

考虑缺陷影响新能源飞机低成本复合材料柱壳结构非线性动力学分析

张 远

沈阳航空航天大学航空宇航学院, 辽宁 沈阳

收稿日期: 2026年5月4日; 录用日期: 2026年6月5日; 发布日期: 2026年6月15日

摘 要

新能源飞机轻量化发展背景下,低成本制作的复合材料层合开口圆柱壳被广泛应用于机体关键承载结构,但其在实际服役过程中易产生各类预制缺陷与初始损伤,叠加高温复杂环境耦合作用,极易引发结构刚度退化、振动响应劣化等问题,严重威胁飞行器服役安全。现阶段关于复合材料壳体的研究多集中于完好结构振动分析,针对缺陷损伤、高温环境与载荷耦合作用下的非线性动力学机理研究仍存在不足,难以满足新能源飞机缺陷容限设计与振动控制的工程需求。本文以新能源飞机用低成本含缺陷复合材料层合开口圆柱壳为研究对象,综合采用理论建模、数值仿真与试验测试相结合的研究方法,开展多参数、多场耦合条件下含缺陷复合材料圆柱壳非线性动力学特性系统研究。取得成果如下:基于Love薄壳理论建立结构能量表达式,结合Rayleigh-Ritz法与拉格朗日方程推导振动控制方程,引入粘弹性缺陷本构与人工弹簧边界模型,构建含缺陷复合材料圆柱壳精细化非线性动力学理论模型;通过模态试验与有限元仿真对比,完成理论模型的有效性验证,分析缺陷尺寸、边界约束等因素对复合材料圆柱壳结构固有振动特性的影响规律。通过开展不同缺陷参数下结构振动试验,明确缺陷损伤诱发复合材料壳体动力学性能劣化的演化机制。在此基础上,建立热力耦合非线性动力学模型,探究高温与缺陷耦合作用下结构幅频响应、共振特征及非线性振动演变规律,揭示温度环境对含缺陷复合材料壳体振动行为的调控机理。研究结果阐明了约束条件、缺陷参数及高温环境对复合材料开口圆柱壳振动特性的影响机制,完善了含缺陷复合材料柱壳非线性动力学分析体系,可为新能源飞机复合材料结构缺陷容限优化设计、高温服役环境下振动抑制与安全防护提供理论参考与技术支撑。本文研究完善了低成本含缺陷复合材料层合开口圆柱壳的非线性动力学分析方法,揭示多因素耦合作用下结构振动特性的演化机制,有效弥补了现有研究模型理想化、因素单一化、材料针对性弱、机理研究浅薄等短板,可为新能源飞机复合材料壳体结构的缺陷容限设计、振动抑制优化、服役安全评估提供重要的理论支撑与技术参考。

关键词

低成本复合材料结构, 含缺陷复合材料层柱壳, 边界条件, 非线性动力学分析

Considering the Impact of Defects on the Nonlinear Dynamic Analysis of Low-Cost Composite Cylindrical Shell Structures for New Energy Aircraft

Yuan Zhang

College of Aerospace Engineering, Shenyang Aerospace University, Shenyang Liaoning

Received: May 4, 2026; accepted: June 5, 2026; published: June 15, 2026

Abstract

Against the background of lightweight development for new energy aircraft, low-cost fabricated composite laminated open cylindrical shells are widely applied to key load-bearing structures of airframes. However, various prefabricated defects and initial damages easily emerge during actual service. Coupled with the complex high-temperature environment, these imperfections inevitably lead to structural stiffness degradation, deterioration of vibration response and other adverse issues, which seriously threaten the service safety of aircraft. Current research on composite shells mainly focuses on the vibration analysis of intact structures, while investigations on the nonlinear dynamic mechanism under the coupling effect of defect damage, high-temperature environment and external loads remain insufficient. The existing research cannot meet the engineering requirements of defect tolerance design and vibration control for new energy aircraft. Taking low-cost defective composite laminated open cylindrical shells for new energy aircraft as the research object, this thesis adopts a combined method of theoretical modeling, numerical simulation and experimental testing to systematically investigate the nonlinear dynamic characteristics of defective composite cylindrical shells under multi-parameter and multi-field coupling conditions. The main research achievements are summarized as follows: Based on the Love thin shell theory, the structural energy expression is established. The vibration governing equations are derived by combining the Rayleigh-Ritz method and Lagrange equation. By introducing the viscoelastic defect constitutive model and artificial spring boundary model, a refined nonlinear dynamic theoretical model of defective composite cylindrical shells is constructed. The effectiveness of the theoretical model is verified through comparative analysis of modal tests and finite element simulations, and the influence laws of defect size, boundary constraints and other factors on the inherent vibration characteristics of composite cylindrical shells are analyzed. Structural vibration tests under different defect parameters are carried out to clarify the evolution mechanism of dynamic performance deterioration of composite shells induced by defect damage. On this basis, a thermo-mechanical coupling nonlinear dynamic model is established to explore the amplitude-frequency response, resonance characteristics and nonlinear vibration evolution law of structures under the coupled effect of high temperature and defects, and reveal the regulation mechanism of temperature on the vibration behavior of defective composite shells. The research results clarify the influence mechanism of constraint conditions, defect parameters and high-temperature environment on the vibration characteristics of composite open cylindrical shells, and improve the nonlinear dynamic analysis system for defective composite cylindrical shells. It can provide theoretical reference and technical support for the optimal design of defect tolerance, vibration suppression and safety protection of composite structures of new energy aircraft under high-temperature service environments. This study improves the nonlinear dynamic analysis method for low-cost defective composite laminated open cylindrical shells, and reveals the evolution mechanism of structural vibration characteristics under multi-

factor coupling. It effectively compensates for the deficiencies of existing research, including idealized models, single research factors, weak material pertinence and superficial mechanism analysis. The research findings offer crucial theoretical support and technical reference for defect tolerance design, vibration suppression optimization and service safety assessment of composite shell structures of new energy aircraft.

Keywords

Low-Cost Composite Structures, Composite Layered Cylindrical Shells with Defects, Boundary Conditions, Nonlinear Dynamic Analysis

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

近年来新能源电动飞机发展迅速, 为了提高航时、航程在进行结构设计时通常整机会采用复合材料来减轻飞机结构质量[1]。尤其在有关高科技功能材料、航天、航空等部门的实际工程中, 作为频繁出现基本构型里的薄板和壳体, 特别是圆柱壳体在各类工程背景中频繁出现, 且所处的工作环境总是十分复杂, 导致系统常常在多种载荷的联合作用下发生剧烈振动, 产生很大的噪声甚至引起结构零部件的疲劳破坏发生严重故障, 因此有关圆柱壳的振动特性和动力响应一直是航空航天工程等国防领域中关注的重要研究课题, 已有研究显示, 不同学者已在多个研究方向取得了显著进展。杜长城等[2] [3]基于 Donnell 薄壳理论, 以复合材料薄壁圆柱壳为对象, 建立了线性振动简化控制方程, 分析了自由振动特性, 推导出两端简支边界条件下的固有频率解析表达式。通过有限元法对比验证了薄壁圆柱壳理论的正确性, 并进一步借助 Hamilton 动力学探讨了非线性自由振动中的模态耦合与能量交换机制。宋旭圆等[4]综合运用解析建模、实验测试与有限元仿真, 系统研究了层合圆柱壳的动态力学行为及其在非线性和冲击载荷作用下的响应特征。张春雨等[5]则在任意边界条件下, 基于动刚度矩阵法建立了复杂耦合板壳结构的振动分析模型, 并对其动力学特性开展了研究, 同时系统地评估了边界条件和结构参数对振动响应的影响, 但都集中在传统的边界条件上。唐冲等[6]采用人工弹簧技术模拟圆柱壳各分段之间的连续耦合关系以及两端的边界约束条件, 系统分析了任意边界条件下圆柱壳的振动特性。在此基础上, 基于一阶剪切变形理论与 Rayleigh-Ritz 法, 推导了壳体的能量表达式, 并建立了任意边界条件下壳体的动力学微分方程, 求解计算后与前人研究对比验证其收敛性与准确性。Xinyang Zhao 等[7]将 Jacobi-Ritz 法和区域分解法集成到耦合分层理论(LWT)建立了核心理论, 解决了中厚夹层圆柱壳振动分析中的技术挑战, 推导的能量公式和矩阵保证了子域间的层间位移连续性和力学一致性。胡宸琪等[8]深入研究了开口圆柱壳的声振耦合问题, 发现了针对不同频率范围的外载荷, 科学设计铺设层数和各层的铺设角度, 可以有效抑制壳体的振动现象。8 结合以上研究结果, 笔者所构造的复合材料层压开口圆柱壳模型是以 $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ 的铺层顺序采用 T700 材料正交铺层 8 层柱壳预浸料制造。

尽管复合材料凭借优异的综合性能, 已在航空制造等诸多工程领域获得广泛应用, 然而在新能源飞机部件低成本加工成型和运输过程中都极易造成损伤缺陷, 使得复合材料圆柱壳结构出现不易察觉的变化损伤, 尤其在重要的受力载荷部位造成更加明显的影响。在实际工程中, 复合材料构件常用的成型工艺主要包括手糊成型、热压成型及挤压成型等方法[9], 其中, 采用湿法成型制备的复合材料结构, 在其铺放、固化、成型、

加工、装配及服役等过程中,极易引入裂纹、孔洞、黏连、分层等缺陷。这些缺陷通常表现出多尺度随机分布、三维几何形貌复杂、失效机理多样及诱发因素不确定等特征,对航空复合材料结构的安全性与服役寿命构成严重制约。在众多复合材料构件成型技术中,热压罐成型方法技术相对成熟、工艺体系较为完备,是目前应用较广的主要工艺之一。然而,在铺贴与热压罐成型过程中,仍易产生褶皱、分层等典型缺陷。已经有较多的学者对缺陷对构件的动力学特性影响展开了研究并得到完备的结果,针对含缺陷复合材料构件的力学行为,戎笑远等[10]采用热压罐工艺制备了含有褶皱与分层缺陷的试验件,分别对不同参数试件开展了拉伸、压缩、短梁剪切及三点弯曲试验,并结合断裂形貌观测,分析了各类缺陷对复合材料综合力学性能的影响规律及其破坏机理。在含缺陷复合材料圆柱壳的振动特性研究方面,刘亚泽等[11]探讨了具有不同初始几何缺陷的复合材料圆柱壳在多种方向载荷作用下的非线性动力学行为。魏德正等[12]以开孔薄壁圆柱壳为对象,提出了一种参数化周向区域分解法,通过解析解与有限元计算结果的对比验证了该半解析模型的有效性与合理性,进而揭示了周向均布条件下不同开孔数量、开孔尺寸及轴向位置等缺陷参数对开孔复合材料薄壁圆柱壳振动特性的影响规律。Du 等[13] [14]分别针对弹性约束与固支边界条件下的硬涂层悬臂圆柱壳,研究了其自由振动问题,建立了相应的硬涂层薄壁圆柱壳理论分析模型,并通过后续试验与数值计算结果的对比验证了模型正确性,进一步分析了硬涂层参数对圆柱壳固有频率、模态振型及共振响应的影响规律。Song 等人[15]结合 Donnell 壳体假设与弹性弹簧耦合支撑模型,采用修正正交多项式及 Rayleigh-Ritz 法,推导了氢动力飞机复合材料电池舱在湿热环境下的振动控制方程,并通过实验和有限元法验证揭示了热湿耦合机理对振动特性的影响规律。国内学者有关复合材料圆柱壳体的非线性动力学研究已经较为完备,不仅针对不同尺寸不同边界不同环境的柱壳展开研究,也有部分展开对含缺陷的复合材料柱壳非线性动力学行为分析的研究,从此可以推断此类研究具有极为重要的理论和工程应用价值。

而对于复合材料层合柱壳的非线性动力学分析方面外国学者的研究成果也十分成熟,如 Juhyok U 等[16]采用一阶剪切变形理论和变分原理建立振动模型,利用 Kirchhoff-Helmholtz 积分方程研究了复合材料层合多阶圆柱壳振动响应分析。Kim, J.等[17]采用无网格法分别对复合材料层合圆柱壳和圆锥壳的自由振动和动力响应进行了研究。Mahmure, A.等[18]利用 Galerkin 和 Grigolyuk 方法求解问题的基本方程,以确定薄壁复合材料壳结构与线性和非线性自由振动相关的频率。Ebrahimi F 等[19]基于非线性应变理论和一阶剪切变形理论,应用最小能量势原理和 Hamilton 原理推导了系统的控制方程。分析了复合材料壳体的非线性振动。Rad G H M 等[20]研究了机械冲击载荷作用下纳米复合材料圆筒的几何非线性动力学分析过程。Emad S 等[21]研究了适用于航空航天结构的复合材料耦合锥柱壳在不同边界条件下的振动特性。对于具备损伤的复合材料圆柱壳的动力学研究, Kumar D 等[22]将壳的位移采用一阶剪切变形理论描述,非线性运动方程采用虚功原理得到粘弹性变刚度层合复合材料板在简谐力作用下的非线性振动特性。Pan J W 等[23]研究了含中间层偏移的多层薄壁圆柱壳的自由振动特性。Gomes F G 等[24]研究了由制造引起的表面缺陷对复合材料圆柱结构响应中指数固壳结有频率的影响,为分析缺陷敏感复合材料结构提供了一种可扩展和有效的方法。Ganjdoost F 等[25]针对具有分层损伤的复合材料壳体的简谐振动和随机振动相关的两个数值算例,演示了基于逆有限元法的振动复合材料板壳运动特性。Alaimo 等人[26]提出了一种基于高阶分层壳模型的解析 Navier-type 解,成功获得嵌入粘弹性层的复合材料板结构的解析阻尼自由振动和频率响应解。还有其他学者对复合材料圆柱壳在湿热等恶劣环境下的振动特性展开研究, Faghanizadeh N 等[27]分析暴露在湿热环境中的复合材料圆柱壳体的非线性振动行为。Monajemi A A 等[28]研究了在热机械载荷和残余应力作用下,复合材料夹层圆柱壳的力学性能和动态响应。Van Quang D 等[29]对具有不同边界约束的复合材料圆柱壳进行了热耦合作用下的静力分析。Hasan M H 等[30]建立具有粘性阻尼和热环境效应的复合材料圆柱壳在几种边界条件下受迫振动的分析模型,获得存在阻尼冲击和受到多重边界条件的层合圆柱壳的非线性强迫振动频率响应。

综上所述,无论是国内外的相关研究,针对实际工程中复合材料层合圆柱壳可能出现的缺陷对非线性动力学特性的影响方面研究仍有空缺。结合上面的研究,本文基于 Kirchhoff 薄板理论,提出通过 Rayleigh-Ritz 法结合拉格朗日方程和加勒金截断法推导出离散控制方程,建立了含粘弹性材料模拟缺陷的复合材料层合圆柱壳的理论模型,通过理论、有限元和实验结果对比验证所提出模型准确性。之后运用谐波平衡法和 Newmark 方法分析缺陷对层合圆柱壳振动响应的影响,通过进行不同缺陷尺寸和激励下含缺陷复合材料层合圆柱壳实验,得到对含缺陷复合材料层合圆柱壳的振动响应。为新能源电动飞机复合材料结构的缺陷容限设计与振动控制提供了科学依据,对提升新能源航空器结构安全性与可靠性具有重要的工程应用价值。

2. 动力学模型

2.1. 模型建立

带有缺陷的复合材料层压开口圆柱壳的模型如图 1 所示,图 1 左为复合材料层压开口圆柱壳缺陷层的几何模型。把图 1 左的几何模型中缺陷层合壳板中性面进行分解可以分成九个小模型如图 1 右所示,中间我们可以通过弹簧连接,每部分壳的轴向长度、角度、半径和厚度分别为 L_i 、 θ_i 、 R 和 h_i ($i=1,2,3,\dots,9$)。

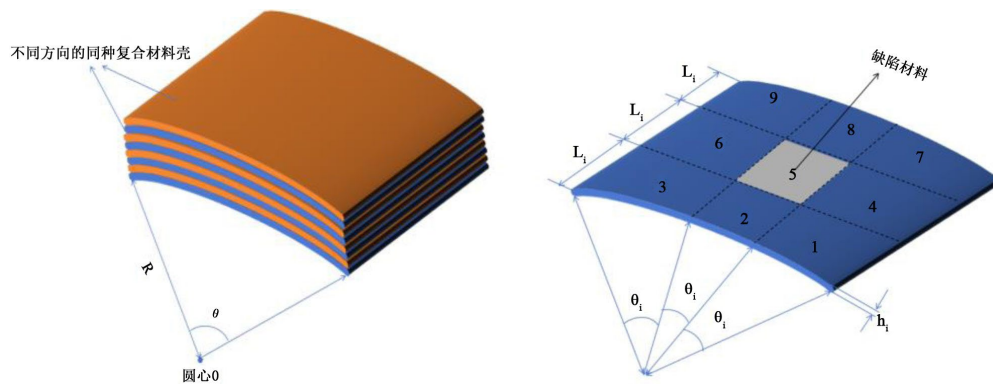


Figure 1. Geometric model of laminated open cylindrical shells with defects in composite materials
图 1. 含缺陷复合材料层压开口圆柱壳的几何模型

如图 2 所示,沿壳表面建立一个球坐标系($o-x,\theta,z$),每一部分的壳体在 x,θ 和 z 方向上的位移分别用 u_i,v_i 和 w_i ($i=1,2,3,\dots,9$) 表示。

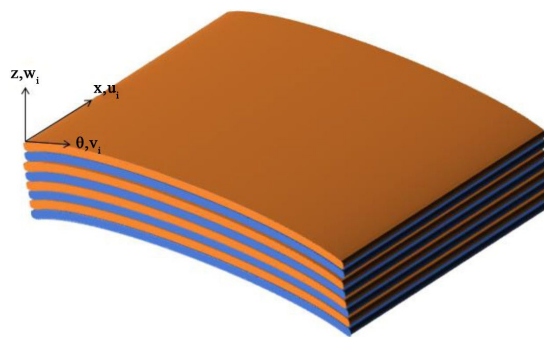


Figure 2. Geometric partitioning of laminated open cylindrical shells with defects and corresponding coordinate systems
图 2. 含缺陷复合材料层压开口圆柱壳的几何划分及相应坐标系

2.2. 含缺陷复合材料圆柱壳结构的能量表达式

本章推导了含缺陷复合材料层压开口圆柱壳的势能、动能、连接弹性势能和边界弹性势能。在球坐标系下，对于含缺陷复合材料开口圆柱壳的势能可以写成：

$$U_i = \frac{R}{2} \sum_{i=1}^9 L_i \theta_i \int_0^1 \int_0^1 \varepsilon_i^T [\mathbf{S}] \varepsilon_i d\xi d\psi \quad (1)$$

其中， ξ ， ψ 的定义分别为 $\xi = x_s/L_s$ ， $\psi = y_i/\theta_i$ ， $(i=1,2,3,\dots,9)$ ， ε_i^T 为应变向量 $\varepsilon_i^T = [\varepsilon_x^i \ \varepsilon_\theta^i \ \gamma_{x\theta}^i \ \kappa_x^i \ \kappa_\theta^i \ \chi_{x\theta}^i]$ ：

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^i &= \frac{\partial u_i}{L_i \partial \xi} \\ \varepsilon_\theta^i &= \frac{1}{R\theta_i} \frac{\partial v_i}{\partial \psi} + \frac{w_i}{R} \\ \gamma_{x\theta}^i &= \frac{1}{R\theta_i} \frac{\partial u_i}{\partial \psi} + \frac{\partial v_i}{L_i \partial \xi} \\ \kappa_x^i &= -\frac{1}{L_i^2} \frac{\partial^2 v_i}{\partial \xi^2} \\ \kappa_\theta^i &= \frac{1}{R^2 \theta_i} \frac{\partial v_i}{\partial \psi} - \frac{1}{R^2 \theta_i^2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial \psi^2} \\ \chi_{x\theta}^i &= \frac{1}{RL_i} \frac{\partial v_i}{\partial \xi} - \frac{2}{RL_i \theta_i} \frac{\partial^2 w_i}{\partial \xi \partial \psi} \end{aligned} \quad (2)$$

$[\mathbf{S}]$ 为刚度矩阵，确定方法为：

$$[\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \quad (3)$$

从中性面开始算起的第 k 层分别用 h_k 和 h_{k+1} 表示，复合材料纤维与壳坐标系之间的夹角为 β ， A_{ij} 、 B_{ij} 和 D_{ij} 的计算方法是：

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N \sum_{\dots k} Q_{ij} (h_k - h_{k+1}) \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{\dots k} Q_{ij} (h_k^2 - h_{k+1}^2) \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \sum_{\dots k} Q_{ij} (h_k^3 - h_{k+1}^3) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\bar{Q}^{\dots k} = [T]^{-1} [Q] [T]^T$$

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \cos^2 \beta & \sin^2 \beta & 2 \sin \beta \cos \beta \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta & -2 \sin \beta \cos \beta \\ -\sin \beta \cos \beta & \sin \beta \cos \beta & \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
[Q] &= \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \\
Q_{11} &= \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\
Q_{12} &= Q_{21} = \frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\
Q_{22} &= \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\
Q_{66} &= G_{12}
\end{aligned} \tag{5}$$

上述公式中, N 表示复合材料的层数, 而第 k 层的刚度矩阵为 $\overset{\dots k}{Q}$, 它是通过变换矩阵 $[T]$ 和刚度矩阵 $[Q]$ 计算得来的。

对于含缺陷复合材料开口圆柱壳的动能写成:

$$T_i = \frac{\rho h R}{2} \sum_{i=1}^9 L_i \theta_i \int_0^1 \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} \right)^2 \right] d\psi d\xi \tag{6}$$

其中上式中的 ρ 表示材料的密度。

为了模拟各组件之间的弹性支撑以及位移耦合特性, 选取在整个组件边界轴向、周向和法向方向上布置几组边界线性弹簧 $k_{ux}^s, k_{vx}^s, k_{wx}^s$ ($s = 0, L$), $k_{ux}^t, k_{vx}^t, k_{wx}^t$ ($t = 0, \theta$) 和边界扭转弹簧 $k_{\theta x}^s$ ($s = 0, L$), $k_{\theta y}^t$ ($t = 0, \theta$), 各个组件之间引入几组位移耦合弹簧, 因此满足这 9 个模型部件连接处连续的位移耦合关系, 进而预测整体的动态行为。通过引入人工边界弹簧, 整个壳体的总势能可表示为:

$$\begin{aligned}
U_{spr} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^9 \left[\theta_i R \int_0^1 \left(k_{ux}^0 u_i^2 + k_{vx}^0 v_i^2 + k_{wx}^0 w_i^2 + k_{\theta x}^0 \frac{1}{L_i^2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial \xi} \right)^2 \right) d\psi \right. \\
&\quad + \theta_i R \int_0^1 \left(k_{ux}^L u_i^2 + k_{vx}^L v_i^2 + k_{wx}^L w_i^2 + k_{\theta x}^L \frac{1}{L_i^2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial \xi} \right)^2 \right) d\psi \\
&\quad + L_s \int_0^1 \left(k_{uy}^0 u_i^2 + k_{vy}^0 v_i^2 + k_{wy}^0 w_i^2 + k_{\theta y}^0 \frac{1}{\theta_i^2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial \xi} \right)^2 \right) d\xi \\
&\quad \left. + L_s \int_0^1 \left(k_{uy}^\theta u_i^2 + k_{vy}^\theta v_i^2 + k_{wy}^\theta w_i^2 + k_{\theta y}^\theta \frac{1}{\theta_i^2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial \xi} \right)^2 \right) d\xi \right] \tag{7}
\end{aligned}$$

2.3. 假设位移函数

为得出整体的动态公式, 必须考虑能量方程中 9 个组成部分的位移关系。这 9 个组成部分在柱坐标系下的位移关系如下:

$$u_h|_{\xi=1} = u_{h+3}|_{\xi=0}; v_h|_{\xi=1} = v_{h+3}|_{\xi=0}; w_h|_{\xi=1} = w_{h+3}|_{\xi=0}; \frac{\partial w_h}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} = \frac{\partial w_{h+3}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0}; h = 1, 2, 3, 4, 5, 6; \tag{8}$$

因此位移耦合连接弹簧的全部势能可表示为:

$$U_{con} = \frac{R}{2} \sum_{h=1}^6 \int_0^1 \left[\theta_h k_{cou}^\theta \left(u_{h+3}|_{\xi=0} - u_h|_{\xi=1} \right)^2 + \theta_h k_{cov}^\theta \left(v_{h+3}|_{\xi=0} - v_h|_{\xi=1} \right)^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \theta_h k_{cov}^\theta \left(w_{h+3} \Big|_{\xi=0} - w_h \Big|_{\xi=1} \right)^2 + \theta_h k_{cov\theta} \left(\frac{\partial w_{h+3}}{L_{h+3} \partial \xi} \Big|_{\xi=0} - \frac{\partial w_h}{L_h \partial \xi} \Big|_{\xi=1} \right)^2 \Big] d\psi \\
& + \frac{L_h}{2} \sum_{h=1}^2 \int_0^1 \left[k_{cou}^x \left(u_{h+3} \Big|_{\psi=0} - u_h \Big|_{\psi=1} \right)^2 + k_{cov}^x \left(v_{h+3} \Big|_{\psi=0} - v_h \Big|_{\psi=1} \right)^2 \right. \\
& \left. + k_{cov}^x \left(w_{h+3} \Big|_{\psi=0} - w_h \Big|_{\psi=1} \right)^2 + k_{cov\theta}^x \left(\frac{\partial w_{h+3}}{\theta_{h+3} \partial \xi} \Big|_{\psi=0} - \frac{\partial w_h}{L_h \partial \xi} \Big|_{\psi=1} \right)^2 \right] d\xi \\
& + \frac{L_h}{2} \sum_{h=4}^5 \int_0^1 \left[k_{cou}^x \left(u_{h+3} \Big|_{\psi=0} - u_h \Big|_{\psi=1} \right)^2 + k_{cov}^x \left(v_{h+3} \Big|_{\psi=0} - v_h \Big|_{\psi=1} \right)^2 \right. \\
& \left. + k_{cov}^x \left(w_{h+3} \Big|_{\psi=0} - w_h \Big|_{\psi=1} \right)^2 + k_{cov\theta}^x \left(\frac{\partial w_{h+3}}{\theta_{h+3} \partial \xi} \Big|_{\psi=0} - \frac{\partial w_h}{\theta_h \partial \xi} \Big|_{\psi=1} \right)^2 \right] d\xi \\
& + \frac{L_h}{2} \sum_{h=7}^8 \int_0^1 \left[k_{cou}^x \left(u_{h+3} \Big|_{\psi=0} - u_h \Big|_{\psi=1} \right)^2 + k_{cov}^x \left(v_{h+3} \Big|_{\psi=0} - v_h \Big|_{\psi=1} \right)^2 \right. \\
& \left. + k_{cov}^x \left(w_{h+3} \Big|_{\psi=0} - w_h \Big|_{\psi=1} \right)^2 + k_{cov\theta}^x \left(\frac{\partial w_{h+3}}{\theta_{h+3} \partial \xi} \Big|_{\psi=0} - \frac{\partial w_h}{\theta_h \partial \xi} \Big|_{\psi=1} \right)^2 \right] d\xi
\end{aligned} \tag{9}$$

含缺陷复合材料层压开口圆柱壳的分段位移函数可以写成:

$$\begin{cases}
u(\xi, \psi, t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \exp(-j\omega t) A_{MN} \alpha_M^u(\xi) \beta_N^u(\psi) = U(\xi, \psi) \exp(-j\omega t) \\
v(\xi, \psi, t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \exp(-j\omega t) B_{MN} \alpha_M^v(\xi) \beta_N^v(\psi) = V(\xi, \psi) \exp(-j\omega t) \\
w(\xi, \psi, t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \exp(-j\omega t) C_{MN} \alpha_M^w(\xi) \beta_N^w(\psi) = W(\xi, \psi) \exp(-j\omega t)
\end{cases} \tag{10}$$

其中 m, n 表示多项式数量, A_{MN}, B_{MN}, C_{MN} 是相应的正交多项式展开系数, 由此篇文章所描述的 Gram-Schmidt 推导出的特征多项式为 $\alpha_M(\xi), \beta_N(\psi)$, ξ, ψ 分别代表方向位移的正交多项式。

2.4. 求解

由上面推导的势能和动能的表达式, 含缺陷复合材料层压开口圆柱壳的势能和动能可以转化成下面的形式:

$$\begin{aligned}
U_Q &= \frac{R}{2} \exp(-2j\omega t) \sum_{i=1}^9 L_i \theta_i \int_0^1 \int_0^1 J_i^T [V_i] J_i d\psi d\xi \\
T_Q &= -\frac{\rho h}{2} \exp(-2j\omega t) \sum_{i=1}^9 R L_i \theta_i \int_0^1 \int_0^1 (U_i^2 + V_i^2 + W_i^2) d\psi d\xi
\end{aligned} \tag{11}$$

因此, 对复合具有弹性边界约束下的含缺陷复合材料板的能量函数写成:

$$E_{CLB} = T_Q^* - (U_Q^* + U_{sprQ}^* + U_{conq}^*) \tag{12}$$

对于 CSCPS 结构动能表达式为: 在 Rayleigh Ritz 方法中, A_{MN}, B_{MN}, C_{MN} 为多项式系数, E_{CLB} 是需要最小化能量函数

$$\frac{\partial E_{CLB}}{\partial A_{MN}} = \frac{\partial E_{CLB}}{\partial B_{MN}} = \frac{\partial E_{CLB}}{\partial C_{MN}} = 0 \quad (M=1,2,3,\dots,m; N=1,2,3,\dots,n) \quad (13)$$

含缺陷复合材料壳的特征值方程为:

$$\left[\mathbf{K}_Q + \mathbf{K}_{sprQ} + \mathbf{K}_{conQ} - w^{*2} \mathbf{M}_Q \right] X = 0 \quad (14)$$

其中 \mathbf{K}_Q , \mathbf{K}_{sprQ} 和 \mathbf{K}_{conQ} 分别表示为刚度矩阵、连接弹簧刚度矩阵、边界弹簧刚度矩阵, \mathbf{M}_Q 为质量矩阵。令 $w^* = wL^2 \sqrt{\rho h}$ 表示无量纲的角频率, $X^T = [A_{MN} \ B_{MN} \ C_{MN}]$ 是 Ritz 向量, 通过上面的表达式可以获得具有弹性边界约束的含缺陷复合材料层合板的固有频率。

2.5. 含缺陷复合材料层合圆柱壳的动力学方程

含缺陷复合材料层合圆柱壳的动力学方程可表示为:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} &= Q_j \\ L &= T - V \\ \mathbf{M}\ddot{q} + \mathbf{K}q + \mathbf{C}\dot{q} &= \mathbf{F} \end{aligned} \quad (15)$$

其中, Q_j 、 \mathbf{M} 、 \mathbf{K} 、 \mathbf{C} 和 \mathbf{F} 表示为外部力、质量矩阵、整体刚度矩阵、阻尼系数矩阵和总外谐波力矩阵, 而且 $\mathbf{K} = \mathbf{K}_\delta + \mathbf{K}_s + \mathbf{K}_{bs}$, \dot{q} 和 \ddot{q} 表示广义坐标 q 相对于时间 t 的一阶和二阶导数。

总阻尼矩阵用 Rayleigh 阻尼表示, 如下所示:

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (16)$$

其中, α 和 β 是质量和刚度矩阵的比例系数, 可以写为:

$$\alpha = 2 \left(\frac{\xi_2}{\omega_2} - \frac{\xi_1}{\omega_1} \right) \left/ \left(\frac{1}{\omega_2^2} - \frac{1}{\omega_1^2} \right) \right., \beta = \frac{2(\xi_2 \omega_2 - \xi_1 \omega_1)}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)} \quad (17)$$

其中, ω_1 , ω_2 为前两阶的固有频率, ξ_1 , ξ_2 是前两个固有频率的阻尼系数。采用 GTM 获得离散的常微分动力学方程, 复合层圆柱壳响应的近似解假设为:

$$w = \sum_{i=1}^{N_G} \phi_{ij}(x, y) q_{ij}(t) \quad (18)$$

α 是通过 Rayleigh-Ritz 方法获得的模态函数, N_G 是截断顺序。系统的常微分方程:

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{q} + \tilde{\mathbf{K}}q + \tilde{\mathbf{C}}\dot{q} = \mathbf{F} \quad (19)$$

其中 $\tilde{\mathbf{M}} = (\tilde{m}_{ij})$, $\tilde{\mathbf{K}} = (\tilde{k}_{ij})$ 和 $\tilde{\mathbf{C}} = (\tilde{c}_{ij})$ 分别代表的是系统的质量矩阵、刚度矩阵和阻尼矩阵。

2.6. 缺陷材料的本构

为了模拟复合材料圆柱壳结构出现局部固化不完全的问题, 在试验件中嵌入黏弹性材料模拟缺陷。当对黏弹性材料进行拉伸和卸载过程时, 得到不同应力情况下缺陷材料的应变, 整理拟合所得的应力-应变关系分别可以用下面的式子表示:

$$\begin{aligned} \sigma_{N1} &= 0.06113 + 0.87483 \varepsilon_{N1} - 0.18949 \varepsilon_{N1}^2, \\ \sigma_{N2} &= -0.07932 + 0.79848 \varepsilon_{N2} - 0.1164 \varepsilon_{N2}^2 \end{aligned} \quad (20)$$

图 3 展示了在常温条件下, 缺陷材料在理论和实验条件下的应力应变曲线。如图 1 所示, 在引入缺陷材料并将其嵌入到复合材料层合板后, 系统的非线性控制方程可以得到为:

$$\tilde{m}_{ij}\ddot{q} + \tilde{k}_{ij}q + C_{ij}\dot{q} = F \quad (21)$$

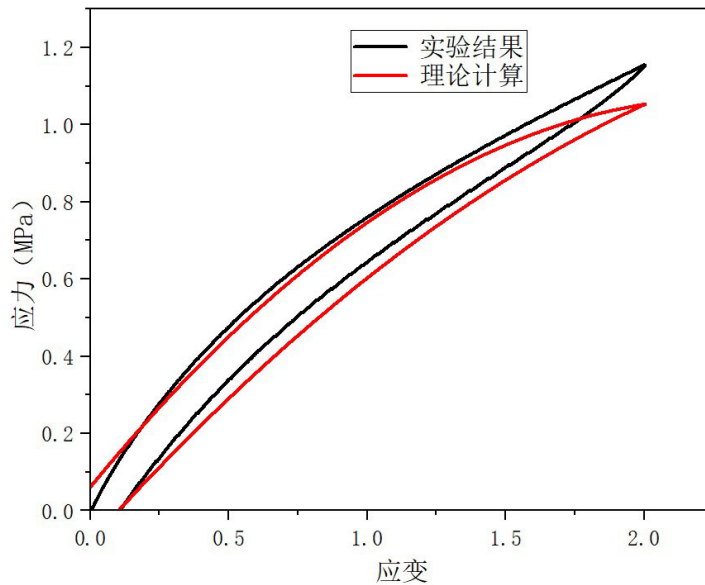


Figure 3. Stress-strain curves of defective materials under theoretical and experimental conditions
图 3. 缺陷材料在理论和实验条件下的应力应变曲线

3. 模型验证及结果处理

3.1. 理论模型与实际模型

带缺陷复合材料层合柱壳的材料参数如表 1 所示。复合材料开口圆柱壳采用 T700 材料正交铺层 8 层柱壳预浸料制造，铺层顺序为 $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ ，将第五层 T700 材料剪出相应尺寸孔洞采用黏弹性材料填充铺设模拟缺陷。其中 T700 材料切割尺寸为 $15\text{ cm} \times 15\text{ cm}$ ，黏弹性材料为 $5\text{ cm} \times 5\text{ cm}$ 。表 2 及表 3 展示了在 C-F-F-F 及 C-C-C-C (C: 固支; F: 自由)边界条件下含缺陷复合材料层合柱壳的频率。从表 2 可以看出，当截断级数为 8 时，理论值相对于有限元法的误差最大为 7.7%，在第 1 阶频率；从表 3 可以看出，当截断级数为 8 时，理论值相对于有限元法的误差最大为 1.49%，在第 6 阶频率。

Table 1. Geometric parameters of composite material structure

表 1. 复合材料结构的几何参数

开口圆柱壳参数	符号	数值	单位
厚度	h	2	mm
轴向长度	L	150	mm
角度	θ	60	deg
密度	ρ	1512	kg/m ³
泊松比	ν_{12}	0.33	
杨氏模量	E_{11}	140	GPa
杨氏模量	E_{22}	7	GPa
剪切模量	G_{12}	5	GPa

Table 2. Frequency comparison of simply supported composite layered column shells with defects: C-F-F-F
表 2. 简支含缺陷复合材料层合柱壳的频率对比: C-F-F-F

边界条件	阶数	理论频率(Hz)				有限元(Hz)	误差(%)
		$M = N = 5$	$M = N = 6$	$M = N = 7$	$M = N = 8$		
C F F F	1	183.15	182.67	182.98	183.04	198.4	7.7
	2	201.36	199.52	200.86	201.17	208.48	3.5
	3	448.27	447.86	447.99	448.04	468.21	4.3
	4	469.64	467.64	468.34	469.30	471.78	0.52
	5	527.48	526.79	527.12	527.28	534.56	1.3
	6	569.43	568.61	568.94	569.17	576.04	1.2

Table 3. Frequency comparison of simply supported composite layered column shells with defects: C-C-C-C
表 3. 简支含缺陷复合材料层合柱壳的频率对比: C-C-C-C

边界条件	阶数	理论频率(Hz)				有限元(Hz)	误差(%)
		$M = N = 5$	$M = N = 6$	$M = N = 7$	$M = N = 8$		
C C C C	1	1095.86	1095.37	1094.40	1094.40	1086.5	0.73
	2	1116.70	1116.05	1115.64	1115.64	1118.3	0.24
	3	1493.54	1493.10	1492.99	1492.27	1499.5	0.48
	4	1705.36	1704.67	1703.91	1703.91	1721.9	1.04
	5	1742.66	1741.66	1739.18	1739.18	1725.9	0.77
	6	1790.23	1787.23	1785.77	1785.77	1759.6	1.49

在实际工程应用中,为了确保应力分布均匀、防止纤维撕裂,测试样本的制造工艺通常会简化流程。为了进一步验证理论分析的有效性和准确性,进行模态实验如图 4 所示。通过比较理论、有限元法和实验获得的前 6 阶模态振型,表 4 展示了固有频率及其相应的模态振型,可以观察到三种方法获得的结果高度一致。实验件依旧采用 T700 材料正交铺层 8 层柱壳,其中第五层 T700 材料剪出孔洞采用黏弹性材料填充铺设模拟缺陷。其中 T700 材料切割尺寸为 $15\text{ cm} \times 15\text{ cm}$,黏弹性材料为 $5\text{ cm} \times 5\text{ cm}$,按照预定的材料铺设方向和层叠顺序依次铺设在相应的圆柱形金属模具上,利用湿法将复合材料及粘弹性材料制成角度为 60° 的柱壳,随后将样品密封放入真空袋进行真空处理,最后将样品放入热压罐中进行 3 个小时的固化成型。

在对成型的样品件进行适当打磨切割操作后,将其放置在具有圆形匹配面的夹载设备上进行简支固定,通过 LMS 软件对样品进行网格化处理,并建立相应的几何模型,在标记好的测量点处使用力锤敲击样品,同时使用加速度传感器捕获样品的振动信号。最终通过 LMS 进行信号信息的获取和处理,借助 lms 模态分析模块获得样品的固有频率和模态形状。



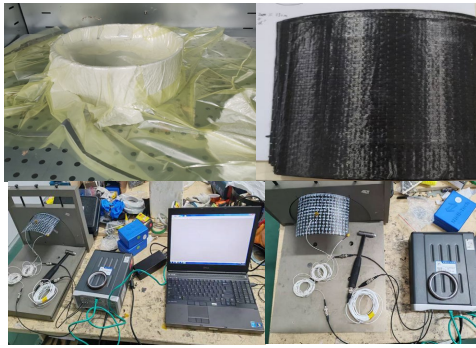
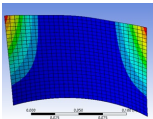
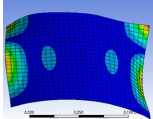
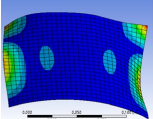
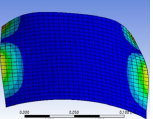
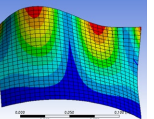
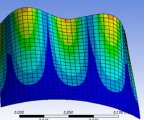
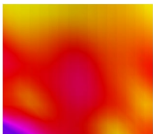
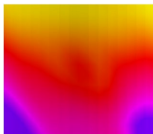
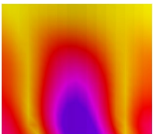
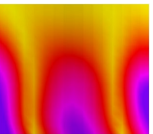
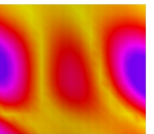
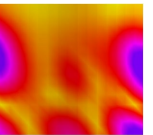
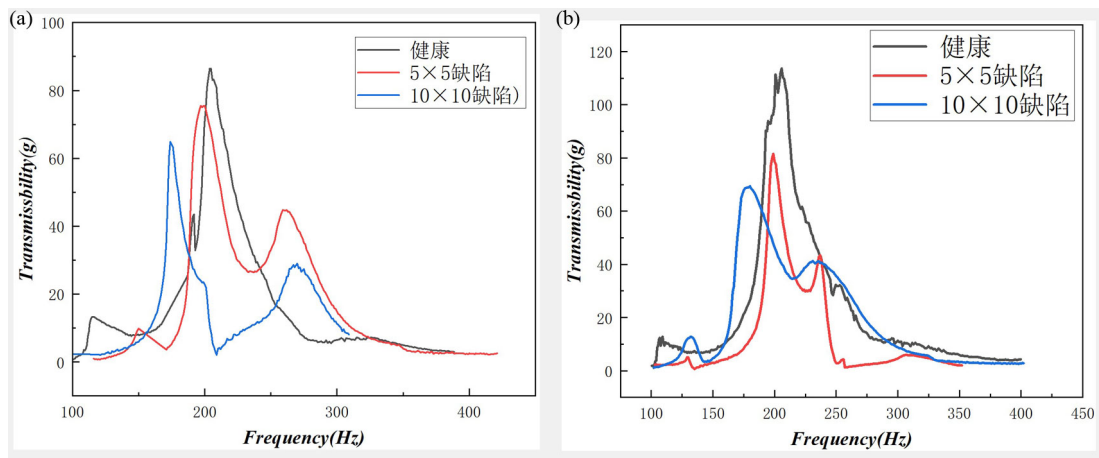


Figure 4. Modal experiment
图 4. 模态实验

Table 4. Simple supported modal analysis
表 4. 简支模态分析

模态	1	2	3	4	5	6
FEM	198.4 Hz 	208.48 Hz 	468.21 Hz 	471.78 Hz 	534.56 Hz 	576.04 Hz 
实验模态	227.1 Hz 	237.97 Hz 	500.68 Hz 	524.57 Hz 	604.9 Hz 	626.61 Hz 

为探究不同激励水平对含不同缺陷复合材料圆柱壳振动响应的影响，在建立的实验配置基础上，针对健康复合材料圆柱壳和含 $5\text{ cm} \times 5\text{ cm}$ 、 $10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$ 两个不同缺陷大小的复合材料圆柱壳结构试样，系统开展了全面的正弦频率扫描测试，扫描频率为 150 Hz 至 400 Hz 。测试条件覆盖了多种不同激励水平，重点关注一阶与二阶共振频率带。分别选取为 0.2 g 、 0.4 g 、 0.6 g 与 0.8 g 四种速度激励对健康壳与含不同尺寸缺陷圆柱壳进行实验，得到图 5 含不同缺陷大小复合材料圆柱壳在不同激励下与健康壳的二阶共振峰幅度对比。



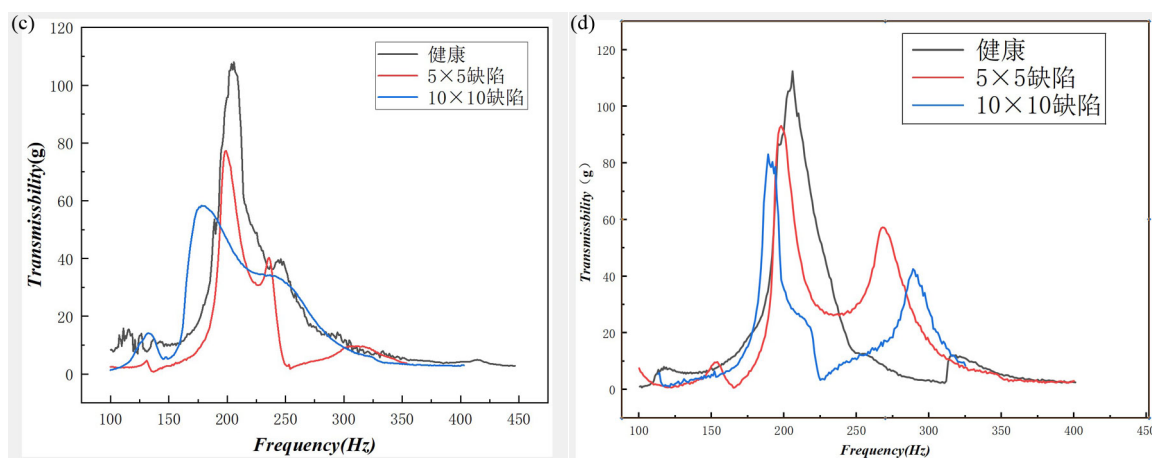


Figure 5. Amplitude-frequency characteristic curves of healthy and defective cylindrical shells under different excitations ((a) $a_0 = 0.2$ g; (b) $a_0 = 0.4$ g; (c) $a_0 = 0.6$ g; (d) $a_0 = 0.8$ g)

图 5. 不同激励下健康和含缺陷圆柱壳的幅频特性曲线((a) $a_0 = 0.2$ g; (b) $a_0 = 0.4$ g; (c) $a_0 = 0.6$ g; (d) $a_0 = 0.8$ g)

3.2. 结果分析

表 2 及表 3 展示了不同边界条件下含缺陷复合材料圆柱壳结构固有频率随多项式数量增加的收敛情况, 从表 2 及表 3 中可以看到, 频率相对误差随多项式数量的增加快速降低, 当 $MN = 8$ 时, C-F-F-F 简支边界条件下的频率最大相对误差均小于 7.7%; 当 $MN = 8$ 时, C-C-C-C 固支边界条件下的频率最大相对误差均小于 1.49%。因此可以得出, 在不同边界条件下, 理论方法得到的含缺陷开口圆柱壳结构固有频率也能快速收敛且准确。此外, 观察前三阶频率变化, 发现 C-C-C-C 固支条件下层合圆柱壳的固有频率下降速度比在 C-F-F-F 简支条件下下降得快, 这是因为四端固定边界条件, 通过完全限制层合圆柱壳的位移和转角, 显著提高了结构的整体刚度。

对比图 5 所有实验结果可以看出, 固有频率会随缺陷尺寸增大而降低, 这是因为预制缺陷会破坏壳体的连续性与整体性, 造成局部刚度弱化导致结构等效刚度下降。因此同一激励幅值下, 缺陷尺寸越大一阶固有频率向低频偏移越明显, 固有频率随缺陷尺寸增大而降低。随着激励加速度从 0.2 g 提升至 0.8 g, 三类壳体的振动特性呈现出显著的非线性特征, 所有壳体的固有频率均随激励幅值增大向低频偏移且偏移幅度随激励增强而加剧, 这是复合材料圆柱壳典型的非线性振动特征, 高激励幅值会引发结构的大变形和材料非线性损伤, 导致等效刚度随变形增大而降低进而使固有频率下降。共振幅值随激励幅值增大显著升高, 而激励幅值越高结构的共振响应越剧烈, 主共振峰高度整体呈上升趋势, 说明高激励会放大结构的振动放大效应, 使共振响应更易达到危险水平。

4. 结论

本文采用 Rayleigh-Ritz 法系统研究了新能源电动飞机含缺陷复合材料层合柱壳结构的振动特性。在确定了缺陷材料的本构方程后, 建立了含缺陷得复合材料层合柱壳的动力学方程, 说明了含缺陷的复合材料层合柱壳的振动特性。此外, 通过试验探究了缺陷和外激力的大小对结构的振动特性的影响。通过以上分析, 总结出有价值的结论如下:

(1) 本文基于经典 Kirchhoff 薄板理论, 采用 Rayleigh-Ritz 近似求解方法, 充分考虑结构缺陷带来的材料刚度退化与力学性能变化, 建立了含缺陷复合材料层合开口圆柱壳的离散动力学控制方程, 该模型能够有效表征缺陷引发的结构局部刚度突变与力学非线性特征, 贴合航空复合材料构件真实结构状态。通过将本文理论计算结果与有限元仿真数据、物理模态试验测试结果进行多维度对比验证, 不同阶次模

态、不同工况下的数据吻合度极高,充分证明了本文所建立动力学理论模型的准确性、可靠性与适用性,可为后续多参数分析、多场耦合研究提供精准的模型基础。

(2) 本文采用弹性边界弹簧等效模拟方法,精准还原航空壳体结构非理想固支、弹性约束等真实边界工况,系统探究了 C-F-F-F 弱约束、C-C-C-C 强约束等不同边界条件下,含缺陷复合材料层合柱壳的固有频率变化规律与模态特性演化特征。通过无缺陷结构与含缺陷结构的对照分析明确,结构缺陷的核心力学影响为破坏壳体结构连续性、弱化局部与整体刚度,最终导致结构各阶固有频率均出现不同程度的降低,是引发复合材料柱壳动力学性能劣化的核心诱因。同时,边界约束对缺陷结构振动特性具备显著的调控效应,约束强度与结构整体刚度呈正相关,四端固支的强约束工况可大幅提升结构整体刚度,有效削弱缺陷带来的刚度弱化效应,降低结构对缺陷尺寸、位置、形态的敏感程度,使得结构频率下降幅度更小,且理论计算结果与有限元仿真结果的误差更小、数据稳定性更强。

(3) 本文开展多工况对比试验与仿真分析,明确了缺陷参数与激励参数对结构非线性振动特性的耦合影响规律。研究表明,缺陷尺寸是决定结构刚度弱化程度的主导因素,随着缺陷尺寸不断增大,结构有效承载与传力区域缩减,整体刚度持续衰减,结构振动响应被显著削弱,各阶固有频率持续降低,振动模态多峰特征愈发显著,振动模式趋于复杂,结构动力学稳定性持续下降。外部激励幅值则是放大结构非线性特征的关键诱因,在固定缺陷尺寸工况下,激励幅值越高,结构振动变形量越大,几何非线性效应愈发显著,结构等效刚度出现明显软化退化,固有频率向低频方向偏移的幅度加剧,共振峰值显著提升。

参考文献

- [1] 石峰, 范振伟. 我国绿色通航产业发展研究[J]. 交通企业管理, 2020, 35(2): 13-16.
- [2] 杜长城, 李映辉. 功能梯度薄壁圆柱壳的自由振动[J]. 动力学与控制学报, 2010, 8(3): 219-223.
- [3] 杜长城, 李映辉. 功能梯度圆柱壳非线性振动中的模态相互作用[J]. 振动工程学报, 2013, 26(5): 647-653.
- [4] 宋旭圆. 层合薄壁圆柱壳结构的非线性振动特性研究[D]: [博士学位论文]. 大连: 大连理工大学, 2016.
- [5] 张春雨. 一般边界条件下板壳组合结构动刚度建模方法及振动特性研究[D]: [博士学位论文]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2020.
- [6] 唐冲, 王宇, 李学辉, 等. 任意边界条件下功能梯度阶梯圆柱壳的振动特性研究[J]. 固体力学学报, 2024, 45(4): 520-532.
- [7] Zhao, X., Wang, S., Mei, Z., An, S. and Zhang, Z. (2025) Jacobi-Ritz Method for Free Vibration Analysis of Medium-Thickness Sandwich Cylindrical Shells Utilizing the Layerwise Theory and Domain Decomposition Method. *Ocean Engineering*, **342**, Article ID: 123065. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2025.123065>
- [8] 胡宸琪, 郭振航, 束永平, 等. 层合开口圆柱壳的受迫振动特性分析[J]. 中国工程机械学报, 2026, 24(1): 95-100.
- [9] 王潘丁, 牛国浩, 李元晨, 等. 树脂基复合材料缺陷表征与评价方法研究综述[J]. 宇航总体技术, 2023, 7(5): 51-63.
- [10] 戎笑远, 潘利剑, 岳广全, 等. 热压罐成型典型制造缺陷对复合材料的力学性能影响研究[J]. 航空制造技术, 2024, 67(3): 96-105.
- [11] 刘亚泽, 郝育新. 有初始缺陷的 FGM 圆柱壳的非线性动力学分析[J]. 北京信息科技大学学报(自然科学版), 2014, 29(6): 25-31.
- [12] 魏德正, 杨建, 张月. 开孔硬涂层薄壁圆柱壳复合结构的半解析建模及振动特性分析[J]. 振动与冲击, 2024, 43(11): 58-65, 93.
- [13] Du, D., Sun, W., Yan, X. and Xu, K. (2021) Free Vibration Analysis of Rotating Thin-Walled Cylindrical Shells with Hard Coating Based on Rayleigh-Ritz Method. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, **235**, 1170-1186. <https://doi.org/10.1177/0954410020967243>
- [14] Zhang, Y., Sun, W., Yang, J. and Han, Q. (2018) Analytical Analysis of Forced Vibration of the Hard-Coating Cylindrical Shell with Material Nonlinearity and Elastic Constraint. *Composite Structures*, **187**, 281-293. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.12.045>

- [15] Song, X., Li, H., Zhang, Z., Zang, J., Zhang, Y. and Chen, L. (2024) Vibration of Composite Open Shell of Hydrogen-Electric Fuselage with Rectangular Cutout in Hygrothermal Circumstances: Theoretical and Experimental Research. *Thin-Walled Structures*, **205**, Article ID: 112473. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2024.112473>
- [16] Juhyok, U. and Kim, K. (2024) Vibro-Acoustic Response Analysis of Laminated Composite Multi-Stepped Cylindrical Shells Immersed in Fluid Medium. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*, **12**, 2283-2300. <https://doi.org/10.1007/s42417-024-01534-6>
- [17] Kim, J., Om, C., Kang, D., Hong, K. and Choe, T.H. (2023) Dynamic Analysis of Laminated Composite Double Cylindrical and Conical Shells with Bulkheads Using Meshfree Method. *Acta Mechanica*, **234**, 4775-4800. <https://doi.org/10.1007/s00707-023-03628-w>
- [18] Mahmure, A., Tornabene, F., Dimitri, R. and Kuruoglu, N. (2021) Free Vibration of Thin-Walled Composite Shell Structures Reinforced with Uniform and Linear Carbon Nanotubes: Effect of the Elastic Foundation and Nonlinearity. *Nano-materials*, **11**, Article 2090. <https://doi.org/10.3390/nano11082090>
- [19] Ebrahimi, F., Mollazeinal, A. and Ahari, M.F. (2023) Nonlinear Vibration Analysis of Smart Truncated Conical Porous Composite Shells Reinforced with Terfenol-D Particles. *Acta Mechanica*, **235**, 691-734. <https://doi.org/10.1007/s00707-023-03746-5>
- [20] Rad, G.H.M., Shahabian, F. and Hosseini, M.S. (2020) Geometrically Nonlinear Dynamic Analysis of FG Graphene Platelets-Reinforced Nanocomposite Cylinder: MLPG Method Based on a Modified Nonlinear Micromechanical Model. *Steel and Composite Structures*, **35**, 77-92.
- [21] Emad, S. and Babak, S. (2023) Vibrational Features of Graphene Oxide Powder Nanocomposite Coupled Conical-Cylindrical Shells Applicable for Aerospace Structures under Various Boundary Conditions. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **151**, 423-438.
- [22] Kumar, D. and Patel, B.P. (2026) Non-Linear Forced Vibration and Sound Radiation Characteristics of Viscoelastic Variable Stiffness Laminated Composite Plates. *Composite Structures*, **385**, Article ID: 120206. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2026.120206>
- [23] Pan, W.J., Kong, K.S., Xu, H.Y., Wang, J.Y., Bao, J.W., Zeng, X.J., et al. (2025) Non-Iterative Modeling and Vibration Characteristics Analysis of Multi-Layered Composite Thin-Walled Cylindrical Shell with Intermediate Layer Offset. *Mechanics of Solids*, **59**, 3514-3538. <https://doi.org/10.1134/s0025654424605329>
- [24] Gomes, G.F. and de Souza Silva, G.C. (2025) Influence of Surface Imperfections and Damage on the Structural Properties of Composite Cylindrical Shells: A Modeling and Prediction Approach. *Composite Structures*, **372**, Article ID: 119497. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2025.119497>
- [25] Ganjdoust, F., Kefal, A. and Tessler, A. (2023) Delamination Detection and Localization in Vibrating Composite Plates and Shells Using the Inverse Finite Element Method. *Sensors*, **23**, Article 7926. <https://doi.org/10.3390/s23187926>
- [26] Alaimo, A., Orlando, C. and Valvano, S. (2021) Analytical Higher-Order-Theories for Noise Reduction Analysis of Viscoelastic Composite Multilayered Shells. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, **235**, 2629-2636. <https://doi.org/10.1177/0954406220982334>
- [27] Faghanizadeh, N., Hosseini, F., Seyyedi, S.M. and Nekoufar, K. (2025) The Effect of Supersonic Flow and Hygrothermal Environment on the Nonlinear Vibrations of Carbon Nanotubes-Reinforced Composite Cylindrical Shells Containing Fluid. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*, **13**, Article No. 357. <https://doi.org/10.1007/s42417-025-01875-w>
- [28] Monajemi, A.A., Mohammadimehr, M. and Bargozini, F. (2024) Dynamic Analysis of a Spinning Visco-Elastic FG Graphene Platelets Reinforced Nanocomposite Sandwich Cylindrical Shell with MRE Core. *Acta Mechanica*, **235**, 7497-7530. <https://doi.org/10.1007/s00707-024-04077-9>
- [29] Van Quang, D. and Van Minh, P. (2026) An Analytical Study on the Thermoelastic Behavior of Functionally Graded Carbon Nanotube-Reinforced Composite Cylindrical Shells under General Boundary Conditions. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, **26**, Article No. 118. <https://doi.org/10.1007/s43452-026-01469-7>
- [30] Hasan, H.M. and Ali, A.Y. (2023) Nonlinear Forced Vibration of Functionally Graded Graphene-Reinforced Composite (FG-GRC) Laminated Cylindrical Shells under Different Boundary Conditions with Thermal Repercussions. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, **24**, Article ID: 2450207. <https://doi.org/10.1142/s0219455424502079>