

空间主缆悬索桥水平母线鞍座设计位置计算的改进方法

鲁齐锋, 孙泰屹, 邓小康, 李小贝

武汉科技大学汽车与交通工程学院, 湖北 武汉

收稿日期: 2023年10月20日; 录用日期: 2023年12月22日; 发布日期: 2023年12月29日

摘要

以空间悬索桥的主缆与索鞍之间存在的几何及力学关系为依据, 引入空间斜率作为缆索系统方程的基本参数, 利用空间悬索桥索鞍左右两侧主缆切点的空间斜率作为未知量来构建二元非线性方程组, 并利用二分法求解上述方程组即可确定空间缆索悬索桥水平母线鞍座的设计位置。改进方法简化了传统求解多元非线性方程组方法的复杂过程, 给出了二元非线性方程组的求解区间, 无需任何约束条件和迭代初值即可完成计算并保证计算结果收敛。通过对比该方法和传统方法计算出来的索鞍位置, 证明该改进方法具有较高的精度。

关键词

空间斜率, 水平母线, 鞍座位置, 二分法

Improved Method for Designing Position Calculation of Horizontal Bus Saddle of Spatial Main Cable Suspension Bridge

Qifeng Lu, Taiyi Sun, Xiaokang Deng, Xiaobei Li

College of Automotive and Transportation Engineering, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan Hubei

Received: Oct. 20th, 2023; accepted: Dec. 22nd, 2023; published: Dec. 29th, 2023

Abstract

Based on the geometric and mechanical relations between the main cable and the cable saddle of

文章引用: 鲁齐锋, 孙泰屹, 邓小康, 李小贝. 空间主缆悬索桥水平母线鞍座设计位置计算的改进方法[J]. 运筹与模糊学, 2023, 13(6): 7645-7654. DOI: 10.12677/orf.2023.136749

the spatial suspension bridge, the spatial slope is introduced as the basic parameter of the cable system equation, and the spatial slope of the main cable tangential points on the left and right sides of the cable saddle of the spatial suspension bridge is used as the unknown quantity to construct the binary nonlinear equations. The design position of the horizontal bus saddle of the space cable suspension bridge can be determined by solving the above equations with dichotomous method. The improved method simplifies the complicated process of the traditional method of solving multivariate nonlinear equations, and gives the solving interval of binary nonlinear equations. It can complete the calculation without any constraints and iterative initial values and ensure the convergence of the calculation results. By comparing the results of saddle position calculated by this method and the traditional method, it is proved that the improved method has higher precision.

Keywords

Spatial Slope, Horizontal Bus, Saddle Position, Dichotomy

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

对于空间悬索桥, 影响其线形和结构受力的一个重要因素就是索鞍位置安放的准确性[1] [2] [3] [4]。如果其位置安放不当不仅影响到悬索桥的几何形状, 还会在桥塔的底部产生巨大弯矩, 就有可能使桥塔产生偏位。因此, 对空间悬索桥索鞍的设计位置进行精确的计算具有重要意义[5] [6] [7] [8]。

李传习等[9] [10]根据索鞍和主缆的几何相容条件建立起多元非线性方程组, 并用牛顿-拉斐森法求解方程组得到空间悬索桥鞍座设计位置, 但这类方法对约束条件和迭代初值的选取具有较高要求, 计算过程也较为繁琐。齐东春[11]提出了可自动满足主缆与鞍座相切的鞍座单元, 通过对单元进行状态求解可推导出单元节点力, 在计算中发现该单元具有很高的计算精度, 但该方法在对初始值进行迭代时不够精确, 在某些特殊情况下会由于迭代初值精度不高而导致计算结果不收敛。

针对上述方法存在的问题, 本文在分析主缆与索鞍几何及力学关系的基础上, 引入空间斜率作为缆索系统方程的基本参数, 并根据主缆与索鞍存在的几何相容条件建立二元非线性方程组, 最后采用二分法求解上述方程组即可求解出空间缆索悬索桥水平母线鞍座的设计位置。在整个计算过程中不需要初始值的参与即可实现对所有水平母线鞍座设计位置的计算结果收敛。

2. 以空间斜率为基本参数的主缆线形方程的推导

2.1. 主缆索段的划分

在分析过程中, 假定主缆具备以下三条性能: 1) 主缆的材料满足胡克定律, 在正常的使用过程中其伸长量与受力呈线性关系; 2) 主缆仅承受拉应力; 3) 主缆在受力情况下其横截面积的变化在计算中可以忽略不计[12]。

对图 1 所示的空间主缆, 以缆索和吊杆连接处将主缆索段划分开。以主缆的最低点 S 点为分界点将主缆分为左右两部分, 并以 S 为坐标原点定义沿纵桥向、横桥向及铅垂方向分别为其 x 轴、 y 轴及 z 轴。

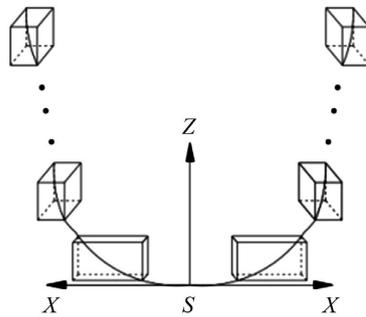


Figure 1. Schematic diagram of cable segment division
图 1. 索段划分示意图

2.2. 以空间斜率为基本参数的主缆线形方程的提出

将任意一个索段的坐标原点移动到该索段曲线上斜率为 0 的位置，可以得到所有索段的悬链线方程。索段坐标系示意如图 2。

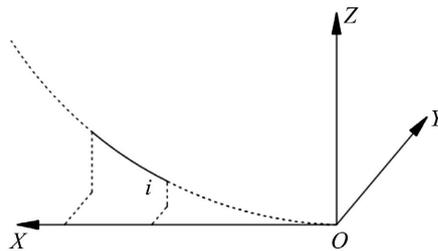


Figure 2. Schematic diagram of cable segment coordinate system
图 2. 索段坐标系示意图

本文作者通过前期研究得到全桥的主缆线形方程[13]:

$$x = \frac{H_i H_x k}{EAq} + \frac{H_x}{q} \ln(k + \sqrt{1+k^2}) \quad (1)$$

$$z = \frac{H_i^2 k^2}{2EAq} + \frac{H_i}{q} (\sqrt{1+k^2} - 1) \quad (2)$$

$$y = \frac{H_{ys}}{H_x} x_c + \sum_{i=1}^{s-1} \frac{H_{yi}}{H_x} L_i \quad (3)$$

其中 x 、 y 、 z 分别为索段 i 上某一点沿纵桥方向、沿横桥方向及沿铅垂方向的坐标； H_x 、 H_{yi} 、及 V_i 分别为索段 i 所承受索力沿纵桥方向上、沿横桥方向及沿铅垂方向的分力大小； H_i 为索段 i 所受索力投影到 XOY 平面的索力大小； H_{ys} 为第 s 个索段沿横桥方向所受的索力大小； L_i 为索段 i 的最高点至最低点沿着 x 轴方向的长度； x_c 为第 n 个索段上的任意一点 c 与该索段最低点沿 x 轴方向上的距离； E 为主缆弹性模量； A 为主缆的横截面积； q 为主缆单位自重集度； k 为空间斜率(对鞍座两侧的主缆上任意一点引一条切线，其相对于 XOY 平面的倾斜程度)。

3. 水平母线鞍座位置计算

3.1. 水平母线鞍座模型的构建

空间悬索桥鞍座为了支承所有受力的主缆能够平顺地改变其方向[14]，鞍座上的鞍槽曲线在理论上应

该是三维结构的。但在工程上，往往会对其三维结构进行简化处理，将鞍座的主缆中心线设计到同一圆柱面上，并以该圆柱面上的母线倾斜程度不同将鞍座分为水平母线鞍座和倾斜母线鞍座两类[15]。本文讨论的水平母线鞍座可以看作圆柱体的某一部分，并构建如图3所示的鞍座模型便于分析计算。

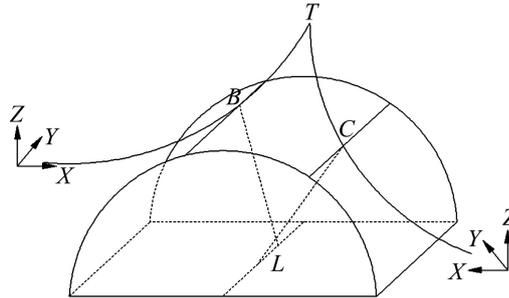


Figure 3. Elevation of cable saddle
图3. 索鞍立面图

图3中， T 为理论顶点(索鞍两侧主缆的切点顺延悬链线的交点[12])， B 、 C 点分别为鞍座左右两侧主缆的切点，线 L 即为圆柱体的中轴线。 T 点在理论顶点左侧主缆坐标系下的坐标 (x'_0, y'_0, z'_0) ，空间斜率 k_1 ； B 点在理论顶点左侧主缆坐标系下的坐标 (x'_1, y'_1, z'_1) ，空间斜率 k_3 。 T 点在理论顶点右侧主缆坐标系下的坐标 (x''_0, y''_0, z''_0) ，空间斜率 k_2 。 C 点在理论顶点右侧主缆坐标系下的坐标 (x''_2, y''_2, z''_2) ，空间斜率 k_4 。本文所求的索鞍设计位置即为该模型中轴线 L 的位置。为便于计算线 L 的位置，将图4索鞍模型投影到平面 XOZ 上。投影后，图4坐标系的原点、 x 轴及 z 轴不变。

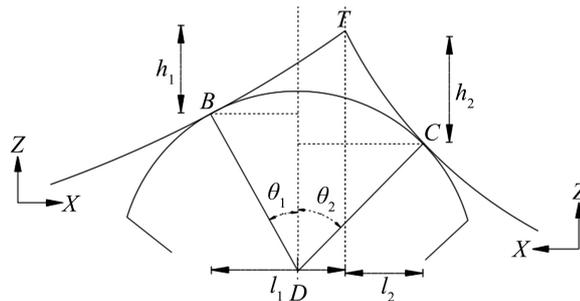


Figure 4. Planar projection of cable saddle
图4. 索鞍平面投影图

在图4中，圆心 D 点即是本文最终所需计算的索鞍设计位置，由于图4为 XOZ 二维坐标系，故在理论顶点左、右两侧坐标系下，理论顶点坐标分别简化为 (x'_0, z'_0) 及 (x''_0, z''_0) ，理论顶点的平面斜率(T 点所在切线相对于 x 轴的倾斜程度)分别为 g_1 、 g_2 ，左右侧主缆切点 B 、 C 点平面斜率分别为 g_3 、 g_4 ， B 、 C 点坐标分别为 (x'_1, z'_1) 、 (x''_2, z''_2) ， B 、 C 点空间斜率分别为 k_3 、 k_4 。 θ_1 是 B 、 D 之间的连线与过 D 点的铅直线的夹角， θ_2 是 C 、 D 之间的连线与过 D 点的铅直线的夹角。 h_1 是 B 、 T 在 z 轴方向上的距离， h_2 是 C 、 T 在 z 轴方向上的距离。 l_1 是 B 、 T 在 x 轴方向上的距离， l_2 是 C 、 T 在 x 轴方向上的距离。

利用图3、图4中的计算模型，构建方程组，计算水平母线鞍座设计位置。在图4中未知量有左、右切点空间斜率，左、右切点平面斜率，左、右两侧主缆切点的坐标。已知量有理论顶点坐标，左、右两侧主缆所受拉应力沿着纵桥向的分力 H_{x1} 、 H_{x2} ，沿着横桥向的分力 H_{y1} 、 H_{y2} ，沿着铅垂方向的分力 V_1 、 V_2 ，主缆的弹性模量 E 、单位自重集度 q 及横截面积 A 。

3.2. 索鞍位置的计算

将索鞍切点于空间中进行分析, 索鞍切点分析图见图 5。

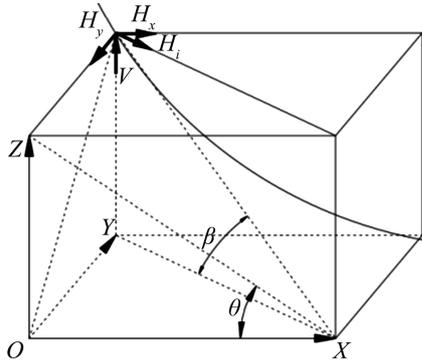


Figure 5. Analysis of the tangent point of the saddle
图 5. 索鞍切点分析图

将主缆在切点处所受拉力投影到水平面 XOY 上其大小为:

$$H_i = \sqrt{H_x^2 + H_y^2} \quad (4)$$

切点空间斜率 k 的表达式:

$$k = \frac{V}{H_i} \quad (5)$$

切点平面斜率 g 的表达式:

$$g = \frac{V}{H_x} \quad (6)$$

由式(4)、式(5)、式(6)可得:

$$g = \frac{k \cdot \sqrt{H_x^2 + H_y^2}}{H_x} \quad (7)$$

切点平面斜率 g 可由夹角 θ 表示:

$$\tan \theta_1 = g_3, \quad \tan \theta_2 = g_4 \quad (8)$$

由图 4 可知, BT 和 TC 之间的水平距离之和相等于 BD 和 DC 之间水平距离之和:

$$l_1 + l_2 = R \sin \theta_1 + R \sin \theta_2 \quad (9)$$

式(8)与式(9)联立得:

$$l_1 + l_2 = R \left(\frac{g_3}{\sqrt{1 + g_3^2}} + \frac{g_4}{\sqrt{1 + g_4^2}} \right) \quad (10)$$

式(7)与式(10)联立得:

$$l_1 + l_2 = R \left(k_3 \sqrt{\frac{H_{x1}^2 + H_{y1}^2}{k_3^2 (H_{x1}^2 + H_{y1}^2) + H_{x1}^2}} + k_4 \sqrt{\frac{H_{x2}^2 + H_{y2}^2}{k_4^2 (H_{x2}^2 + H_{y2}^2) + H_{x2}^2}} \right) \quad (11)$$

右切点 C 的 x 坐标:

$$x_2'' = \frac{H_{i2}H_{x2}k_4}{EAq} + \frac{H_{x2}}{q} \ln(k_4 + \sqrt{1+k_4^2}) \quad (12)$$

右切点 C 与理论顶点 T 在纵桥方向的距离:

$$l_2 = x_0'' - x_2'' = x_0'' - \frac{H_{i2}H_{x2}k_4}{EAq} - \frac{H_{x2}}{q} \ln(k_4 + \sqrt{1+k_4^2}) \quad (13)$$

左切点 B 的 x 坐标:

$$x_1' = \frac{H_{i1}H_{x1}k_3}{EAq} + \frac{H_{x1}}{q} \ln(k_3 + \sqrt{1+k_3^2}) \quad (14)$$

左切点 B 与理论顶点 T 在纵桥方向的距离:

$$l_1 = x_0' - x_1' = x_0' - \frac{H_{i1}H_{x1}k_3}{EAq} - \frac{H_{x1}}{q} \ln(k_3 + \sqrt{1+k_3^2}) \quad (15)$$

式(11)、式(13)、(15)联立得:

$$\begin{aligned} & x_0' - \frac{H_{i1}H_{x1}k_3}{EAq} - \frac{H_{x1}}{q} \ln(k_3 + \sqrt{1+k_3^2}) + x_0'' - \frac{H_{i2}H_{x2}k_4}{EAq} - \frac{H_{x2}}{q} \ln(k_4 + \sqrt{1+k_4^2}) \\ & = R \left(k_3 \sqrt{\frac{H_{x1}^2 + H_{y1}^2}{k_3^2(H_{x1}^2 + H_{y1}^2) + H_{x1}^2}} + k_4 \sqrt{\frac{H_{x2}^2 + H_{y2}^2}{k_4^2(H_{x2}^2 + H_{y2}^2) + H_{x2}^2}} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

式(16)所构建方程的未知参数只有左、右切点空间斜率 k 。求解该方程, 只需构建另一个仅含有左、右切点空间斜率两个未知参数的方程。

图 4 中左、右切点 B 和 C 分别与理论顶点 T 之间的竖直距离之差等于左、右切点分别与圆心之间的竖直距离之差:

$$h_2 - h_1 = R \cos \theta_1 - R \cos \theta_2 \quad (17)$$

式(8)与式(17)联立得:

$$h_2 - h_1 = R \left(\frac{1}{\sqrt{1+g_3^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+g_4^2}} \right) \quad (18)$$

式(7)与式(18)联立得:

$$h_2 - h_1 = R \left(\frac{H_{x1}}{\sqrt{k_3^2(H_{x1}^2 + H_{y1}^2) + H_{x1}^2}} - \frac{H_{x2}}{\sqrt{k_4^2(H_{x2}^2 + H_{y2}^2) + H_{x2}^2}} \right) \quad (19)$$

右切点 C 的 z 坐标:

$$z_2'' = \frac{H_{i2}k_4^2}{2EAq} + \frac{H_{i2}}{q} \sqrt{1+k_4^2} - \frac{H_{i2}}{q} \quad (20)$$

右切点 C 与理论顶点在竖直方向的距离:

$$h_2 = z_0'' - z_2'' \quad (21)$$

左切点 B 的 z 坐标:

$$z_1' = \frac{H_{i1}k_3^2}{2EAq} + \frac{H_{i1}}{q} \sqrt{1+k_3^2} - \frac{H_{i1}}{q} \quad (22)$$

左切点 B 与理论顶点在竖直方向的距离:

$$h_1 = z'_0 - z'_1 \tag{23}$$

式(19)、式(20)、(22)联立得:

$$z''_0 + \frac{H_{i2}^2 k_4^2}{2EAq} + \frac{H_{i2}}{q} \sqrt{1+k_4^2} - \frac{H_{i2}}{q} - z'_0 - \frac{H_{i1}^2 k_3^2}{2EAq} - \frac{H_{i1}}{q} \sqrt{1+k_3^2} + \frac{H_{i1}}{q} = R \left(\frac{H_{x1}}{\sqrt{k_3^2 (H_{x1}^2 + H_{y1}^2) + H_{x1}^2}} - \frac{H_{x2}}{\sqrt{k_4^2 (H_{x2}^2 + H_{y2}^2) + H_{x2}^2}} \right) \tag{24}$$

式(24)是本文构建的另一个未知参数只有切点空间斜率的方程。它和式(16)组成一个二元非线性方程组，通过二分法即可求解。

求解过程应首先给出左、右切点的求解范围，再两次利用二分法分别逼近左、右切点的正确解，直到左、右切点空间斜率均满足精度要求。具体步骤如图 6。

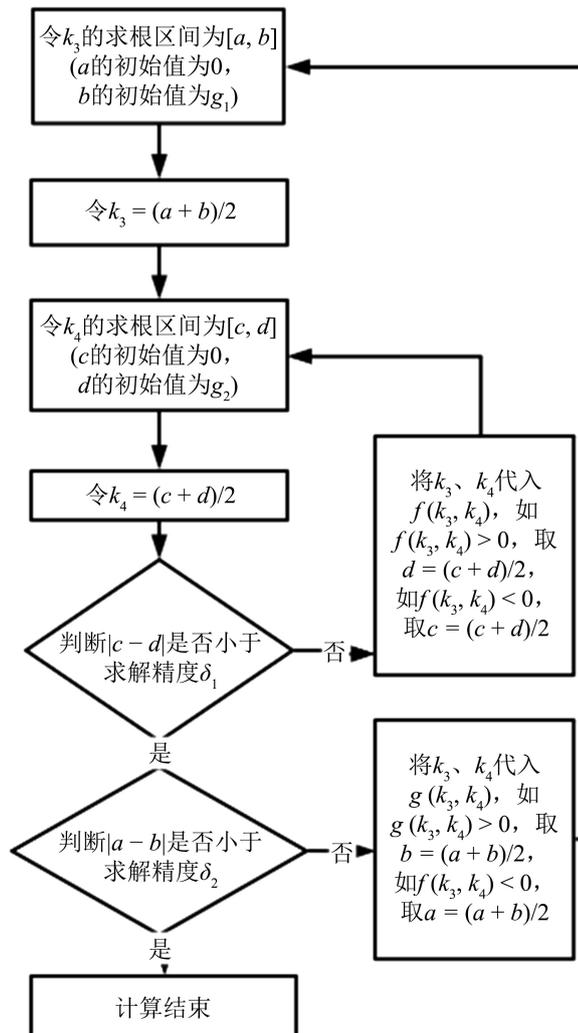


Figure 6. Calculation process of spatial slope k_3, k_4
图 6. 空间斜率 k_3, k_4 计算流程

得到左、右切点空间斜率的解后，再利用式(1)、式(2)、式(25)、式(26)可得左、右切点的坐标。

$$y'_1 = y'_0 - \frac{H_{y1}}{H_{x1}}(x'_0 - x'_1) \quad (25)$$

$$y''_2 = y''_0 - \frac{H_{y2}}{H_{x2}}(x''_0 - x''_2) \quad (26)$$

最后通过左、右切点与圆心之间的几何关系确定圆心 D 的位置。

$$\begin{aligned} x_3 &= x_1 + R \sin \theta_1 \\ &= x_2 - R \sin \theta_2 \\ &= x_1 + R \sqrt{\frac{H_{x1}^2 + H_{y1}^2}{k_3^2 (H_{x1}^2 + H_{y1}^2) + H_{x1}^2}} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} &= x_2 - R \sqrt{\frac{H_{x2}^2 + H_{y2}^2}{k_4^2 (H_{x2}^2 + H_{y2}^2) + H_{x2}^2}} \\ z_3 &= z_1 - R \cos \theta_1 \\ &= z_2 - R \cos \theta_2 \\ &= z_1 - R \frac{H_{x1}}{\sqrt{k_3^2 (H_{x1}^2 + H_{y1}^2) + H_{x1}^2}} \\ &= z_2 - R \frac{H_{x2}}{\sqrt{k_4^2 (H_{x2}^2 + H_{y2}^2) + H_{x2}^2}} \end{aligned} \quad (28)$$

4. 算例

某自锚式空间悬索桥(桥跨 83 + 260 + 83 m)采用独柱式桥塔，索鞍半径为 3.2 m，鞍座上主缆材料基本参数为：横截面面积 $A = 0.0715 \text{ m}^2$ 、自重集度 $q = 6.2 \text{ KN/m}$ 、弹性模量 $E = 198,000 \text{ MPa}$ 。低塔侧理论顶点为(2273.0000, 97.7050, 1.5000)，在成桥状态理论线形计算中，得出索鞍左、右两侧主缆索力沿着纵桥向、横桥向及铅垂方向的分量分别为 $H_{x1} = 20929.52 \text{ kN}$ 、 $H_{y1} = 0 \text{ kN}$ 、 $V_1 = 16600.98 \text{ kN}$ (边跨)， $H_{x2} = 20929.53 \text{ kN}$ 、 $H_{y2} = 5176.92 \text{ kN}$ 、 $V_2 = 16918.72 \text{ kN}$ (中跨)。高塔侧理论顶点为(2533.0000, 99.9150, 1.5000)，同理计算出索鞍左、右主缆索力沿着纵桥向、横桥向及铅垂方向的分量分别为分量 $H_{x1} = 20923.26 \text{ kN}$ 、 $H_{y1} = 5744.63 \text{ kN}$ 、 $V_1 = 17238.66 \text{ kN}$ (边跨)， $H_{x2} = 20923.26 \text{ kN}$ 、 $H_{y2} = 0 \text{ kN}$ 、 $V_2 = 16237.99 \text{ kN}$ (中跨)。

利用算例的已知条件将算例的坐标体系转化为图 4 的坐标体系。由式(1)、式(2)、式(5)可得，低塔侧 T 点在索鞍左侧坐标系下空间斜率 $k_1 = 0.793184936874$ ， T 点坐标(2459.25, 934.55)，低塔侧 T 点在索鞍右侧坐标系下空间斜率 $k_2 = 0.784717036837$ ， T 点坐标(2436.89, 944.49)。高塔侧 T 点在索鞍左侧坐标系下空间斜率 $k_1 = 0.794498074908$ ， T 点坐标(2462.14, 971.77)，高塔侧 T 点在索鞍右侧坐标系下空间斜率 $k_2 = 0.776073613768$ ， T 点坐标(2413.00, 898.56)。最后解得低塔侧左切点空间斜率 = 0.792427884476，右切点空间斜率 $k_2 = 0.783968691582$ 。高塔侧左切点空间斜率 $k_1 = 0.793751716614$ ，右切点空间斜率 $k_2 = 0.775319099426$ 。

将本文的计算结果同文献[9]的结果放在一起进行对比，如表 1。

Table 1. System resulting data of standard experiment**表 1.** 索鞍位置计算结果

| 计算项目 | 文献[9]计算结果 | 本文计算结果 |
|--------------|------------------------------|------------------------------|
| 低塔侧坐标(m) | | |
| 左切点(x, y, z) | (2270.9920, 1.5000, 96.1128) | (2270.9936, 1.5000, 96.1142) |
| 右切点(x, y, z) | (2274.9930, 2.0418, 96.0943) | (2274.9916, 1.9926, 96.0958) |
| 索鞍圆心(x, z) | (2272.98, 93.6050) | (2272.98, 93.6062) |
| 高塔侧坐标(m) | | |
| 左切点(x, y, z) | (2531.0250, 2.0357, 98.2876) | (2531.0237, 2.0426, 98.2875) |
| 右切点(x, y, z) | (2535.0220, 1.5000, 98.3460) | (2535.0157, 1.5000, 98.3514) |
| 索鞍圆心(x, z) | (2533.06, 95.815) | (2533.05, 95.822) |

5. 结论

1) 本文提出了一种改进的求解空间缆索悬索桥水平母线鞍座设计位置的方法。以空间斜率作为主缆线形方程的基本参数,并结合索鞍与其主缆存在的变形相容关系及力学关系,以鞍座左、右两侧主缆的切点空间斜率为未知量建立二元非线性方程组,再求解该二元非线性方程组即可得到水平母线索鞍设计位置。

2) 本文改进方法采用二分法求解非线性方程组,计算过程无需任何迭代初值与约束条件,大大减少了计算量,同时对所有水平母线鞍座设计位置的计算均可保证收敛。

3) 通过算例计算水平母线鞍座位置并与传统算法进行对比,发现改进算法计算的水平母线鞍座设计位置精度较高。

参考文献

- [1] 王路,沈锐利,王昌将,等. 悬索桥主缆与索鞍间侧向力理论计算方法与公式研究[J]. 土木工程学报, 2017, 50(12): 87-96.
- [2] 沈锐利,廖海黎. 悬索桥静动力空间非线性计算有限元模型及其应用[C]//全国桥梁结构学术大会论文集. 上海: 同济大学出版社, 1992: 935-940.
- [3] 唐茂林,沈锐利,强士中. 悬索桥索鞍位置设计[J]. 公路交通科技, 2001(8): 55-58.
- [4] 张海龙. 自锚式悬索桥的风洞试验和抗风性能的研究[D]: [硕士学位论文]. 长沙: 湖南大学, 2005: 5.
- [5] 万田保. 悬索桥主鞍座的几何位移特征及与总体布置的关系[J]. 桥梁建设, 2003(3): 28-31.
- [6] 孙晋莉. 松雅湖自锚式悬索桥成桥线形计算及施工控制分析[D]: [硕士学位论文]. 长沙: 中南大学, 2011.
- [7] 唐茂林. 大跨度悬索桥空间几何非线性分析与软件开发[D]: [博士学位论文]. 成都: 西南交通大学, 2003.
- [8] 甘祥. 空间缆索悬索桥主索鞍构型与力学特性研究[D]: [硕士学位论文]. 成都: 西南交通大学, 2019. <https://doi.org/10.27414/d.cnki.gxnju.2019.001400>
- [9] 李传习,姚明,柯红军. 空间缆索悬索桥倾斜母线索鞍设计位置的计算方法[J]. 中国公路学报, 2009, 22(5): 48-53+59. <https://doi.org/10.19721/j.cnki.1001-7372.2009.05.008>
- [10] 李传习,刘海波,赵朝阳. 空间主缆悬索桥水平母线索鞍设计位置计算方法[C]//中国土木工程学会桥梁及结构工程分会,上海市城乡建设和交通委员会. 第十九届全国桥梁学术会议论文集(下册). 北京: 人民交通出版社, 2010: 8.
- [11] 齐东春. 大跨径悬索桥主缆精细化计算研究[D]: [博士学位论文]. 成都: 西南交通大学, 2014.

- [12] 李传习. 混合梁悬索桥非线性精细计算理论及其应用[D]: [博士学位论文]. 长沙: 湖南大学, 2006: 3.
- [13] 邓小康, 徐恭义. 一种悬索桥主缆计算的新方法[J]. 铁道学报, 2019, 41(5): 133-141.
- [14] 许琳. 悬索桥施工过程中缆索系统的精细模拟[D]: [硕士学位论文]. 大连: 大连理工大学, 2013.
- [15] 李传习, 王雷, 刘光栋, 等. 悬索桥索鞍位置的分离算法[J]. 中国公路学报, 2005(1): 67-72.