容减振器的减振效果: (a) 管左端点; (b) 管中点; (c) 传递率

5. 系统参数对动态响应影响

减振器参数的选择直接影响其减振性能。接下来分析边界惯容器的惯性和惯容器阻尼参数变化对管路系统稳态响应及传递率的影响。

5.1. 惯容器惯性参数的影响

在对称边界条件下, 两边界处不同惯容器惯性参数对系统幅频响应曲线及传递率的影响如图 5 所示。随着惯容系数的增大, 边界惯容减振器对管路系统表现出显著的等效附加质量效应, 使系统一阶固有频率向低频偏移。在阻尼参数不变的条件下, 等效质量的增大导致系统阻尼比降低, 共振峰被显著放大, 因此管路左端点与中点的振动响应幅值随惯容系数的增大而升高; 而传递率的一阶共振峰虽同样向低频偏移, 但其峰值却随之减小, 呈现出与管路幅频响应相反的变化趋势。

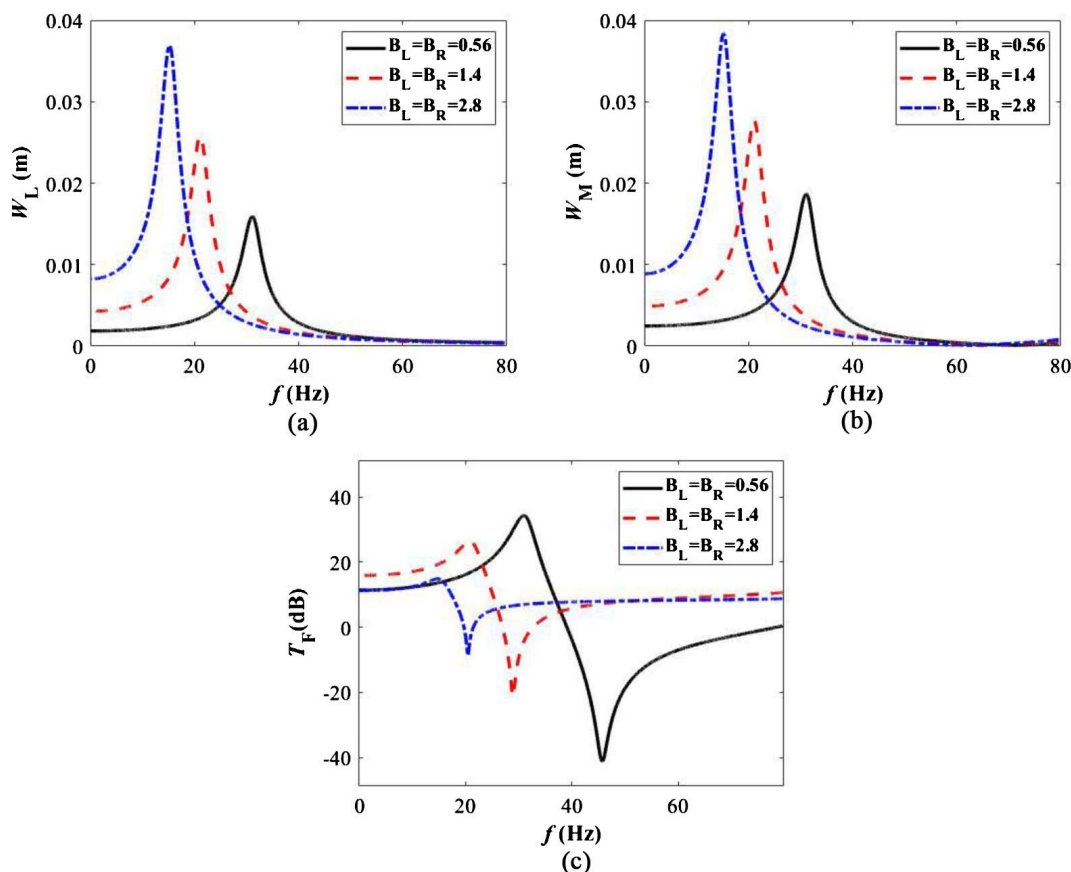
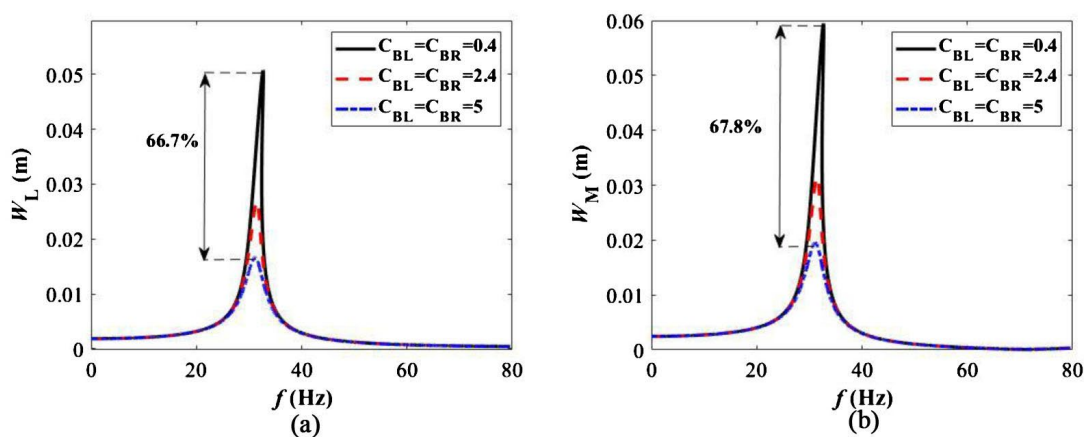


Figure 5. The effect of inerter parameters on the system's amplitude frequency response: (a) Left endpoint of the pipeline; (b) Midpoint of the pipeline; (c) Transmissibility

图 5. 惯容参数对系统幅频响应曲线的影响: (a) 管左端点; (b) 管中点, (c) 传递率

5.2. 惯容器阻尼参数的影响

在惯容参数 $B_L = B_R = 0.56 \text{ kg}$ 的对称边界条件下, 不同惯容器阻尼对系统幅频响应及传递率的影响如图 6 所示。随着惯容器阻尼的增大, 能量耗散能力增强, 系统一阶共振峰与传递率峰值均显著降低。对比阻尼最小与最大的情况, 管路左端响应峰值下降 66.7%, 中点响应峰值下降 67.8%, 传递率峰值下降 31.9%, 由此可以看出惯容器阻尼良好的减振效果。



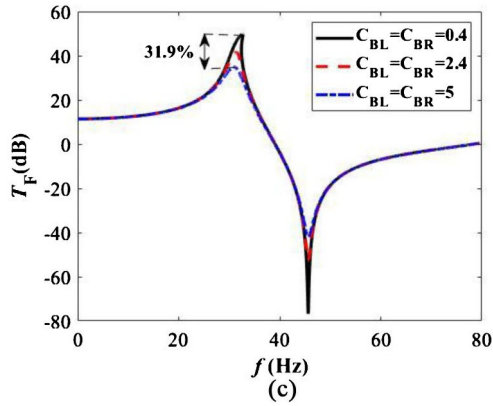


Figure 6. The effect of inerter damping on the amplitude-frequency response curve of the system when $B_L = B_R = 0.56$ kg: (a) Left endpoint of the pipeline; (b) Midpoint of the pipeline; (c) Transmissibility

图 6. $B_L = B_R = 0.56$ kg 时惯容器阻尼对系统幅频响应曲线的影响: (a) 管左端点; (b) 管中点; (c) 传递率

在惯容参数 $B_L = B_R = 1.4$ kg 的对称边界条件下, 不同惯容器阻尼对系统幅频响应及传递率的影响如图 7 所示。对比阻尼最小与最大的情况, 管路左端响应峰值下降 75.7%, 中点响应峰值下降 74.8%, 传递率峰值下降 34.3%。相较于 $B_L = B_R = 0.56$ kg 的情况, 增大惯容器阻尼对一阶共振峰与传递率峰值的抑制效果更为显著, 体现了惯容器阻尼优异的减振效果。

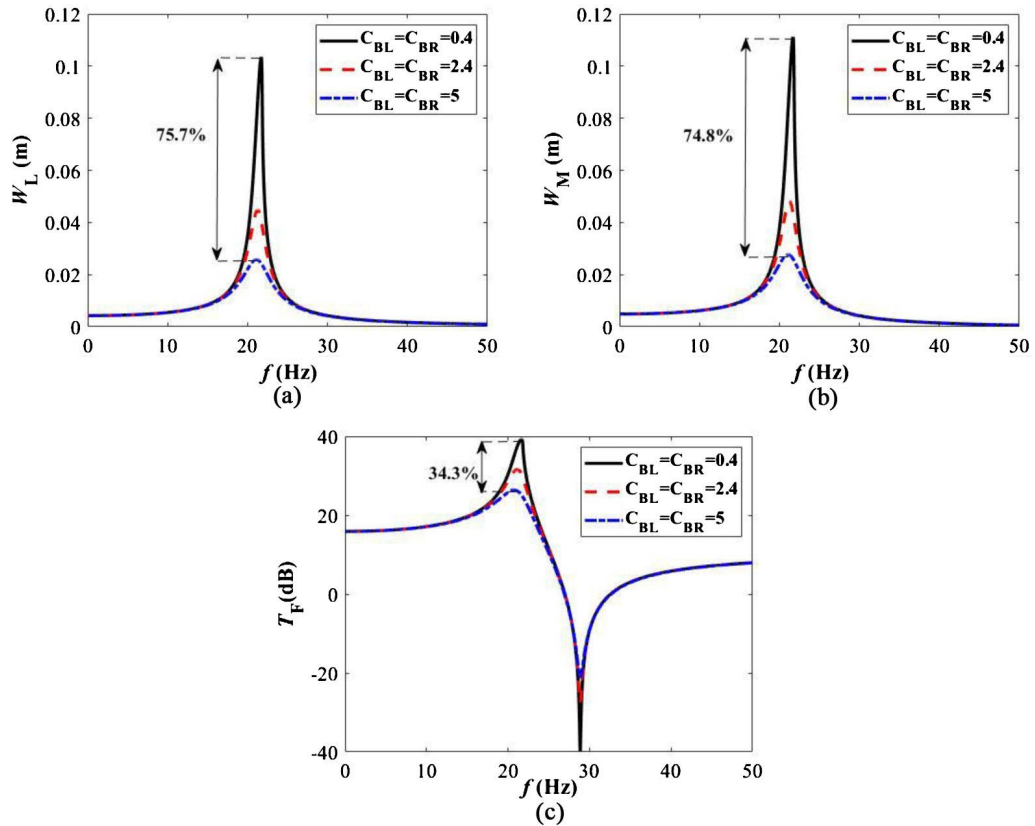


Figure 7. The effect of inerter damping on the amplitude-frequency response curve of the system when $B_L = B_R = 1.4$ kg: (a) Left endpoint of the pipeline; (b) Midpoint of the pipeline; (c) Transmissibility

图 7. $B_L = B_R = 1.4$ kg 时惯容器阻尼对系统幅频响应曲线的影响: (a) 管左端点; (b) 管中点; (c) 传递率

在惯容参数 $B_L = B_R = 2.8 \text{ kg}$ 的对称边界条件下, 不同惯容器阻尼对系统幅频响应及传递率的影响如图 8 所示。对比阻尼最小与最大的情况, 管路左端响应峰值下降 79.8%, 中点响应峰值下降 79.8%, 传递率峰值下降 36.1%。相较于 $B_L = B_R = 0.56 \text{ kg}$ 和 $B_L = B_R = 1.4 \text{ kg}$ 两种情况, 增大惯容器阻尼对一阶共振峰与传递率峰值的抑制效果最为显著, 体现了惯容器阻尼更为优异的减振效果。

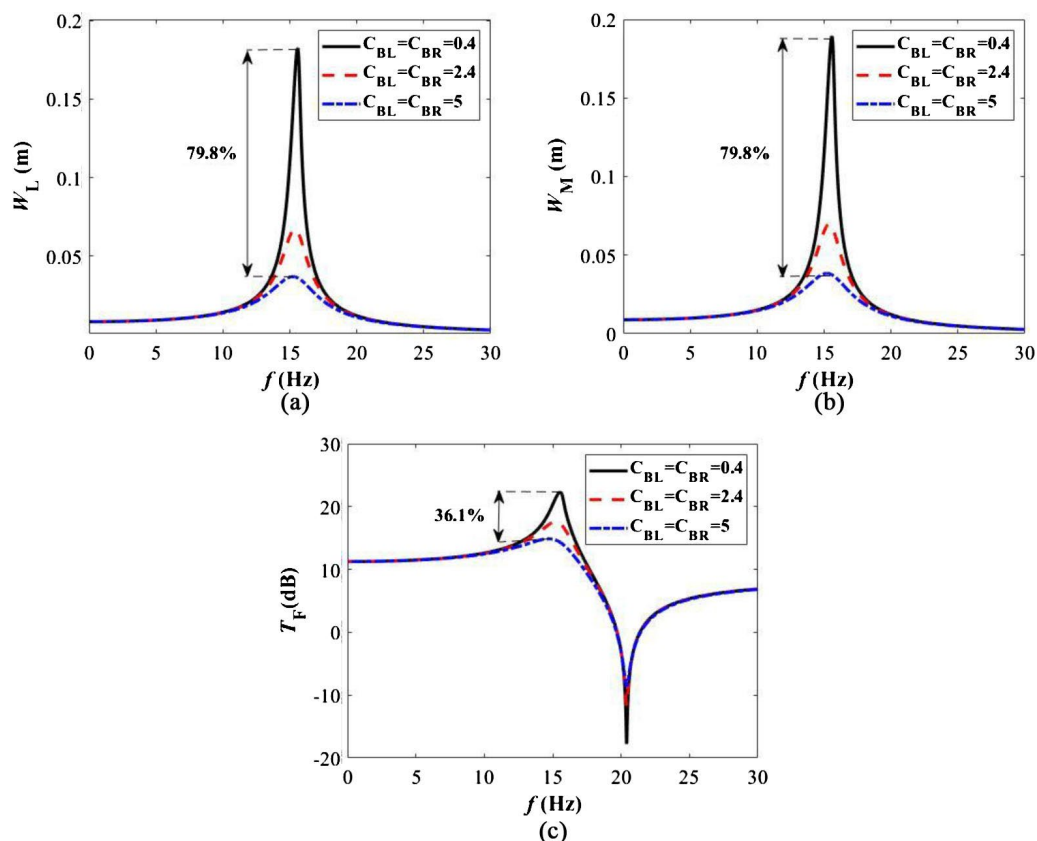


Figure 8. The effect of inerter damping on the amplitude-frequency response curve of the system when $B_L = B_R = 2.8 \text{ kg}$: (a) Left endpoint of the pipeline; (b) Midpoint of the pipeline; (c) Transmissibility

图 8. $B_L = B_R = 2.8 \text{ kg}$ 时惯容器阻尼对系统幅频响应曲线的影响: (a) 管左端点; (b) 管中点; (c) 传递率

综上所述, 惯容系数与惯容器阻尼对管路系统减振性能存在显著的耦合调控效应。惯容系数增大可通过附加质量效应使系统固有频率向低频偏移, 并有效降低传递率峰值, 但同时会降低系统阻尼比, 导致管路稳态响应幅值上升; 且随着惯容系数的增大, 惯容器阻尼对共振峰的抑制效率变高, 即大惯容系数下阻尼的减振效果更为突出。增大惯容器阻尼使能量耗散能力增强, 能够显著抑制共振峰幅值, 有效抵消惯容系数增大带来的响应放大问题。由此可见, 仅依靠单一参数无法实现最优减振目标, 通过惯容系数与惯容器阻尼参数的协同匹配, 选择大惯容系数大惯容器阻尼, 可更好的兼顾频率调控与幅值抑制, 提升边界惯容减振器对输流管路系统的综合减振性能。

6. 结论

本文探索了一种在输流管路两端加载惯容减振器进行减振的方法。将振动控制方程通过 Galerkin 截断方法进行离散化处理, 将谐波平衡法与伪弧长算法相结合得到了输流管路的稳态响应, 并采用 Runge-Kutta 方法进行数值验证。基于稳态幅频响应和传递率, 论证了边界惯容减振器的惯容和阻尼对其减振性

能的影响。得出以下具体结论:

(1) 通过与未控系统相比较, 引入边界惯容减振器后, 系统的稳态响应与传递率曲线的共振峰均明显左移, 且峰值幅值显著降低。这一结果充分验证了边界惯容减振器优异的减振效果, 其不仅可通过惯容参数调控系统固有特性、实现共振峰偏移, 更能通过惯容器阻尼的协同作用抑制振动幅值, 同时具备隔振与消振的组合减振优势。

(2) 探究了边界惯容减振器惯容参数的影响, 能够看出随着惯容参数的不断增大, 系统传递率的减振效果优异, 但稳态响应幅值变大, 减振效果略差。

(3) 探究了边界惯容减振器阻尼参数的影响, 发现随着惯容器阻尼参数的不断增大, 系统稳态响应和传递率幅值均显著降低, 在大惯容系数情况下, 阻尼的减振效率与幅值抑制效果更为突出, 展现了优异的减振效果。

参考文献

- [1] Chen, S., Tong, X., Liu, L., Li, H. and Li, X. (2024) Vibration Signal Denoising Algorithm Based on Corrosion Detection of Petroleum Volatilization Pipeline. *Optical Fiber Technology*, **87**, Article 103912. <https://doi.org/10.1016/j.yofte.2024.103912>
- [2] Veber, P., Tornberg, F., Shams, A. and Siddiqui, O.K. (2025) Computational Methods and Representative Cases for Fluid-Structure Interaction in Nuclear Reactor Vessel and Internals. *Arabian Journal for Science and Engineering*, **50**, 3591-3615. <https://doi.org/10.1007/s13369-024-09856-z>
- [3] Karthikeyan, N. and Naveen, J. (2024) Enhanced Flexural and Vibration Behavior of Interleaved CFRP Composite Joints with Modified Multiwalled Carbon Nanotube Adhesives for Aerospace and Aircraft Applications. *Polymer Composites*, **46**, 6254-6269. <https://doi.org/10.1002/pc.29357>
- [4] Bai, Y., Zhang, M., Fu, S., Xu, Y., Ren, H. and Wang, J. (2024) Experimental Investigation on Hydrodynamic Characteristics of Water Intake Riser Undergoing Vortex-Induced Vibration in Uniform Flow. *Ocean Engineering*, **305**, Article 117966. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2024.117966>
- [5] Cui, H., Li, W., Xiao, H., Wang, Y., Chen, W. and Liu, W. (2023) Study on the Influence of Fluid Pulsation on Hydraulic Impactor Performance in Drilling Engineering. *Processes*, **11**, Article 2392. <https://doi.org/10.3390/pr11082392>
- [6] Guo, X.M., Ma, H., Ge, H., et al. (2025) Vibration Transmission Characteristics Analysis of a Flexible Casing-Multiple Pipes System. *Mechanical Systems and Signal Processing*, **217**, Article 111536.
- [7] Tong, W., Wei, B., Moshrefi-Torbati, M., Zhou, X., Yurchenko, D. and Yang, K. (2024) Investigation of a Monostable Nonlinear Vibration Isolator with the Inertia-Elastic Boundary. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **132**, Article 107887. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2024.107887>
- [8] Wang, Y., Wang, P., Meng, H. and Chen, L. (2022) Nonlinear Vibration and Dynamic Performance Analysis of the Inerter-Based Multi-Directional Vibration Isolator. *Archive of Applied Mechanics*, **92**, 3597-3629. <https://doi.org/10.1007/s00419-022-02252-9>
- [9] Shi, B., Dai, W. and Yang, J. (2022) Performance Analysis of a Nonlinear Inerter-Based Vibration Isolator with Inerter Embedded in a Linkage Mechanism. *Nonlinear Dynamics*, **109**, 419-442. <https://doi.org/10.1007/s11071-022-07564-7>
- [10] Huang, J.J., Niu, M.Q. and Fan, Y. (2025) A Compliant Helical Structure to Amplify Inertia for Nonlinear Vibration Absorption. *Engineering Structures*, **322**, Article 119078.
- [11] Zhou, K., Xiong, F.R., Jiang, N.B., Dai, H.L., Yan, H., Wang, L., et al. (2019) Nonlinear Vibration Control of a Cantilevered Fluid-Conveying Pipe Using the Idea of Nonlinear Energy Sink. *Nonlinear Dynamics*, **95**, 1435-1456. <https://doi.org/10.1007/s11071-018-4637-8>
- [12] Ye, S.Q., Ding, H. and Wei, S. (2023) Nonlinear Forced Vibrations of a Slightly Curved Pipe Conveying Supercritical Fluid. *Journal of Vibration and Control*, **29**, 3634-3645. <https://doi.org/10.1177/10775463221102074>
- [13] Wei, S., Yan, X., Fan, X., Mao, X., Ding, H. and Chen, L. (2022) Vibration of Fluid-Conveying Pipe with Nonlinear Supports at Both Ends. *Applied Mathematics and Mechanics*, **43**, 845-862. <https://doi.org/10.1007/s10483-022-2857-6>
- [14] Ding, H., Ji, J. and Chen, L. (2019) Nonlinear Vibration Isolation for Fluid-Conveying Pipes Using Quasi-Zero Stiffness Characteristics. *Mechanical Systems and Signal Processing*, **121**, 675-688. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2018.11.057>
- [15] Philip, R., Santhosh, B., Balaram, B. and Awrejcewicz, J. (2023) Vibration Control in Fluid Conveying Pipes Using NES with Nonlinear Damping. *Mechanical Systems and Signal Processing*, **194**, Article 110250. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2023.110250>