Operations Research and Fuzziology 运筹与模糊学, 2021, 11(1), 15-18
Published Online February 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/orf
https://doi.org/10.12677/orf.2021.111003

Hans汉斯

模糊粗糙集的相似度及其生成

马　茜[1]，霍录景[2]，王　瑞[1]

[1]陆军军事交通学院基础部，天津
[2]北京师范大学珠海分校应用数学学院，广东 珠海
Email: maqian530@126.com

收稿日期：2020年12月24日；录用日期：2021年1月26日；发布日期：2021年2月2日

摘　要

在分析*L*-模糊集相似度的性质基础上，给出模糊粗糙集的相似度的定义和生成方法，强相似度的生成还可以从不同角度通过构造特殊函数来实现。

关键词

模糊粗糙集，(强)相似度，*L*-模糊集，三角模，反三角模

The Similarity Degree of Fuzzy Rough Sets and Its Generating

Qian Ma[1], Lujing Huo[2], Rui Wang[1]

[1]General Courses Department, Military Transportation University, Tianjin
[2]School of Applied Mathematics, Beijing Normal University Zhuhai, Guangdong Zhuhai
Email: maqian530@126.com

Received: Dec. 24th, 2020; accepted: Jan. 26th, 2021; published: Feb. 2nd, 2021

Abstract

Based on the analysis of the properties of similarity of the L-fuzzy sets, the definition and the generating method of the fuzzy rough sets similarity are given. The generation of strong similarity can also be realized by constructing special functions from different angles.

Keywords

Fuzzy Rough Sets, (Strong) Similarity Degree, L-Fuzzy Sets, Triangle Module, Anti-Triangle Module

文章引用: 马茜, 霍录景, 王瑞. 模糊粗糙集的相似度及其生成[J]. 运筹与模糊学, 2021, 11(1): 15-18.
DOI: 10.12677/orf.2021.111003

1. 引言

模糊集理论的核心问题之一是相似度度量，其得到了国内外众多学者的关注和研究，很多学者已经将模糊相似度测度应用到模式识别、医疗诊断、聚类分析和多属性决策等领域。相似度度量是描述两个集合之间的相似程度的量，模糊模式识别的研究对象具有模糊性。不同的相似度度量的形式不同，各有所长，探讨模糊粗糙集的相似度的生成方法可以便于应用时有更多的选择。文章在分析 L-模糊集相似度的性质基础上，给出模糊粗糙集的相似度的定义和生成方法，指出强相似度的生成还可以从不同角度通过构造特殊函数来实现。

2. 相似度

定义1 [1]　假设$(L,\le)$是非空的偏序集，$D: L\times L\to[0,1]$，对于$\forall\alpha,\beta,\gamma\in L$有：

1) 当$\alpha\le\beta$时，$D(\beta/\alpha)=1$。

2) 当$\alpha\le\beta\le\gamma$时，$D(\alpha/\gamma)\le D(\alpha/\beta)$，则称$D$为$L$上的包含度函数。$D(\beta/\alpha)$为$\alpha$在$\beta$中的包含度。

若修改(2)为：3) 当$\alpha\le\beta\le\gamma$时，满足：$D(\alpha/\gamma)\le D(\alpha/\beta)\wedge D(\beta/\gamma)$，则称$D$为强包含度函数。$D(\beta/\alpha)$为$\alpha$在$\beta$中的强包含度。

设$U_1,U_2,\cdots,U_n$为论域，$U=U_1\times U_2\times\cdots\times U_n$，$\mathcal{F}_L(U_i)$是$U_i$上$L$-模糊集组成的集合，($i=1,2,\cdots,n$)，$H_n(U)=\left\{A\mid A=\prod_{i=1}^{n}A_i, A_i\in\mathcal{F}_L(U_i), i=1,2,\cdots,n\right\}$，$A(u)=\left(\prod_{i=1}^{n}A_i\right)(u_1,u_2,\cdots,u_n)=\overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}}A_i(u_i)$，$u\in U$。

定义2 [2]　假设$(L,\le)$为非空的偏序集，$SM: L\times L\to[0,1]$，对于$\forall\alpha,\beta,\gamma\in L$有：

1) $SM(\alpha,\alpha)=1$。

2) $SM(\alpha,\beta)=SM(\beta,\alpha)$。

3) 当$\alpha\le\beta\le\gamma$时，$SM(\alpha,\gamma)\le SM(\alpha,\beta)$。则称$SM$为$L$上的相似度函数。$SM(\alpha,\beta)$为$\alpha$与$\beta$的相似度量。

若修改(3)为：当$\alpha\le\beta\le\gamma$时，$SM(\alpha,\gamma)\le SM(\alpha,\beta)\wedge SM(\beta,\gamma)$，则称$SM$为$L$上的强相似度函数。$SM(\alpha,\beta)$为$\alpha$与$\beta$的强相似度量。

定理1　设SM_1,SM_2分别是$\mathcal{F}_L(U_1),\mathcal{F}_L(U_2)$上的相似度函数，那么$SM(A,B)=TS[SM_1(A_1,B_1),SM_2(A_2,B_2)]$是$H_2(U)$上的相似度函数。而$SM_1,SM_2$是强相似度函数，那么$SM$也为强相似度函数，其中$A,B\in H_2(U)$，$A=\prod_{i=1}^{2}A_i$，$B=\prod_{i=1}^{2}B_i$。

证　不妨设TS是反三角模，SM_1,SM_2是强相似度。

1) 显然$0\le SM(A,B)\le 1$。

2) $SM(A,A)=S[SM_1(A_1,A_1),SM_2(A_2,A_2)]=S(1,1)=1$。

3) $SM(A,B)=S[SM_1(A_1,B_1),SM_2(A_2,B_2)]=S[SM_1(B_1,A_1),SM_2(B_2,A_2)]=SM(B,A)$。

4) $A\subseteq B\subseteq C\Rightarrow A_i\subseteq B_i\subseteq C_i, i=1,2$

$$\Rightarrow SM(A,C)=S[SM_1(A_1,C_1),SM_2(A_2,C_2)]\le S[SM_1(A_1,B_1),SM_2(A_2,B_2)]=SM(A,B)$$

$$SM(A,C)=S\left[SM_1(A_1,C_1),SM_2(A_2,C_2)\right]\le S\left[SM_1(B_1,C_1),SM_2(B_2,C_2)\right]=SM(B,C)$$

$\Rightarrow SM(A,C)\le SM(A,B)\wedge SM(B,C)$。

定理1的意义是可以递推生成 $H_n(U)$ 上的(强)相似度函数。

定理2 $\mathcal{F}_L(U)$ 为论域U上的全体L-模糊集，D为 $\mathcal{F}_L(U)$ 上的包含度函数，那么 $SM(A,B)=TS(D(B/A),D(A/B))$ 为 $\mathcal{F}_L(U)$ 上的相似度函数。而当D为强包含度函数，那么SM为强相似度函数。

证：不妨设TS是反三角模，已知D是强包含度：

1) 显然 $0\le SM(A,B)\le 1$。

2) $SM(A,A)=S(D(A/A),D(A/A))=S(1,1)\ge S(0,1)=1$，故 $SM(A,A)=1$。

3) 由反三角模的对称性，易证SM的对称性。

4) $A\subseteq B\subseteq C\Rightarrow D(A/C)=D(A/B)\wedge D(B/C)$，$D(C/A)=D(B/A)=D(C/B)=1$

$\Rightarrow SM(A,C)=S(1,D(A/C))$，$SM(A,B)=S(1,D(A/B))$，$SM(B,C)=S(1,D(B/C))$

$\Rightarrow SM(A,C)\le SM(A,B)$，$SM(A,C)\le SM(B,C)\Rightarrow SM(A,C)\le SM(A,B)\wedge SM(B,C)$。从而$SM$为强相似度。

可以利用 $\mathcal{F}_L(U_i)$ 上的包含度函数 $D_i(i\le n)$ 通过不同的方式生成 $H_n(U)$ 上的相似度函数。也可以利用 $\mathcal{F}_L(U_i)$ 上的强包含度函数 $D_i(i\le n)$ 通过不同的方式生成 $H_n(U)$ 上的强相似度函数。如可以用递推法生成 $H_n(U)$ 上的(强)包含度函数[1]，然后根据定理2生成 $H_n(U)$ 上的(强)相似度函数。当然第一步根据定理2生成每一个 $\mathcal{F}_L(U_i)$ 上的(强)相似度，第二步根据定理1通过递推法生成 $H_n(U)$ 上的(强)相似度也是可行的，这两种方式生成的(强)相似度可能是不同的。而下面的定理3说明这两种方式在一定的条件下生成的(强)相似度是相同的。当然，只要这两个过程使用的是同一个三角模或反三角模，则在 $H_n(U)$ 上生成的相似度就是相同的，但是在同一过程中不必要求是同一个三角模或反三角模。我们给出了结论(3) (4)。

定理3 设 $A,B\in H_2(U)$，D_i 是 $\mathcal{F}_L(U_i)(i\le 2)$ 上的(强)包含度，则

1) $$\begin{aligned}SM(A,B)&=T\left[T(D_1(B_1/A_1),D_1(A_1/B_1)),T(D_2(B_2/A_2),D_2(A_2/B_2))\right]\\&=T\left[T(D_1(B_1/A_1),D_2(B_2/A_2)),T(D_1(A_1/B_1),D_2(A_2/B_2))\right]\end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned}SM(A,B)&=S\left[S(D_1(B_1/A_1),D_1(A_1/B_1)),S(D_2(B_2/A_2),D_2(A_2/B_2))\right]\\&=S\left[S(D_1(B_1/A_1),D_2(B_2/A_2)),S(D_1(A_1/B_1),D_2(A_2/B_2))\right]\end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned}SM(A,B)&=T\left[S(D_1(B_1/A_1),D_1(A_1/B_1)),S(D_2(B_2/A_2),D_2(A_2/B_2))\right]\\&=T\left[S(D_1(B_1/A_1),D_2(B_2/A_2)),S(D_1(A_1/B_1),D_2(A_2/B_2))\right]\end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned}SM(A,B)&=S\left[T(D_1(B_1/A_1),D_1(A_1/B_1)),T(D_2(B_2/A_2),D_2(A_2/B_2))\right]\\&=S\left[T(D_1(B_1/A_1),D_2(B_2/A_2)),T(D_1(A_1/B_1),D_2(A_2/B_2))\right]\end{aligned}$$

只证(4)。(1) (2) (3)可类似证明。

证 记 $D_1(B_1/A_1)=\alpha$，$D_1(A_1/B_1)=\beta$，$D_2(B_2/A_2)=a$，$D_2(A_2/B_2)=b$

$$\begin{aligned}SM(A,B)&=S\left[T(\alpha,\beta),T(a,b)\right]=S\left[\alpha,T(\beta,T(a,b))\right]=S\left[\alpha,T(\beta,T(b,a))\right]\\&=S\left[\alpha,T(T(\beta,b),a)\right]=S\left[\alpha,T(a,T(\beta,b))\right]=S\left[T(\alpha,a),T(\beta,b)\right]\end{aligned}$$ 。即(4)成立。

3. 模糊粗糙集的相似度及生成

定义3　X上模糊粗糙集组成的集合为 $FR(X)$，如果映射 $SM_R : FR(X)\times FR(X)\to[0,1]$，$\forall A=(A_L,A_U)$，$B=(B_L,B_U)$，$C=(C_L,C_U)\in FR(X)$ 有：

1) 当 $A=B$ 时，$SM_R\left[(A_L,A_U),(B_L,B_U)\right]=1$。

2) $SM_R\left[(A_L,A_U),(B_L,B_U)\right]=SM_R\left[(B_L,B_U),(A_L,A_U)\right]$。

3) 当 $A\subseteq B\subseteq C$ 时 $SM_R\left[(A_L,A_U),(C_L,C_U)\right]\le SM_R\left[(A_L,A_U),(B_L,B_U)\right]$。

则称 SM_R 为 $FR(X)$ 上的相似度函数，$SM_R\left[(A_L,A_U),(B_L,B_U)\right]$ 为A与B之间的相似度量。把 $SM_R\left[(A_L,A_U),(B_L,B_U)\right]$ 简记为 $SM_R(A,B)$。

若修改(3)为：当 $A\subseteq B\subseteq C$ 时，$SM_R(A,C)\le SM_R(A,B)\wedge SM_R(B,C)$，则称 SM_R 为 $FR(X)$ 上的强相似度函数，$SM_R(A,B)$ 为A与B之间的强相似度量。

映射 $g: FR(X)\to H_2(U)$，$g((A_L,A_U))=A_L\times A_U$。可证g为保序映射[3]。因此就可由 $(H_2(U),\subseteq)$ 上的(强)包含度和(强)相似度生成 $FR(X)$ 上的(强)包含度和(强)相似度。

定理4　设 $FR_L=\{A_L\mid(A_L,A_U)\in FR(X)\}$，$FR_U=\{A_U\mid(A_L,A_U)\in FR(X)\}$。$D_L,D_U$ 分别为 FR_L,FR_U 上的(强)包含度，SM_L,SM_U 分别为 FR_L,FR_U 上的(强)相似度.

则1) $SM_R^1(A,B)=TS\left[SM_L(A_L,B_L),SM_U(A_U,B_U)\right]$ 是 $(FR(X),\subseteq)$ 上的(强)相似度.

2) $SM_R^2(A,B)=\omega_1 SM_L(A_L,B_L)+\omega_2 SM_U(A_U,B_U)$ 是 $(FR(X),\subseteq)$ 上的(强)相似度。其中 $\omega_1+\omega_2=1,\omega_1\ge 0,\omega_2\ge 0$。

证明略。

下面通过构造某些函数而不是利用三角模或者反三角馍，依据(强)包含度函数生成新的(强)相似度函数。

定理5　记 $FR(X)$ 上的(强)包含度函数为D，$f:[0,1]^2\to[0,1]$ 为一个对称非减函数满足 $f(1,1)=1$，那么对 $\forall A,B\in FR(X)$，$SM(A,B)=f\left(D(A/B),D(B/A)\right)$ 为A与B之间的(强)相似度量。

证：以强相似度为例证。

1) $SM(A,B)=f\left(D(A/B),D(B/A)\right)=f\left(D(B/A),D(A/B)\right)=SM(B,A)$。

2) $SM(A,A)=f\left(D(A/A),D(A/A)\right)=f(1,1)=1$。

3) $A\subseteq B\subseteq C$，则由f的非减性，$\begin{aligned}SM(A,C)&=f\left(D(A/C),D(C/A)\right)=f\left(D(A/C),1\right)\le f\left(D(A/B),1\right)\\&=f\left(D(A/B),D(B/A)\right)=SM(A,B)\end{aligned}$。

同理可证 $SM(A,C)\le SM(B,C)$。故 $SM(A,C)\le SM(B,C)\wedge SM(A,B)$。

故 $SM(A,B)=f\left(D(A/B),D(B/A)\right)$ 为 A 与 B 之间的强相似度量。

参考文献

[1]　马茜, 米洪海. Nanda 意义下模糊粗糙集的包含度及其生成[J]. 军事交通学院学报, 2015(5): 87-89.

[2]　袁修久, 张文修. 模糊粗糙集的包含度和相似度[J]. 模糊系统与数学, 2005, 19(1): 111-115.

[3]　张文修, 徐宗本, 等. 包含度理论[J]. 模糊系统与数学, 1996, 10(4): 1-9.