

考虑连接非线性的复合材料组合梁动力学分析与振动控制

顾秀伦, 张 振

沈阳航空航天大学航空宇航学院, 辽宁 沈阳

收稿日期: 2026年5月14日; 录用日期: 2026年6月19日; 发布日期: 2026年6月29日

摘 要

针对传统组合梁模型在处理连接处时忽略非线性问题, 本文提出采用一组立方非线性弹簧对连接处的非线性力学现象进行模拟, 以有效表征连接界面复杂的非线性刚度效应, 使模型更接近组合梁的真实装配状态。基于欧拉-伯努利(Euler-Bernoulli)梁理论构建了固定边界条件下的组合梁非线性动力学模型, 应用瑞利-里茨(Rayleigh-Ritz)法求解系统固有频率, 分析了线性连接弹簧对系统固有频率的影响。随后采用谐波平衡法(HBM)与龙格库塔(Runge-Kutta)法分别求解系统的非线性稳态幅频响应并进行对比验证。进一步, 引入一种镍钛合金钢丝绳(NiTi-ST)减振技术, 探究其非线性刚度与迟滞阻尼对含有非线性连接的复合材料组合梁系统的减振效果。研究表明: 连接处立方非线性刚度会导致组合梁系统幅频响应曲线峰值向高频偏移, 呈现出典型的非线性硬特性。镍钛合金钢丝绳可以大幅削减共振峰值, 实现良好的减振效果。

关键词

复合材料组合梁, 非线性连接, 镍钛合金钢丝绳, 减振

Dynamic Analysis and Vibration Control of Composite Assembled Beams Considering Connection Nonlinearity

Xiulun Gu, Zhen Zhang

College of Aerospace Engineering, Shenyang Aerospace University, Shenyang Liaoning

Received: May 14, 2026; accepted: June 19, 2026; published: June 29, 2026

Abstract

To address the neglect of joint nonlinearity in traditional assembled beam models, this thesis

proposes using cubic nonlinear springs to simulate the complex nonlinear stiffness effects at connection interfaces, closely representing the true assembly state. Based on Euler-Bernoulli beam theory, a nonlinear dynamic model under fixed boundaries is constructed. The Rayleigh-Ritz method is applied to solve natural frequencies and analyze the impact of linear connection springs. Subsequently, the harmonic balance method (HBM) and Runge-Kutta method are employed to solve and cross-verify the nonlinear steady-state amplitude-frequency responses. Furthermore, a Nickel-Titanium alloy wire rope (NiTi-ST) is introduced to investigate the vibration suppression effects of its nonlinear stiffness and hysteretic damping on the composite assembled beam. Results indicate that the cubic nonlinear stiffness at the connections causes the amplitude-frequency response peaks to shift to higher frequencies, exhibiting typical nonlinear hardening characteristics. NiTi-ST can significantly reduce resonance peaks, achieving excellent vibration suppression.

Keywords

Composite Assembled Beam, Nonlinear Connection, Nickel-Titanium Alloy Wire Rope, Vibration Reduction

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

随着现代航空航天技术向轻量化与极端工况快速演进, 复合材料因其优异的比刚度与比强度而被广泛应用于高端装备中。但在实际工程应用中, 复合材料组合结构的装配与连接界面不可避免地存在间隙与接触变形。在复杂飞行工况的强激励作用下, 这类界面非线性极易诱发结构的强非线性动力学行为, 若采用传统的线性连接假设进行建模, 会导致结构动态响应预测出现偏差。为此, 本文建立了一种考虑连接非线性的复合材料组合梁动力学模型, 引入具有立方刚度的连接弹簧模拟界面复杂的力学特性。

近年来, 国内外学者针对航空复合材料结构的非线性动力学、复杂连接界面建模以及先进减振技术开展了大量的研究, 为本文工作提供了坚实的理论基础。Liu 等人[1]建立了一种通过非线性耦合层连接的复合材料梁模型, 通过优化三次非线性耦合刚度参数, 有效控制了多梁系统的内共振能量传递。Zang 等人[2]采用伽辽金截断法对动力学方程进行离散, 求出了简化后的 L 型复合材料梁结构的振动响应, 准确捕捉了温度变化引发的基频变化。为了探究结构质量对局部非线性的影响, Meng 等人[3]分析了附加刚性质量复合材料板的非线性振动, 发现结构质量会激发额外的线性与二次非线性项, 导致高频激励下出现复杂的幅频响应与模态耦合。连接结构在很大程度上会对系统产生影响, 针对这一研究方向, 学者已从不同建模方法与工程场景展开了深入探索。Guo 等人[4]采用含间隙的弹簧系统等效模拟连接模型, 采用改进纽马克积分法对非线性运动方程进行求解, 结果表明间隙会呈现显著非线性特征。Zang 等人[5]基于 Rayleigh-Ritz 法推导并建立了组合梁的结构振动模型, 通过拉格朗日方程推导系统运动方程并实现非线性振动控制。Ghalandari 等人[6]则关注了低预紧力下螺栓连接结构由非线性接触引发的振动问题。文章通过法向刚度和剪切阻尼表征界面属性, 采用复合材料混合连接并改善了系统的非线性频率响应。高鹏林等人[7]系统归纳了结构非线性效应来源与动力学建模方法, 重点剖析了由非线性引发的各种复杂现象。研究指出, 合理利用非线性可突破传统理论局限, 显著增强能量局域束缚能力。刘付成和朱东方等人[8]提出了一种基于子结构模态综合的非线性动力学建模方法。研究将复杂振动系统转换为分散参数化模型, 重点考察了铰链间隙非线性对结构高精度形面保持的负面干扰及应对控制策略。

镍钛合金-钢丝绳(NiTi-ST)作为一种新型非线性耗能装置, 利用其独特的迟滞特性, 可以在不显著增加系统质量且不改变基频的情况下, 通过与原有结构进行耦合而表现出卓越的振动抑制能力[9] [10]。Wang 等人[11]通过对 NiTi-ST 首次通过试验获取迟滞力-位移数据, 建立拟合模型进行力学参数计算并验证了 NiTi-ST 的宽频减振性能。Putranto 等人[12]将复合材料板与修正的 Bouc-Wen 迟滞模型耦合, 并采用一阶剪切变形理论(FSDT)建立动力学模型, 分析了不同长宽比的影响。Wang 等人[13]提出一种创新边界分离法用于研究壁板的动态特性, 首次将形状记忆合金丝嵌入复合材料结构实现振动控制。Wang 等人[14]针对内置镍钛合金网格的层合尾翼结构开展了宽频变温振动控制研究, 证明具有超弹性阻尼特性的减振器在不增加过多质量的前提下, 成功实现了非线性振动抑制。Zheng 等人[15]首次将镍钛合金钢丝绳与复合材料层合梁结合用于振动抑制, 采用两种方法求解稳态响应并进行数值验证。仿真结果表明其具有良好减振效果, 该振动抑制方法可推广至其他层合结构并实现振动控制。Zang 等人[16] [17]首次将 NiTi-ST 应用于 FGM 管道系统以及矩形板受迫振动模型, 验证了在多种工况下 NiTi-ST 对 FGM 管道系统的非线性振动控制能力, 发现了消除闭合分离响应(CDR)与提升非线性系统减振性能的关系。这表明该技术已从基础的悬臂梁或平板结构扩展至复杂的壁板、考虑变温环境且空间与质量受限的复合梁系统中 [18]。

可以看出, 当前学术界已在航空航天复杂结构的建模与非线性振动控制上取得了一定成果。本文将在已有研究基础上, 探究复合材料组合梁连接处非线性对其稳态响应的影响, 并引入 NiTi-ST 抑制考虑连接非线性的复合材料组合梁的横向振动。

2. 动力学建模与振动特性

2.1. 模型描述

非线性连接复合材料组合梁如图 1 所示, 该结构由左边的 1 梁和右边的 2 梁连接构成。两根梁的形状及材料参数均相同, 每一根复合材料梁的长度为 L , 宽度为 b , 厚度为 h 。系统两端边界为固定约束, 在 1 梁的表面施加一个简谐激励 $F(t)$, 两根复合材料梁中间通过线性拉伸弹簧 k_1 、线性扭转弹簧 k_2 以及立方非线性拉伸弹簧 k_3 、立方非线性扭转弹簧 k_4 进行连接。

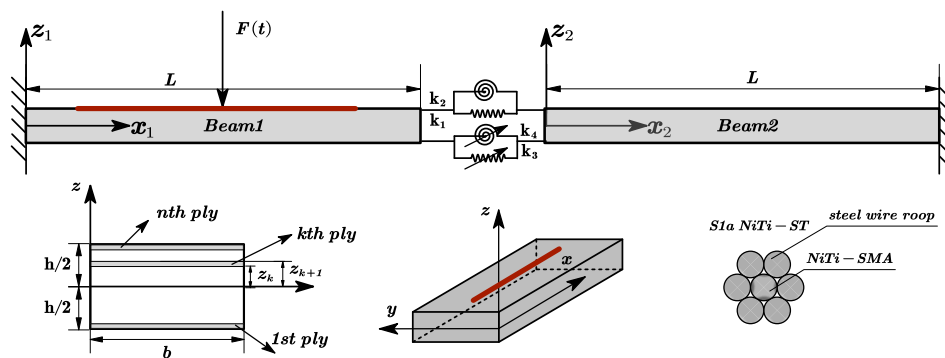


Figure 1. Schematic diagram of composite beams with nonlinear springs connection
图 1. 考虑连接非线性的复合材料组合梁示意图

当两段梁在连接处发生横向振动时, 随着振幅增大, 连接处的接触面积会发生非线性扩展, 接触刚度会随着局部挤压变形的增大而显著提升。立方非线性弹簧能够以简洁的物理形式捕捉结构的硬刚度特征, 是对真实非线性连接力本质的数学截断拟合, 因此选用立方非线性弹簧近似表征连接处的复杂相互

作用。当前模型主要从宏观上描述连接处的非线性现象, 适用于未发生严重松脱、具有连续变形特征的组合梁的非线性振动分析, 对于真实工况中连接处的实际连接方式与受力特点暂作忽略。

2.2. 复合材料组合梁能量方程

在每一根复合材料组合梁的左端分别建立 (x_1, y_1, z_1) 和 (x_2, y_2, z_2) 坐标系, 根据固体力学中描述细长梁弯曲变形的 Euler-Bernoulli 经典梁理论, 连接非线性复合材料组合梁为细长梁。即忽略复合材料层合梁沿厚度 z 方向的剪切应变, 梁的横截面在弯曲变形后仍保持为平面, 且始终垂直于变形后的梁轴线。不考虑动力效应部分中的转动惯量影响。

因此, 基于 Euler-Bernoulli 经典梁理论的平截面假设, 连接非线性复合材料组合梁上任意点在其对应坐标系下的位移分量表达式分别为:

$$u(x_1, z_1, t) = -z_1 \frac{\partial w_1(x_1, t)}{\partial x_1} \quad (1)$$

$$w(x_1, z_1, t) = w_1(x_1, t)$$

$$u(x_2, z_2, t) = -z_2 \frac{\partial w_2(x_2, t)}{\partial x_2} \quad (2)$$

$$w(x_2, z_2, t) = w_2(x_2, t)$$

其中 $w_1(x_1, t)$ 和 $w_2(x_2, t)$ 分别为 1 梁和 2 梁中性面 ($z=0$) 上任意一点沿 y 轴的横向位移分量, z_1 和 z_2 分别表示 1 梁和 2 梁横截面上一点到中性面的距离。

为了简化计算, 下面引入无量纲参数 \bar{x} 代替坐标参数 x , 其表达式为:

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1}{L}, \bar{x}_2 = \frac{x_2}{L} \quad (3)$$

所以组合梁的动能表达式为:

$$T = \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{1}{2} \rho L b \int_0^1 \int_{-h/2}^{h/2} \left[z_i^2 \left(\frac{\partial w_i}{\partial x \partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} \right)^2 \right] dz_i d\bar{x}_i \right\} \quad (4)$$

忽略几何非线性及位移的二次非线性项, 此时复合材料组合梁内任意一点的机械应变表达式为:

$$\varepsilon_{1xx} = -z_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} \quad (5)$$

$$\varepsilon_{2xx} = -z_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2}$$

由于环境温度变化而产生的热应变可以表示为:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1x}^T &= \alpha_x^{(k)} \Delta T \\ \varepsilon_{2x}^T &= \alpha_x^{(k)} \Delta T \end{aligned} \quad (6)$$

式中 $\alpha_x^{(k)}$ 为复合材料梁其中一层的 x 方向热膨胀系数, 可以表示为:

$$\alpha_x^{(k)} = \alpha_1 \cos^2 \theta^{(k)} + \alpha_2 \sin^2 \theta^{(k)} \quad (7)$$

根据线弹性本构关系, 梁横截面上的正应力沿截面高度呈线性分布, 中性轴处正应力为零, 梁内各铺层的应力与应变均满足线弹性本构方程, 所以组合梁第 k 层上的应力 - 应变关系可以表示为:

$$\begin{aligned}\sigma_{1x}^{(k)} &= \bar{Q}_{11}^{(k)} \varepsilon_{1x} \\ \sigma_{2x}^{(k)} &= \bar{Q}_{11}^{(k)} \varepsilon_{2x}\end{aligned}\tag{8}$$

式中 $\bar{Q}_{11}^{(k)}$ 为复合材料第 k 层在整体坐标系下的 x 方向等效刚度系数, 其值随铺层角度 θ 连续变化, 体现了复合材料各向异性的特点, 采用如下表示形式:

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{11}^{(k)} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \\ Q_{11} &= \frac{E_1}{1 + \mu_{12}\mu_{21}}, Q_{12} = \frac{\mu_{12}E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}, Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}, Q_{66} = G_{12}\end{aligned}\tag{9}$$

所以热环境下复合材料组合梁的热应变能可以表示为:

$$U_T = \sum_{i=1}^2 \left[-\frac{1}{2} Lb \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{11}^{(k)} \alpha_x \Delta T dz_i \right) \left(\frac{\partial w_i}{\partial \bar{x}_i} \right)^2 d\bar{x}_i \right]\tag{10}$$

系统的机械应变能可以表示为:

$$U_b = \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{1}{2} Lb \int_0^1 \left[\sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\bar{Q}_{11}^{(k)} z_i^2) dz_i \right] \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial \bar{x}_i^2} \right)^2 d\bar{x}_i \right\}\tag{11}$$

当系统受到激励并发生微小形变时, 复合材料梁连接处的弹性势能可以表示为:

$$\begin{aligned}U_k &= \frac{1}{2} k_1 [w_1(1, t) - w_2(0, t)]^2 + \frac{1}{2} k_2 \left[\frac{\partial w_1(1, t)}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial w_2(0, t)}{\partial \bar{x}} \right]^2 \\ &+ \frac{1}{4} k_3 [w_1(1, t) - w_2(0, t)]^4 + \frac{1}{4} k_4 \left[\frac{\partial w_1(1, t)}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial w_2(0, t)}{\partial \bar{x}} \right]^4\end{aligned}\tag{12}$$

2.3. 复合材料组合梁固有频率分析

本小节采用 Rayleigh-Ritz 法对复合材料组合梁的动力学方程进行求解, 忽略方程中的非线性项和阻尼项, 计算组合梁结构的固有频率和模态函数。首先将组合梁系统中一点的横向位移用假设位移函数来进行替代, 并表示为如下形式:

$$\begin{aligned}w_1(\bar{x}_1, t) &= e^{i\omega t} W_1(\bar{x}_1), \quad \bar{x}_1 \in [0, 1] \\ w_2(\bar{x}_2, t) &= e^{i\omega t} W_2(\bar{x}_2), \quad \bar{x}_2 \in [0, 1]\end{aligned}\tag{13}$$

$W_1(\bar{x}_1)$ 和 $W_2(\bar{x}_2)$ 分别是 z_1 和 z_2 两个方向上的模态振型函数, 由一组经过 Schmidt 正交化构造的满足组合梁模型边界条件的特征多项式函数族构造而成, 基于 Rayleigh-Ritz 法, 将振型函数分解为函数族的线性组合, 可以表示为如下形式:

$$\begin{aligned}W_1(\bar{x}_1) &= \sum_{n=1}^{NT} a_n \varphi_n(\bar{x}_1) \\ W_2(\bar{x}_2) &= \sum_{n=1}^{NT} b_n \varphi_n(\bar{x}_2)\end{aligned}\tag{14}$$

式中, NT 表示特征多项式项数, a_n 和 b_n 为 Ritz 系数, $\varphi_n(\bar{x}_1)$ 和 $\varphi_n(\bar{x}_2)$ 为 Schmidt 正交化方法构造的位移容许函数多项式。为求解组合梁系统的固有频率及模态, 这里暂时忽略非线性项, 令 k_3 、 k_4 为零。

根据能量守恒定律以及 Rayleigh-Ritz 法, 对上述表达式中的 Ritz 系数求偏导数, 可以得到如下方程:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{NT} \frac{\partial T}{\partial a_n} + \frac{\partial U_b}{\partial a_n} + \frac{\partial U_T}{\partial a_n} + \frac{\partial U_k}{\partial a_n} &= 0 \\ \sum_{n=1}^{NT} \frac{\partial T}{\partial b_n} + \frac{\partial U_b}{\partial b_n} + \frac{\partial U_T}{\partial b_n} + \frac{\partial U_k}{\partial b_n} &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

推导整理并提取 Ritz 系数后,可以得到如下描述复合材料组合梁自由振动的矩阵形式的特征值方程:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})[a_n, b_n]^T = 0 \quad (16)$$

令系数矩阵的行列式为零,计算并求解之后可以先后得到组合梁系统的固有频率 ω 和相应的 Ritz 系数 a_n 和 b_n ,将 Ritz 系数分别乘以相应的正交多项式可以得到复合材料组合梁的振型函数:

$$\begin{aligned} \phi_1(\bar{x}_1) &= \sum_{n=1}^{NT} a_n \varphi_n(\bar{x}_1) \\ \phi_2(\bar{x}_2) &= \sum_{n=1}^{NT} b_n \varphi_n(\bar{x}_2) \end{aligned} \quad (17)$$

根据拉格朗日方程并结合能量表达式,将考虑连接非线性的复合材料组合梁动力学方程表示为:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{1j}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_{1j}} + \frac{\partial U_T}{\partial q_{1j}} + \frac{\partial U_b}{\partial q_{1j}} + \frac{\partial U_k}{\partial q_{1j}} &= F_1 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{2j}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_{2j}} + \frac{\partial U_T}{\partial q_{2j}} + \frac{\partial U_b}{\partial q_{2j}} + \frac{\partial U_k}{\partial q_{2j}} &= F_2 \end{aligned} \quad (18)$$

利用计算得出的组合梁振型函数,使用伽辽金截断法对控制方程进行截断,将考虑连接非线性的复合材料组合梁在两个自由度方向上的位移设置为如下形式:

$$\begin{aligned} w_1(\bar{x}_1, t) &= \sum_{j=1}^N \phi_{1j}(\bar{x}_1) q_{1j}(t) \\ w_2(\bar{x}_2, t) &= \sum_{j=1}^N \phi_{2j}(\bar{x}_2) q_{2j}(t) \end{aligned} \quad (19)$$

其中, N 为伽辽金截断系数, $q(t)$ 为广义坐标, ϕ 为组合梁模型各阶所对应的振型函数。

在这里,为了同时兼顾计算结果准确性与计算效率,将采用二阶伽辽金对控制方程进行截断,令伽辽金截断系数 $N = 2$ 。随后将公式(19)代入到公式(18)即可以得到截断后的控制方程。推导出考虑连接非线性的复合材料组合梁动力学方程为:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{N}(\mathbf{q}) = \mathbf{F} \quad (20)$$

其中, \mathbf{M} 为质量矩阵, \mathbf{K} 为刚度矩阵, \mathbf{F} 为外力矩阵, $\mathbf{N}(\mathbf{q})$ 为非线性项,各矩阵的具体形式为:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & m_{34} \\ 0 & 0 & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{N} &= \begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{12} \\ n_{21} \\ n_{22} \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{12} \\ q_{21} \\ q_{22} \end{bmatrix}, \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_{11} \\ \dot{q}_{12} \\ \dot{q}_{21} \\ \dot{q}_{22} \end{bmatrix}, \ddot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_{11} \\ \ddot{q}_{12} \\ \ddot{q}_{21} \\ \ddot{q}_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

组合梁系统采用 Rayleigh 阻尼形式作为总阻尼系数矩阵, 其表达式为:

$$C = c_1 M + c_2 K \tag{22}$$

式中, c_1 和 c_2 分别为质量矩阵与刚度矩阵的比例系数, 其表达式如下:

$$c_1 = 2 \left(\frac{\xi_2}{\omega_2} - \frac{\xi_1}{\omega_1} \right) / \left(\frac{1}{\omega_2^2} - \frac{1}{\omega_1^2} \right),$$

$$c_2 = 2(\xi_2 \omega_2 - \xi_1 \omega_1) / (\omega_2^2 - \omega_1^2) \tag{23}$$

其中 ω_1 和 ω_2 为系统前二阶固有频率, ξ_1 和 ξ_2 为阻尼系数。

外部谐波激励作用于左梁, 其表达式为:

$$F = A_0 \delta(\bar{x} - \bar{x}_0) \sin(\omega t) \tag{24}$$

其中 A_0 为力的幅值, δ 是狄拉克函数, 用于确定外部谐波激励的作用点。

表 1 列出了考虑连接非线性的复合材料组合梁模型的有关几何以及材料参数, 环境温度为 20℃, 忽略方程中的非线性项以及阻尼项, 将相应参数代入到方程便可以求出系统的固有频率。根据 Rayleigh-Ritz 理论计算得出的固有频率以及振型函数的结果受到截断系数 NT 的影响, NT 越大, 复合材料组合梁的位移基函数所包含的项数越多, 计算结果越精确。

Table 1. Parameters of the composite beam model

表 1. 组合梁模型的有关参数

符号	参数	数值
L	单根复合材料梁长度	0.1 m
b	宽度	0.015 m
h	高度	0.002 m
ρ	密度	1512 kg/m ³
n	铺层数	20
μ	泊松比	0.32
k_1	线性拉伸弹簧刚度	5×10^5 N/m
k_2	线性扭转弹簧刚度	1×10^6 Nm/rad

同时, 计算结果满足所需的收敛性要求, 从表 2 可以看出随着截断阶数的增大, 所求计算结果逐渐趋于稳定。当 NT 大于 10 之后, 固有频率的数值不再发生变化, 计算结果收敛。同时证明了 Rayleigh-Ritz 法可以很好地适配本模型。为了兼顾计算的精度以及效率, 若无特殊说明, 后续计算均选取 $NT = 10$ 。

Table 2. Natural frequencies of composite beams with different truncation orders

表 2. 不同截断阶数下复合材料组合梁的固有频率

频率(Hz)	$NT = 2$	$NT = 4$	$NT = 6$	$NT = 8$	$NT = 10$	$NT = 12$
f_1	331.25	330.09	330.09	330.09	330.09	330.09
f_2	948.38	902.94	902.91	902.91	902.91	902.91

图 2(a)展示了组合梁系统固有频率随两个线性弹簧刚度的变化规律, 从图中可以看出前两阶固有频

率随弹簧刚度的增大均呈现先缓慢上升, 后快速增大至趋于稳定的规律。当两个线性弹簧刚度同时增大到 1×10^4 以上时, 第一阶固有频率趋于稳定, 此时意味着线性弹簧连接近似于刚性连接。第二阶固有频率在线性弹簧刚度处于 1×10^3 与 1×10^5 之间时迅速升高, 当线性弹簧刚度同时增大到 1×10^6 以上时, 组合梁系统的第二阶固有频率也趋于稳定; 图 2(b) 描绘了当线性拉伸弹簧刚度 $k_1 = 5 \times 10^5$ N/m 不变时, 组合梁固有频率随线性扭转弹簧刚度 k_2 的变化规律, 可以看出当扭转弹簧刚度小于 1×10^2 Nm/rad 时, 组合梁系统第一阶固有频率随着弹簧刚度的增大而增大, 扭转弹簧刚度变化对于系统第二阶固有频率几乎没有影响。

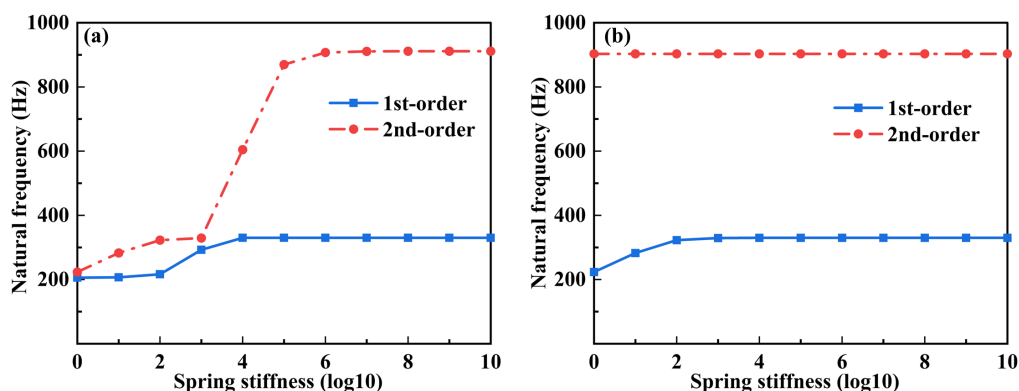


Figure 2. Variation of natural frequency with linear spring stiffness: (a) Variation of $k_1 = k_2$ simultaneously; (b) $k_1 = 5 \times 10^5$ N/m, variation of k_2 only

图 2. 固有频率随线性弹簧刚度的变化规律: (a) 同时改变 $k_1 = k_2$; (b) $k_1 = 5 \times 10^5$ N/m, 只改变 k_2

3. 考虑连接非线性的复合材料组合梁稳态响应

3.1. 谐波平衡法求解

接下来使用谐波平衡法(Harmonic Balance Method, HBM)对动力学方程进行求解, 并对组合梁系统的稳态响应进行分析, 首先假设解的形式为:

$$q_1(t) = A_{10} + \sum_{j=1}^J [A_{1j} \cos(j\omega t) + B_{1j} \sin(j\omega t)]$$

$$q_2(t) = A_{20} + \sum_{j=1}^J [A_{2j} \cos(j\omega t) + B_{2j} \sin(j\omega t)]$$
(25)

其中 J 为所截取的最高谐波阶数, A_{10} 为表征静态偏置的常数项, ω 为外激励频率, A_{1j} 和 B_{1j} 分别为待求的余弦项与正弦项傅里叶系数。将上述假设解代入到常微分方程(20)中, 随后, 采用牛顿迭代法结合伪弧长法对该代数方程组进行数值求解。最后, 通过对各阶谐波分量进行均方根(RMS)计算, 可得到系统在不同激励频率下的稳态响应幅值, 从而构建完整的幅频特性曲线。均方根的形式如下:

$$q_1 = \sqrt{\sum_{j=1}^J (A_{1j}^2 + B_{1j}^2)} / \sqrt{2}$$

$$q_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^J (A_{2j}^2 + B_{2j}^2)} / \sqrt{2}$$
(26)

图 3 为通过对比左梁中点处 Runge-Kutta 法与谐波平衡法的解来进行验证。在这里将线性拉伸弹簧刚度设置为 5×10^5 N/m, 线性扭转弹簧刚度设置为 1×10^6 Nm/rad, 下文中如无特殊说明, 线性弹簧刚度的数值均默认为此大小。为了能够较好地体现出系统固有频率处附近的非线性现象, 此处将外激励幅值大小

设置为 10 N, 将非线性拉伸弹簧刚度设置为 5×10^{14} N/m³, 非线性扭转弹簧刚度设置为 5×10^{14} Nm/rad³。

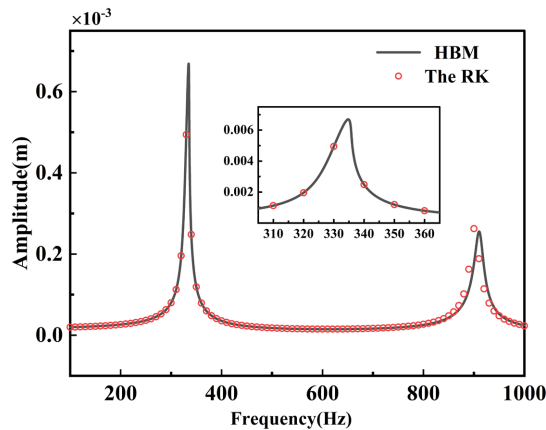


Figure 3. Comparison of amplitude-frequency responses obtained by two solution methods
图 3. 两种方法求解的幅频响应结果对比

从局部放大图中可以看出在第一阶固有频率区间附近, 组合梁系统的幅频响应曲线呈现出向右弯曲特征, 整体向高频方向偏移, 这源于立方非线性刚度对系统等效刚度的作用, 反映了复合材料组合梁系统具有由连接处的立方非线性弹簧主导产生的非线性硬特性。且谐波平衡法与 Runge-Kutta 法的稳态响应计算结果基本吻合, 验证了使用谐波平衡法对考虑连接非线性的复合材料组合梁模型求解的准确性。

3.2. 线性拉伸与扭转弹簧刚度相同时的幅频响应分析

本小节讨论复合材料组合梁连接处线性拉伸与扭转弹簧刚度相同时, 连接处非线性弹簧对其稳态响应的影响。基于图 2(a), 线性拉伸弹簧刚度 $k_1 = 2 \times 10^3$ N/m, 线性扭转弹簧刚度 $k_2 = 2 \times 10^3$ Nm/rad 时, 复合材料组合梁的前 2 阶模态振型如图 4 所示。根据公式(19), 模态振型函数直接决定连接处的相对位移, 此时组合梁两根梁的第一阶模态振型具有一致性, 组合梁整体模态振型相对于连接处中点呈对称分布, 两根梁连接处的变形量相对较小。而组合梁两根梁第二阶模态振型呈现出明显的不一致性, 组合梁整体模态振型相对于连接处中点呈反对称分布, 两根梁连接处出现较大变形量。结合公式(12)可知相对位移越大, 非线性势能所占的比例越高, 非线性现象越明显。

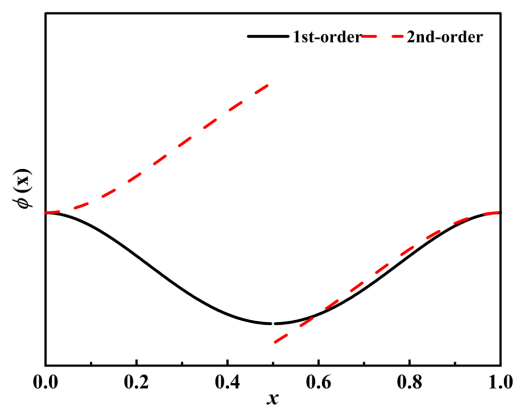


Figure 4. Mode shapes of composite beams under low linear stiffness
图 4. 低线性刚度下复合材料组合梁模态振型图

下面分析不同非线性弹簧刚度对于系统幅频响应曲线的影响。表 3 给出了不同的非线性连接弹簧刚度, 其中 Case 1 为对照组, 表示系统内部的非线性项为零。图 5 为外激励幅值分别为 10 N、15 N 与 20 N 时, 组合梁系统第一阶固有频率附近的幅频响应曲线。由图 5 中结果可以分析得出, 当前条件下, 由于两根梁连接处的位移差极其微小, 一阶固有频率附近的非线性现象并不明显, 可以忽略不计。

Table 3. Nonlinear spring sets used under low linear stiffness

表 3. 低线性刚度下使用的非线性弹簧组

弹簧组	k_3 (N/m ³)	k_4 (Nm/rad ³)
Case 1	0	0
Case 2	6×10^4	6×10^4
Case 3	7×10^4	7×10^4
Case 4	8×10^4	8×10^4

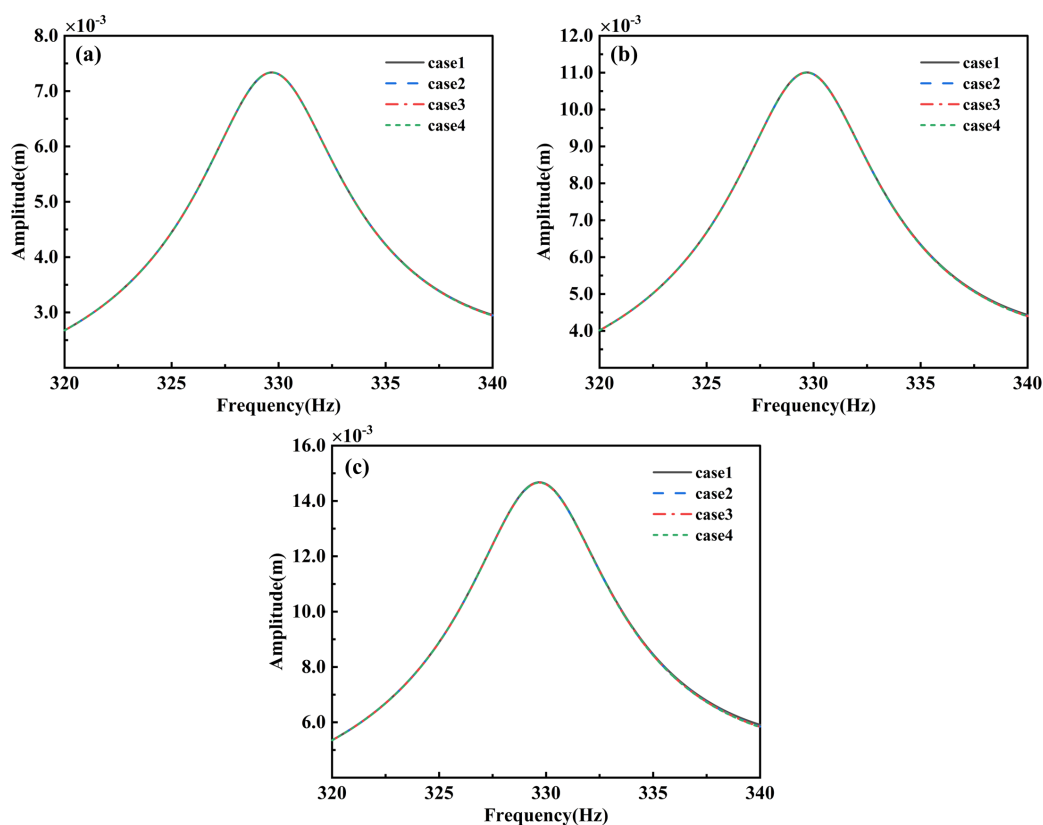


Figure 5. 1st-order amplitude-frequency response curves of different nonlinear springs under low linear stiffness: (a) $F = 10$ N; (b) $F = 15$ N; (c) $F = 20$ N

图 5. 低线性刚度下不同非线性弹簧的一阶幅频响应曲线: (a) $F = 10$ N; (b) $F = 15$ N; (c) $F = 20$ N

图 6 为组合梁系统第二阶固有频率附近的幅频响应曲线。在非线性弹簧的作用下, 系统第二阶固有频率附近的稳态响应发生了显著的变化, 随着非线性弹簧刚度的增大, 非线性项的影响逐渐增强, 共振峰逐渐向右弯曲。图 6 中对比了外激励幅值分别为 10 N、15 N 与 20 N 的稳态幅频响应, 通过分析可知外激励的增大加剧了系统的非线性效应, 幅频响应曲线明显向高频方向弯曲。

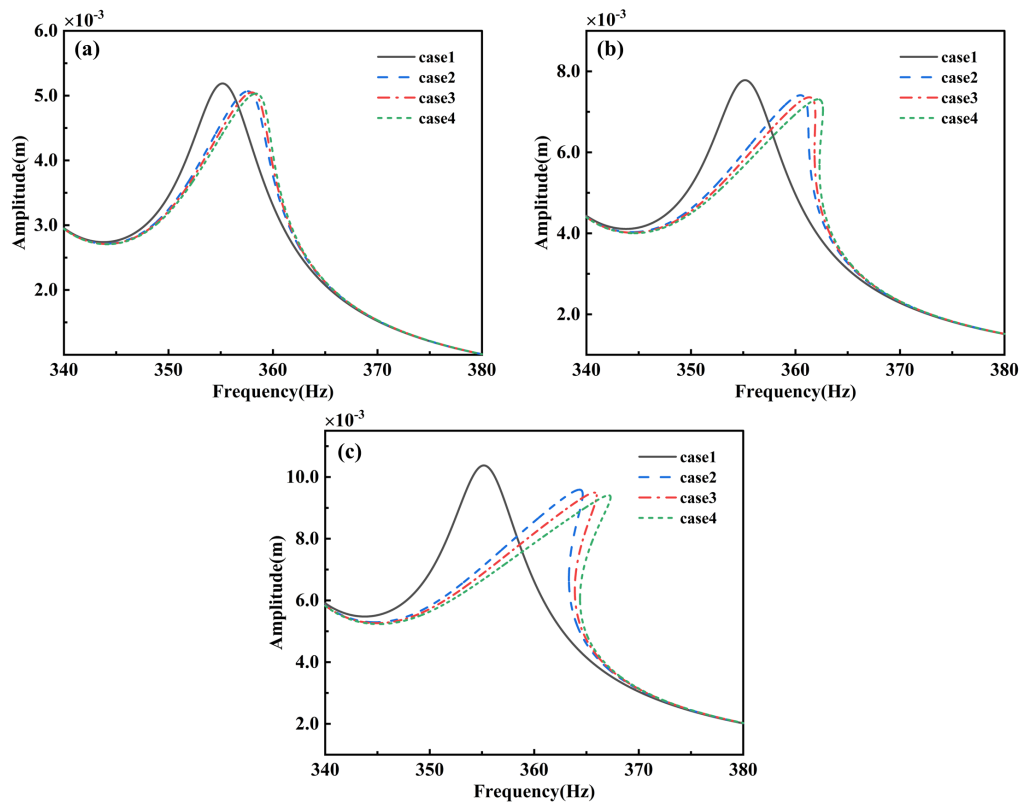


Figure 6. 2nd-order amplitude-frequency response curves of different nonlinear springs under low linear stiffness: (a) $F = 10$ N; (b) $F = 15$ N; (c) $F = 20$ N

图 6. 低线性刚度下不同非线性弹簧的二阶幅频响应曲线: (a) $F = 10$ N; (b) $F = 15$ N; (c) $F = 20$ N

3.3. 线性拉伸与扭转弹簧刚度不同时的幅频响应分析

本小节讨论复合材料组合梁连接处线性拉伸与扭转弹簧刚度不同时, 连接处非线性弹簧对其稳态响应的影 响。基于图 2(b)线性拉伸弹簧刚度 $k_1 = 5 \times 10^5$ N/m, 线性扭转弹簧刚度 $k_2 = 1 \times 10^6$ Nm/rad 时, 组合梁前 2 阶模态振型如图 7 所示。此时复合材料组合梁整体的第一阶与第二阶模态振型相对于连接处中点呈对称分布, 且两根梁连接处均存在微小变形量。根据公式(12)与公式(19)可以分析得出两根梁的模态振型函数在连接端的位移差值会决定非线性势能大小, 从而影 响非线性响应的强弱。

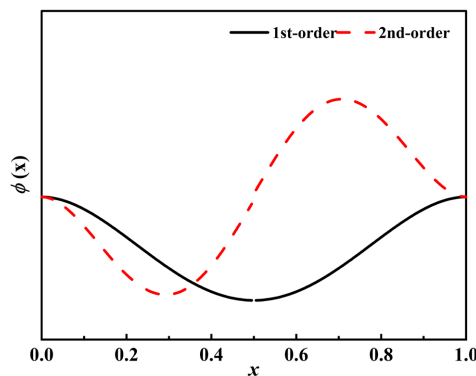


Figure 7. Mode shapes of composite beams under high linear stiffness

图 7. 高线性刚度下复合材料组合梁模态振型图

图 8 为对应的组合梁系统一阶固有频率附近稳态响应随立方非线性弹簧的变化情况。相应的立方非线性弹簧刚度组见表 4。加入非线性弹簧后, 系统的幅频响应曲线表现出非线性硬化现象, 随着立方非线性弹簧刚度的逐渐增大, 曲线逐渐向高频方向弯曲。同时, 外激励幅值的变化不仅会显著影响系统振幅, 外激励幅值越大, 系统的非线性现象越为显著。

Table 4. Nonlinear spring sets used under high linear stiffness

表 4. 高线性刚度下使用的非线性弹簧组

弹簧组	k_3 (N/m ³)	k_4 (Nm/rad ³)
Case 1	0	0
Case 2	3×10^{14}	3×10^{14}
Case 3	4×10^{14}	4×10^{14}
Case 4	5×10^{14}	5×10^{14}

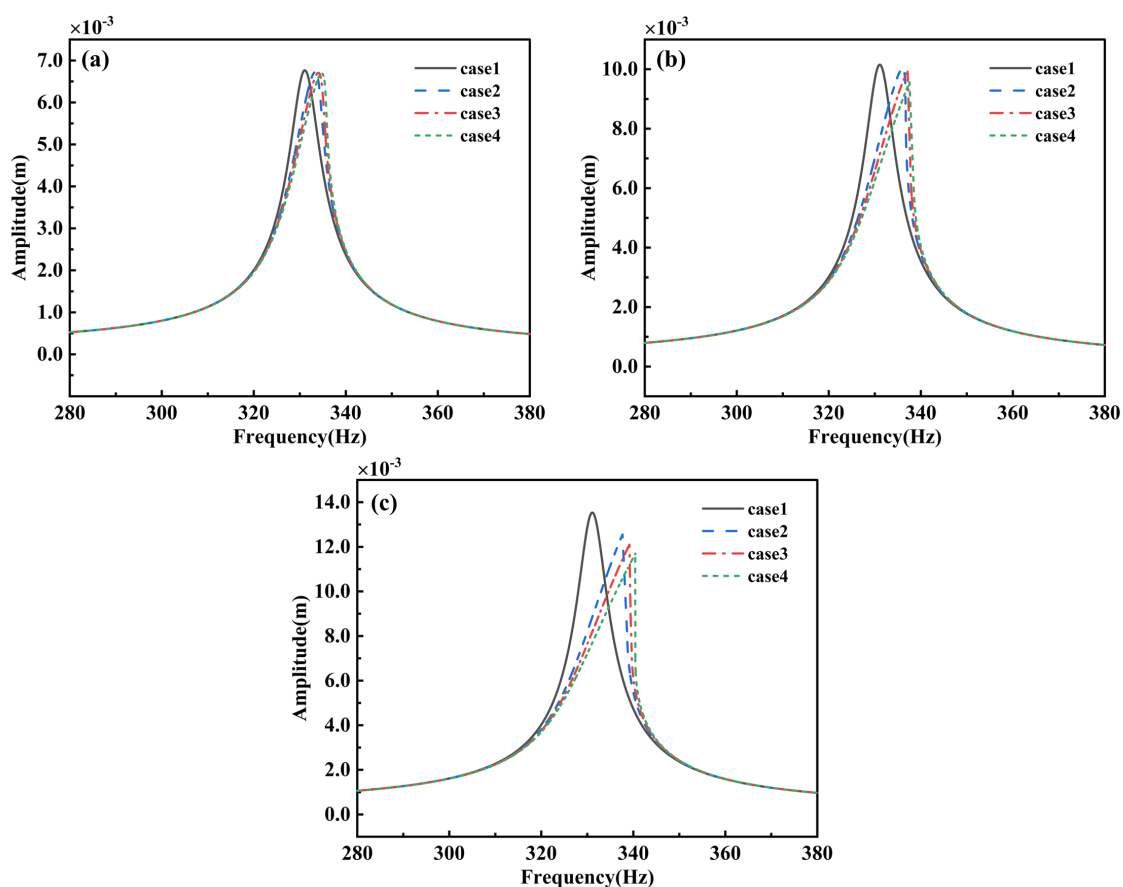


Figure 8. 1st-order amplitude-frequency response curves of different nonlinear springs under high linear stiffness: (a) $F = 10$ N; (b) $F = 15$ N; (c) $F = 20$ N

图 8. 高线性刚度下不同非线性弹簧的一阶幅频响应曲线: (a) $F = 10$ N; (b) $F = 15$ N; (c) $F = 20$ N

图 9 描绘了第二阶固有频率附近的幅频响应曲线。随着激励幅值的增大, 稳态响应的振幅显著提升, 第二阶共振峰受到立方非线性刚度的影响向右偏移, 非线性弹簧刚度的变化对系统第二阶幅频特性曲线的影响较小。

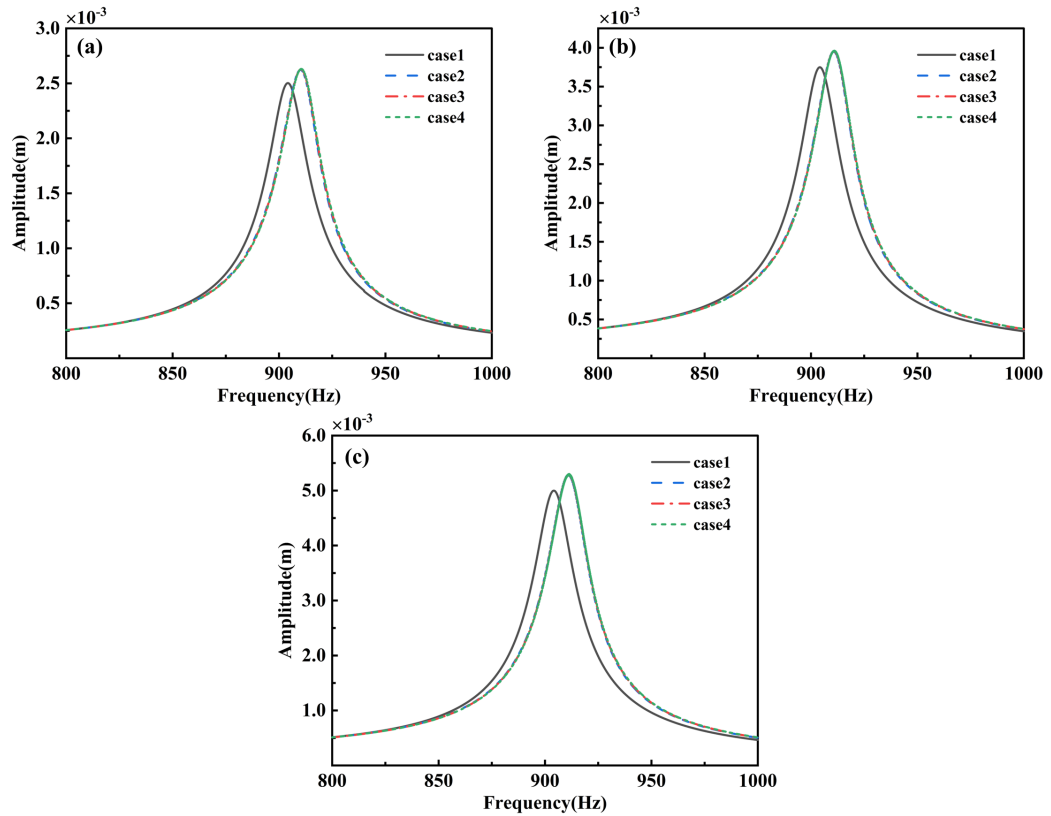


Figure 9. 2nd-order amplitude-frequency response curves of different nonlinear springs under high linear stiffness: (a) $F = 10$ N; (b) $F = 15$ N; (c) $F = 20$ N

图 9. 高线性刚度下不同非线性弹簧的二阶幅频响应曲线: (a) $F = 10$ N; (b) $F = 15$ N; (c) $F = 20$ N

4. 基于镍钛合金钢丝绳的振动抑制

为实现对组合梁的振动控制, 接下来针对前文研究的非线性系统引入具有非线性恢复力与迟滞阻尼力镍钛合金钢丝绳, 此时考虑连接非线性的复合材料组合梁动力学方程可以表示为:

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq + N(q) = F_s \tag{27}$$

$$N = \begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{12} \\ n_{21} \\ n_{22} \end{bmatrix}, F_s = \begin{bmatrix} F_1 - f_{st1} \\ F_2 - f_{st2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{12} \\ q_{21} \\ q_{22} \end{bmatrix}, \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_{11} \\ \dot{q}_{12} \\ \dot{q}_{21} \\ \dot{q}_{22} \end{bmatrix}, \ddot{q} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_{11} \\ \ddot{q}_{12} \\ \ddot{q}_{21} \\ \ddot{q}_{22} \end{bmatrix} \tag{28}$$

式中 f_{st} 表示钢丝绳的作用力项, 其具体表达式为:

$$f_{st} = x_{st} (k_1 w_1 + k_3 w_1^3 + c_1 \dot{w}_1 + r_{21} w_1^2 \dot{w}_1 + r_{12} w_1 \dot{w}_1^2) \tag{29}$$

其中 x_{st} 为钢丝绳的相对尺寸校正参数, 取 0.02, 钢丝绳的其他参数见表 5。

Table 5. Parameters of NiTi-ST

表 5. 镍钛合金钢丝绳参数

构型	k_1 (N/m)	k_3 (N/m ³)	c_1 (N·s/m)	r_{21} (N·s/m ³)	r_{12} (N·s ² /m ³)
S1a	0	4.097×10^8	122.4	1.699×10^6	-6.515×10^4

图 10 给出了加入 NiTi-ST 减振元件后, 复合材料组合梁在不同立方非线性弹簧刚度下的幅频响应曲线。NiTi-ST 中的耦合阻尼系数 r_{12} 提供了非线性软化效应, 阻尼效应主要由 c_1 与 r_{21} 提供, 其绝对值大小决定了阻尼效应与非线性软化效应的强弱。在加入 NiTi-ST 之后, 组合梁系统原本由于非线性弹簧而产生的硬化非线性现象被抵消, 响应幅值降低, S1a 构型的镍钛合金钢丝绳的减振效果良好。通过图 10(d) 的对比可以看出, 加入钢丝绳后的一阶稳态响应基本收敛为同一条平滑曲线, 这说明振幅下降后, 立方非线性弹簧刚度对组合梁系统幅频响应的影响变小。

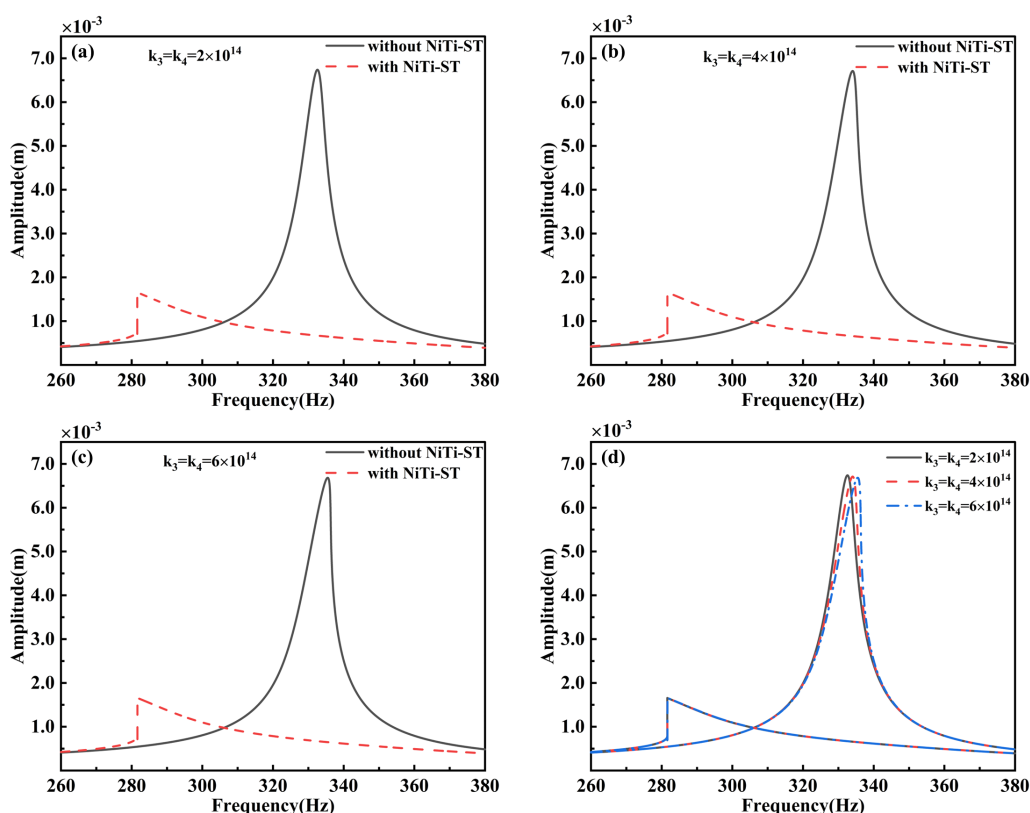


Figure 10. Vibration suppression of NiTi-ST connected with different nonlinear springs

图 10. 镍钛合金钢丝绳对使用不同非线性弹簧连接的振动抑制情况

5. 结论

本文针对考虑连接处非线性的复合材料组合梁系统, 建立了其动力学分析模型, 开展了振动特性、非线性稳态响应分析及减振控制方法的研究。全文的主要研究工作及结论如下:

1) 组合梁系统的固有频率随线性连接弹簧刚度的不同呈现阶段性变化。当线性拉伸和扭转弹簧刚度相同时, 系统固有频率随着弹簧刚度值的增加而逐渐增大最后达到稳定。当线性拉伸弹簧刚度恒定时, 单独改变扭转弹簧刚度对组合梁系统固有频率的影响较小。

2) 综合运用谐波平衡法与 Runge-Kutta 法对系统稳态响应进行求解。结果表明, 立方非线性连接的硬化效应会诱发系统稳态响应曲线出现多解的非线性跳跃现象, 随着非线性刚度及外载荷幅值的增加, 组合梁系统的非线性现象越来越明显。尤其是当组合梁连接处的模态振型呈现反对称情况时, 其对应的模态主振动受到非线性连接的影响是不容忽略的。

3) 镍钛合金钢丝绳在抑制非线性连接组合梁的振动方面展现出良好的效果, 其独特的迟滞阻尼特性

能大幅降低非线性振动响应幅值。

参考文献

- [1] Liu, H., Zhang, Q., Wang, G., Zhou, R., Xu, F. and Chen, Z. (2025) The Vibration Responses Study of a Composite Beam System Coupled through a Nonlinear Coupling Layer. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **140**, Article ID: 108428. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2024.108428>
- [2] Zang, J., Liu, L., Song, X., Zhang, Z., Zhang, Y. and Chen, L. (2024) Dynamics Control of L-Shaped Composite Structure in Electric Aircraft: Theoretical Analysis and Experimental Validation. *Composite Structures*, **334**, Article ID: 117929. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2024.117929>
- [3] Meng, Y., Mao, X., Ding, H. and Chen, L. (2023) Nonlinear Vibrations of a Composite Circular Plate with a Rigid Body. *Applied Mathematics and Mechanics*, **44**, 857-876. <https://doi.org/10.1007/s10483-023-3005-8>
- [4] Guo, Z., Jiang, S., Shen, Y., Jiang, G., Xiao, B., Xu, Q., *et al.* (2025) Nonlinear Dynamic Analysis and Vibration Reduction of Two Sandwich Beams Connected by a Joint with Clearance. *Mechanical Systems and Signal Processing*, **223**, Article ID: 111828. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2024.111828>
- [5] Zang, J., Ren, H., Song, X., Zhang, Z., Zhang, Y. and Chen, L. (2024) Vibration Control of Interconnected Composite Beams: Dynamical Analysis and Experimental Validations. *Mechanical Systems and Signal Processing*, **208**, Article ID: 111008. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2023.111008>
- [6] Ghalandari, M., Mahariq, I., Pourghasem, M., Mulki, H. and Jarad, F. (2022) Identification of Composite-Metal Bolted Structures with Nonlinear Contact Effect. *Computers, Materials & Continua*, **70**, 3383-3397. <https://doi.org/10.32604/cmc.2022.020245>
- [7] 高鹏林, 龚凌云, 王国旭, 等. 非线性周期结构动力学与波动调控研究进展[J]. *力学进展*, 2025, 55(3): 567-641.
- [8] 刘付成, 朱东方. 考虑连接非线性的大型桁架天线分散协调控制[J]. *航空学报*, 2021, 42(11): 139-149.
- [9] Zang, J., Liu, P., Zhang, Y. and Chen, L. (2023) The Performance of Nonlinear Vibration Control via Nitinol-Steel Wire Ropes. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **118**, Article ID: 107058. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2022.107058>
- [10] Zhang, Y., Wang, Z., Cao, M., Song, X., Zang, J., Lacarbonara, W., *et al.* (2023) Vibration Control of Composite Laminate via Nitinol-Steel Wire Ropes: Modeling, Analysis, and Experiment. *Mechanical Systems and Signal Processing*, **204**, Article ID: 110775. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2023.110775>
- [11] Wang, Z., Zang, J., Zhang, Z., Song, X., Zhang, Y. and Chen, L. (2024) Nonlinear Broadband Vibration Reduction of Nitinol-Steel Wire Rope: Mechanical Parameters Determination and Theoretical-Experimental Validation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, **213**, Article ID: 111345. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2024.111345>
- [12] Putranto, T., Yulianto, T., Sujiatanti, S.H., Setyawan, D., Zakki, A.F., Muis Alie, M.Z., *et al.* (2025) Numerical Analysis of Composite Stiffened Nitinol-Steel Wire Ropes and Panels Undergoing Nonlinear Vibrations. *Modelling*, **6**, Article 77. <https://doi.org/10.3390/modelling6030077>
- [13] Wang, Z., Zang, J., Yang, Y., Zhang, Z., Song, X., Zhang, Y., *et al.* (2024) Dynamic Characteristics and Vibration Control of Composite Laminate Wall Panels in Electric Aircraft Using Niti Shape Memory Alloys. *Aerospace Science and Technology*, **155**, Article ID: 109517. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2024.109517>
- [14] Wang, Z.J., Zang, J., Li, Y., *et al.* (2025) Double-Double Layup Composite Tail with Embedded Nitinol Meshes for Variable-Temperature Broadband Vibration Control. *AIAA Journal*, **64**, 1-24.
- [15] Zheng, L., Zhang, Y., Ding, H. and Chen, L. (2021) Nonlinear Vibration Suppression of Composite Laminated Beam Embedded with Nitinol-Steel Wire Ropes. *Nonlinear Dynamics*, **103**, 2391-2407. <https://doi.org/10.1007/s11071-021-06258-w>
- [16] Zang, J., Zhang, W., Song, X., Zhang, Z., Zhang, Y. and Chen, L. (2024) Nonlinear Vibration Control of Interconnected Functionally Graded Fluid-Conveying Pipeline. *Applied Mathematical Modelling*, **131**, 691-716. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2024.04.027>
- [17] Zang, J., Wang, Y. and Zhang, Y. (2023) Analysis of Nonlinear Vibration Control for a Functionally Graded Material Plate by Nitinol-Steel Wire Ropes. *Nonlinear Dynamics*, **111**, 5063-5078. <https://doi.org/10.1007/s11071-022-08103-0>
- [18] Li, D., Zhang, F., Li, Q., Gao, S., Zang, J., Zhang, Y., *et al.* (2026) Dynamical Analysis and Nonlinear Vibration Control of Integrated Composite Beam Structure in Thermal Environment. *Chinese Journal of Aeronautics*, **39**, Article ID: 103702. <https://doi.org/10.1016/j.cja.2025.103702>