Open Journal of Circuits and Systems 电路与系统, 2020, 9(3), 48-54
Published Online September 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ojcs
https://doi.org/10.12677/ojcs.2020.93007

Hans汉斯

信号与系统中用旋转矢量描述负频率和相位角

郭仁春，赵立杰*，白海军，王国刚，王倚天，汪 滢

沈阳化工大学信息工程学院，辽宁 沈阳
Email: *zlj_lunlun@163.com

收稿日期：2020年8月27日；录用日期：2020年9月11日；发布日期：2020年9月18日

摘 要

在一些信号与系统教材中，负频率被说成是没有物理意义的，相位角的定义也不够严格。本文用旋转矢量方法描述负频率和相位角，从几何意义来看如果正频率是矢量的逆时针旋转的角频率，则负频率是顺时针旋转的角频率，从工程角度来看，可以对应发电机的反向旋转。因此负频率不仅有明确的物理意义，也有重要的工程应用价值。一般的相位角采用反正切的三角函数来定义，但这样的定义方式导致相位角取值范围为$-\pi/2$到$\pi/2$，而实际的相位角应该是$-\pi$到π，这个问题可以采用旋转矢量来严格定义。

关键词

信号与系统，负频率，相位角，旋转矢量

A Description of Negative Frequency and Phase Angle by Rotating Vector

Renchun Guo, Lijie Zhao*, Haijun Bai, Guogang Wang, Yitian Wang, Ying Wang

School of Information Engineering, Shenyang University of Chemical Technology, Shenyang Liaoning
Email: *zlj_lunlun@163.com

Received: Aug. 27th, 2020; accepted: Sep. 11th, 2020; published: Sep. 18th, 2020

Abstract

In some teaching materials of signals and systems, negative frequency is said to have no physical meaning, and the definition of phase angle is not strict enough. In this paper, the negative frequency and phase angle are described by the method of rotation vector. From the geometric sense,

*通讯作者。

文章引用: 郭仁春, 赵立杰, 白海军, 王国刚, 王倚天, 汪滢. 信号与系统中用旋转矢量描述负频率和相位角[J]. 电路与系统, 2020, 9(3): 48-54. DOI: 10.12677/ojcs.2020.93007

if the positive frequency is the counter clockwise rotation angular velocity of the vector, then the negative frequency is the angular velocity of clockwise rotation. From the engineering point of view, it can correspond to the reverse rotation of the generator. Therefore, negative frequency not only has clear physical significance, but also has important engineering application values. In general, the phase angle is defined by the arctangent trigonometric function, but the range of the phase angle is −π/2 to π/2, the actual phase angle should be −π to π. This problem can be strictly defined by rotation vector.

Keywords

Signals and Systems, Negative Frequency, Phase Angle, Rotating Vector

1. 引言

一些《信号与系统》教材中说负频率没有物理意义，只是数学上的表述方便，如郑君里和王宝祥的《信号与系统》教材在讲述傅里叶级数章节中都有类似阐述[1] [2]。陈怀琛等人通过工程应用解释了负频率的物理意义[3]。张金平等人考虑负频率在测量过程中的影响[4]，刘型志等人研究了基于负频率频谱干扰消除的高精度低频间谐波检测算法[5]都说明负频率具有重要的工程应用价值。本文将采用旋转矢量来描述频率，从中看出负频率具有明确的几何解释和物理意义。

只要满足狄利克莱条件的周期函数都可以展开成傅里叶级数，傅里叶级数中的相位角一般定义为反正切三角函数形式，但这种方法使得相位角的取值范围是真实范围的一半。本文将采用旋转矢量的方式重新定义相位角，就可以解决上述问题。

2. 傅里叶级数的描述

一般的时域信号 $x(t)$，通过傅里叶变换得到频域信号 $X(\omega)$。对于周期为 T 的信号 $x(t)$，傅里叶级数可以定义成三角和指数两种形式。

2.1. 三角形式的傅里叶级数

$$
\begin{aligned}
x(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \\
a_0 &= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\,\mathrm{d}t \\
a_n &= \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \\
b_n &= \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\sin(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
\tag{1}
$$

其中 $\omega_0 = 2\pi/T$，n 取正整数。

傅里叶级数还可以写成下面的形式

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[\cos\left(n\omega_0 t + \varphi_n\right)\right] \\ A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \varphi_n &= -\arctan\left(b_n / a_n\right) \end{aligned} \tag{2}$$

其中 A_n 为振幅，φ_n 为相位。从公式 2 可以看出，周期函数 $x(t)$是由一系列正弦波叠加而成，当 n 取不同的正整数时，这些正弦波的频率为 $n\omega_0$，振幅为 A_n，相位为 φ_n。

2.2. 指数形式的傅里叶级数

使用欧拉公式，将公式(2)中的正弦波改写成复正弦波形式，从而形成指数形式的傅里叶级数，如公式(3)

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{jn\omega_0 t} \\ c_n &= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\mathrm{e}^{-jn\omega_0 t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\dot{A}_n \mathrm{e}^{j\varphi_n} = \frac{1}{2}\left(a_n - jb_n\right) \end{aligned} \tag{3}$$

其中 n 取所有整数$(-\infty, \infty)$。

公式(1)，(2)，(3)中 a_0，a_n，b_n，c_n，A_n，φ_n 都可以看成是 n 的函数，也可以看成是频率 ω，当 $\omega = n\omega_0$ 的函数，即它们都是连续频率 ω 的离散值。a_n，b_n 中的 $n \geq 1$，然而 c_n 中的 n 可以取负整数。也就是说频率可以为负值。由于频率的定义是每秒钟振动的次数，按此定义负频率就显得不好理解。或许是因为这个原因，一些教材的作者就认为负频率是没有物理意义的。

另外公式(2)中定义的相位角定义为$-\arctan(b_n/a_n)$，这样定义的相位角取值范围为$-\pi/2$ 到 $\pi/2$，而真实的相位角是$-\pi$ 到 π，显然这种取值方式导致相位角少了一半，同时反正切的函数自变量是比值形式，采用比值的方式要保证分母不能为 0，即相位角不能取值为$\pm\pi/2$，但实际的相位角是可以取值为$\pm\pi/2$的。

以上的问题都可以采用旋转矢量来解释和定义。

3. 旋转矢量的定义

如图 1 所示是旋转矢量图，在半径为 r 的圆上，从圆心到圆上的一点 P 定义为旋转矢量 $\boldsymbol{OP}$ 。$\boldsymbol{OP}$ 逆时针旋转，ω 为正值，顺时针旋转，ω 为负值。这就是负频率的几何解释。

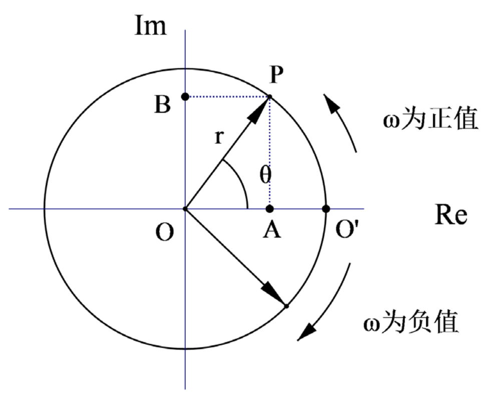

Figure 1. Rotation vector
图 1. 旋转矢量

旋转矢量 $\boldsymbol{OP}$ 以角速度 ω 作圆周运动，P 点在横轴和纵轴上的投影分别为 A 点和 B 点，A 点在横轴往复运动形成实部的正弦波，B 点在纵轴上往复运动形成虚部的正弦波，如图 2 所示。

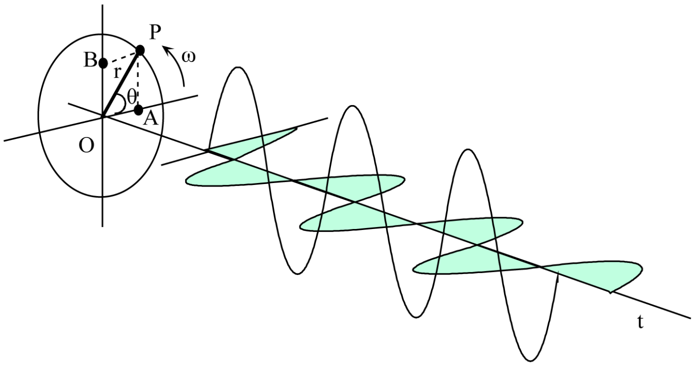

Figure 2. Rotation vector and complex sine wave
图 2. 旋转矢量与复正弦波

图 2 说明，旋转矢量 $\boldsymbol{OP}$ 实际上包含了两个垂直分量，写成更简单的复正弦波形式为

$$re^{j(\omega t+\theta)} = r\left[\cos\left(\omega t+\theta\right)+ j\sin\left(\omega t+\theta\right)\right] \tag{4}$$

$re^{j(\omega t+\theta)}$ 是简单的复正弦波，其立体图不易表达，所以一般用两张图来表示，如图 3 所示。

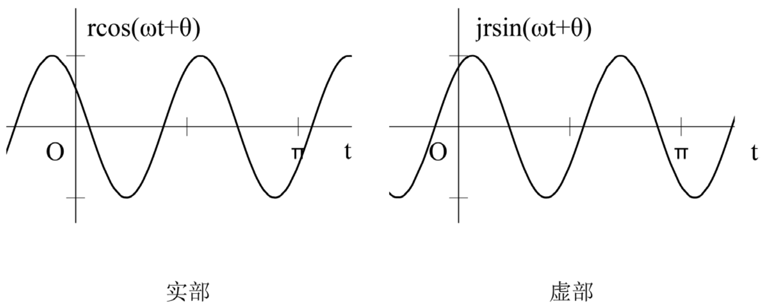

Figure 3. Real part and imaginary part of complex sine wave
图 3. 复正弦波的实部和虚部

考虑两个共轭复正弦波的叠加 $e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}$，此时令 $r = 1$，用旋转矢量法如图 4 所示，旋转矢量 OP 和 OP'共轭，叠加之后虚部抵消，只剩实部形成新的旋转矢量 OQ，Q 点只在实轴上往复运动，振幅为单个复正弦波实部分量的 2 倍。

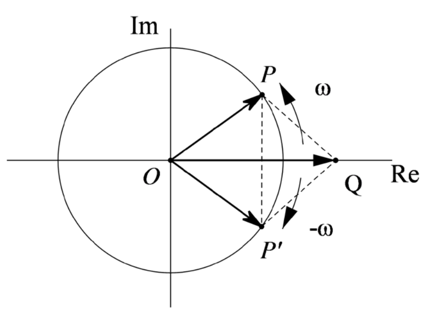

Figure 4. The superposition of two conjugate complex sinusoids forms a real sine wave
图 4. 两个共轭的复正弦叠加形成实数正弦波

其实这两个复正弦波的叠加，正是下面欧拉公式的结果

$$\cos(\omega t)=\frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}，\sin(\omega t)=\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}$$

4. 用旋转矢量解释傅里叶级数中的负频率

对于一个普通的周期实数信号 $x(t)$来说，其傅里叶级数中 a_0，a_n，b_n，c_n，A_n，φ_n很容易用旋转矢量来表示，如图 5 所示，对于公式 3 中的一对 $n\omega_0$ 和-$n\omega_0$ 形成的两个复正弦波对应于旋转矢量的 P 点和 P' 点，成共轭分布，它们的叠加结果使得虚部消失，实部翻倍，这正好是公式 2 的结果。

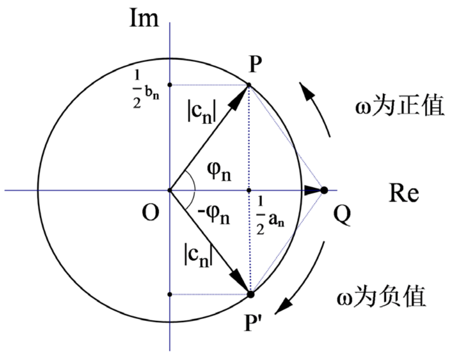

Figure 5. The rotation vector is used to express the parameters of Fourier series
图 5. 用旋转矢量表示傅里叶级数的各项参数

使用旋转矢量对傅里叶级数的解释可以完全推广至非周期信号的傅里叶变换。

旋转矢量不仅能对负频率提供几何解释，还可以用物理形式来实现。设想有两个发电机反向旋转，它们输出的电信号叠加就可以形成一个正弦波形式的电压信号。

负频率的物理意义还可以通过与线速度的类比来探讨。线速度 v 的定义为单位时间内走过的距离，相应的角速度 ω 的定义则为单位时间内旋转矢量扫过的角度，它们的定义如下

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}，\ \omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

其中 s 是距离。

线速度 v 有着非常明确的物理意义，负的线速度表明向着规定方向相反的方向运动。同样 ω 也具有非常明确的物理意义，负角速度就是反向旋转。

通过前面的表述可知，一些信号与系统教材中的负频率没有物理意义的观点是错误的。

5. 用旋转矢量定义相位角

在一些《信号与系统》的教材中相位角的定义如下

$$\varphi_n=-\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) 或 \tan\varphi_n=-\frac{b_n}{a_n} \tag{5}$$

但 arctan()的定义域为(−∞, ∞)值域为(−π/2, π/2)。用来定义相位角显然不全面，例如当 $n = 1$ 时为傅里叶级数中的基波，此时如果 $a_1=1$，$b_1=1$，得到傅里叶级数中基波项为

$$\cos(\omega_0 t)+\sin(\omega_0 t)=\sqrt{2}\cos\left(\omega_0 t+\frac{\pi}{4}\right)$$

此时的相位角为 π/4。如果 $a_1=-1$，$b_1=-1$，则

$$-\cos(\omega_0 t)-\sin(\omega_0 t)=\sqrt{2}\cos\left(\omega_0 t+\frac{5\pi}{4}\right) \tag{6}$$

此时的相位角应为 5π/4，但如果按照公式 5 的定义，显然两个相位角都应该是 π/4，这显然不正确，错误的原因是相位角取值少了一半。另外，当 $a_n=0$ 时，出现分母为 0 的情况，按照这种定义就无法定义相位角为±π/2 的情况。

下面用旋转矢量法来重新定义相位角。如图 6 所示，在圆上的点所构成的旋转矢量与横轴的夹角定义为相位角 φ_n，在一个周期内取值为 $-\pi<\varphi_n\le\pi$。

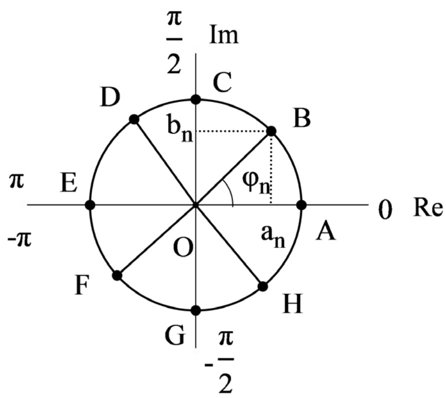

Figure 6. Relationship between phase angle φ_n and a_n, b_n
图 6. 相位角 φ_n 与 a_n, b_n 的关系

各点所对应的 a_n，b_n，φ_n 如下

A：$a_n>0$，$b_n=0$，$\varphi_n=0$　　B：$a_n>0$，$b_n>0$，$0<\varphi_n<\pi/2$

C：$a_n=0$，$b_n>0$，$\varphi_n=\pi/2$　　D：$a_n<0$，$b_n>0$，$\pi/2<\varphi_n<\pi$

E：$a_n<0$，$b_n=0$，$\varphi_n=\pi$　　F：$a_n<0$，$b_n<0$，$-\pi<\varphi_n<-\pi/2$

G：$a_n=0$，$b_n<0$，$\varphi_n=-\pi/2$　　H：$a_n>0$，$b_n<0$，$-\pi/2<\varphi_n<0$

O：$a_n=0$，$b_n=0$，φ_n 取任意值

因此相位角可以定义为

$$\varphi_n=\arg(a_n,b_n) \tag{7}$$

或者定义为

$$\varphi_n=\arg(c_n) \tag{8}$$

其中 c_n 是复数。

这样定义的相位角同时考虑了 a_n，b_n 的符号关系，也避免了±π/2 处出现分母为 0 的情况。

6. 结论

由于《信号与系统》教材中所描述的信号大部分是实数形式，但实数只是复数形式在实轴上的投影而已，此时正频率和负频率都变为数据点在实轴上的左右移动，因而看起来是一致的，都是振动的次数，负的振动次数给人的印象是很难理解的，因而导致了负频率没有物理意义的说法。但如果从整体复数形式来考虑就能发现正负旋转现象。也就是从低维视角考虑高维问题必然会导致大量的信息丢失。

本文采用二维复数形式的旋转矢量来解释负频率正是从高维视角来考虑低维问题的一种方法。用旋转矢量可以不仅很容易解释负频率的几何意义与物理意义，还可以消除相位角定义中的歧义，让相位角的取值范围更全面，也避免了原先定义中分母为 0 的现象。

类似“只有数学意义，而没有物理意义”的说法过于武断，数学上能讲得通的问题，当没有物理现实与之相对应时，不应该简单地抛弃，它可能蕴含更深层次的发现。

基金项目

沈阳化工大学教育教学培育工程项目资助。

参考文献

[1] 郑君里, 应启珩, 杨为理. 信号与系统[M]. 第二版. 北京: 高等教育出版社, 2000.

[2] 王宝祥. 信号与系统[M]. 第三版. 北京: 电子工业出版社, 2010.

[3] 陈怀琛, 方海燕. 论频谱中负频率成分的物理意义[J]. 电气电子教学学报, 2008, 30(1): 29-32.

[4] 张金平, 李建立, 段晨. 计及负频率影响的新能源发电低频间谐波检测方法[J]. 电测与仪表, 2020, 57(2): 95-100.

[5] 刘型志, 周全, 张淮清, 田娟, 陈文礼. 基于负频率频谱干扰消除的高精度低频间谐波检测算法[J]. 重庆大学学报, 2020, 43(2): 50-59.