

# 非线性规划的区间中智集多属性三支决策

李丽莎, 冯源

太原师范学院数学与统计学院, 山西 晋中

收稿日期: 2024年2月29日; 录用日期: 2024年3月19日; 发布日期: 2024年4月30日

## 摘要

得分函数是处理区间中智集多属性决策问题的有力工具, 但确定合适的得分函数并不容易。针对这个问题, 本文提出一个新的得分函数, 克服了其他得分函数在某些值不可分辨的问题, 并且在单值中智集和区间中智集上都表现良好。另一方面, 用改进的得分函数构造出一对非线性规划模型, 以求得各方案的区间型评估值来确定条件概率, 并用客观的方法求得相对损失函数。最后由区间型的三支决策分类规则对方案进行分类。并以一个实例说明该方法的有效性。

## 关键词

改进得分函数, 非线性规划, 条件概率, 损失函数, 三支决策

# Multi-Attribute Three-Way Decision Making Based on Nonlinear Programming Method

Lisha Li, Yuan Feng

School of Mathematics and Statistics, Taiyuan Normal University, Jinzhong Shanxi

Received: Feb. 29<sup>th</sup>, 2024; accepted: Mar. 19<sup>th</sup>, 2024; published: Apr. 30<sup>th</sup>, 2024

## Abstract

Score function is a powerful tool to dealing with multi-attribute decision making problems in the interval neutrosophic sets, but it is not easy to determine the appropriate score function. To solve this problem, a new scoring function is proposed in this paper, which overcomes the problem that other scoring functions are indistinguishable in some values, and performs well on both single neutrosophic sets and interval neutrosophic sets. On the other hand, a pair of nonlinear programming models are constructed by using the improved score function to obtain the interval evaluation value of each scheme to determine the conditional probability, and the relative loss function is obtained by objective method. Finally, the scheme is classified by three decision classi-

fication rules of interval type. An example is given to illustrate the effectiveness of the method.

## Keywords

Improved Score Function, Nonlinear Programming, Conditional Probability, Loss Function, Three-Way Decision

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

1999年, Smarandache [1]首次提出了中智集的概念, 相比于模糊集[2]、直觉模糊集[3]和区间直觉模糊集[4], 中智集具有可以处理不完整、不确定和不一致信息的优势。它主要是由隶属度、犹豫度、非隶属度组成, 这三者之间是相互独立的。但中智集在实际的科学和工程等决策问题中的应用比较困难, 于是, Wang 等人在此基础上进一步提出了单值中智集[5]和区间中智集[6]。随着中智集在多属性决策中的应用, 中智集的排序和比较大小的问题也成为关注的热点。2014年, Şahin R 在文献[7]中首次提出了中智集的得分函数, 但该公式在取某些值时存在不可区分大小的问题。因此, 2016年, Garg H [8]对中智集的得分函数进行了优化, 虽然克服了上述问题, 但却在另一些特殊实例中出现不可比较的现象。2021年, Nafei A H [9]进一步优化了 Garg H 提出的中智集得分函数, 但问题依然存在。为此, 本文对中智集的得分函数再一次进行优化, 彻底克服了上述缺点。

三支决策理论为解决多属性决策问题提供了不同的视角, 扩展了传统的二支决策理念。因此, 自 Yao [10]提出三支决策以来, 它在决策领域就起到独特的作用, 其主要目的是将粗糙集模型的正域、负域和边界域解释为接受、拒绝和不承诺这三个决策结果, 其决策思想更符合人类的认知规律。目前, 三支决策理论已在多属性决策问题中取得了广泛的应用。例如, 赵蒙等人[11]提出了基于优势关系的毕达哥拉斯模糊集上的三支决策, 刘久兵等人[12]提出了权重信息未知的区间直觉模糊三支群决策方法, Pan X H 等人[13]提出了一个新的区间值多属性三支决策, Liu P 等人[14]提出了基于灰色关联度的单值中智集的三支决策, Jiao 等人[15]在单值中智集下提出了基于欧式距离和余弦相似度的三支决策模型。这些研究将三支决策理论融合到不同的决策中。目前, 线性规划和非线性规划方法在多属性决策问题中已有较成熟的应用[16] [17] [18] [19] [20], 但在三支决策研究中应用还较少, 对于区间中智集的三支决策研究更为稀少。为使三支决策更加客观化, 本文利用构建的一对非线性规划模型以获取条件概率这一重要参数, 其中损失函数则利用属性值通过改进得分函数转换求得。

本文的其他章节的结构如下。第1节回顾了区间中智集和三支决策的基本理论知识。第2节介绍了区间中智集改进的得分函数。第3节提出了区间中智集的非线性规划的多属性决策模型。第4节构建了区间中智集的新三支决策方法。第5节结合案例分析验证本文所提方法的有效性和合理性。

## 2. 预备知识

本节中, 简要回顾区间中智集、区间数和三支决策的基本概念。

### 2.1. 区间中智集

定义1 [6]设  $U$  为给定的集合, 该集合的元素为  $x$ , 集合  $U$  上的一个区间中智集  $X$  由隶属度、犹豫度、

非隶属度组成, 这三者分别由  $[T_X^-, T_X^+]$ 、 $[I_X^-, I_X^+]$ 、 $[F_X^-, F_X^+]$  表示, 即  $X = \langle [T_X^-, T_X^+], [I_X^-, I_X^+], [F_X^-, F_X^+] \rangle$ 。

其中  $T_X^-, T_X^+, I_X^-, I_X^+, F_X^-, F_X^+ \in [0, 1]$ , 且  $0 \leq T_X^+ + I_X^+ + F_X^+ \leq 3$ 。

当  $X$  中只有一个元素时, 称  $X$  为区间中智数。

定义 2 [21] 设  $a = \langle [t_a^-, t_a^+], [i_a^-, i_a^+], [f_a^-, f_a^+] \rangle$  和  $b = \langle [t_b^-, t_b^+], [i_b^-, i_b^+], [f_b^-, f_b^+] \rangle$  是两个区间中智数, 则有:

$$\textcircled{1} \quad a \oplus b = \langle [t_a^- + t_b^- - t_a^- \cdot t_b^-, t_a^+ + t_b^+ - t_a^+ \cdot t_b^+], [i_a^- \cdot i_b^-, i_a^+ \cdot i_b^+], [f_a^- \cdot f_b^-, f_a^+ \cdot f_b^+] \rangle,$$

$$\textcircled{2} \quad na = \langle [1 - (1 - t_a^-)^n, 1 - (1 - t_a^+)^n], [(i_a^-)^n, (i_a^+)^n], [(f_a^-)^n, (f_a^+)^n] \rangle,$$

$$\textcircled{3} \quad a^c = \langle [f_a^-, f_a^+], [1 - i_a^+, 1 - i_a^-], [t_a^-, t_a^+] \rangle.$$

## 2.2. 区间数的运算法则

已知  $a = [a^-, a^+]$ ,  $b = [b^-, b^+]$  是任意两个区间数, 且  $a^- < a^+$ ,  $b^- < b^+$ , 则区间数的运算法则为:

$$\textcircled{1} \quad a + b = [a^-, a^+] + [b^-, b^+] = [a^- + b^-, a^+ + b^+],$$

$$\textcircled{2} \quad a - b = [a^-, a^+] - [b^-, b^+] = [a^- - b^+, a^+ - b^-],$$

$$\textcircled{3} \quad a \cdot b = [a^-, a^+] \cdot [b^-, b^+] = [\min(a^- b^-, a^- b^+, a^+ b^-, a^+ b^+), \max(a^- b^-, a^- b^+, a^+ b^-, a^+ b^+)].$$

## 2.3. 三支决策

定义 3 [10] 设三元组  $(U, C, f)$  是一个信息系统, 其中  $U$  是有限非空的方案集合,  $C$  是有限非空的属性集合,  $f$  表示  $U$  与  $C$  之间的关系。对任意  $X \subseteq U$ , 有状态空间  $\Omega = \{C, \neg C\}$ , 表示对象  $x$  是属于  $C$  或者不属于  $C$  两种状态, 行动集  $A = \{a_P, a_B, a_N\}$  表示对象  $x$  接受(正域  $POS(C)$ )、延迟(边界域  $BND(C)$ )、拒绝(负域  $NEG(C)$ )决策的三种行动。这三种行动在两种状态下的风险由损失函数表表示, 如表 1。

Table 1. Loss function table

表 1. 损失函数表

	$C$	$\neg C$
$a_P$	$\lambda_{PP}$	$\lambda_{PN}$
$a_B$	$\lambda_{BP}$	$\lambda_{BN}$
$a_N$	$\lambda_{NP}$	$\lambda_{NN}$

其中  $\lambda_{PP}$ 、 $\lambda_{BP}$ 、 $\lambda_{NP}$  表示当对象  $x$  属于  $C$  时, 采取行动  $a_P$ 、 $a_B$ 、 $a_N$  时所造成的损失;  $\lambda_{PN}$ 、 $\lambda_{BN}$ 、 $\lambda_{NN}$  表示当对象  $x$  不属于  $C$  时, 采取行动  $a_P$ 、 $a_B$ 、 $a_N$  时所造成的损失, 且有  $\lambda_{PP} \leq \lambda_{BP} < \lambda_{NP}$ ,  $\lambda_{NN} \leq \lambda_{BN} < \lambda_{PN}$ 。

对任意一个方案  $x \in U$ , 采取这三个行动所产生的期望损失可计算如下:

$$R(a_P | [x]) = \lambda_{PP} \Pr(C | [x]) + \lambda_{PN} \Pr(\neg C | [x]), \quad (1)$$

$$R(a_B | [x]) = \lambda_{BP} \Pr(C | [x]) + \lambda_{BN} \Pr(\neg C | [x]), \quad (2)$$

$$R(a_N|[x]) = \lambda_{NP} \Pr(C|[x]) + \lambda_{NN} \Pr(\neg C|[x]). \quad (3)$$

根据贝叶斯最小风险决策理论有如下规则(P1~P3):

(P1) 若  $R(a_P|[x]) \leq R(a_B|[x])$  且  $R(a_P|[x]) \leq R(a_N|[x])$ , 则  $x \in POS(C)$ ;

(P2) 若  $R(a_B|[x]) \leq R(a_P|[x])$  且  $R(a_B|[x]) \leq R(a_N|[x])$ , 则  $x \in BND(C)$ ;

(P3) 若  $R(a_N|[x]) \leq R(a_P|[x])$  且  $R(a_N|[x]) \leq R(a_B|[x])$ , 则  $x \in NEG(C)$ 。

由于  $\Pr(C|[x]) + \Pr(\neg C|[x]) = 1$ , 及  $\lambda_{PP} \leq \lambda_{BP} < \lambda_{NP}$ ,  $\lambda_{NN} \leq \lambda_{BN} < \lambda_{PN}$ , 规则(P1~P3)可转化为:

$$\Pr(C|[x]) \geq \alpha, x \in POS(C) \quad (4)$$

$$\beta \leq \Pr(C|[x]) \leq \alpha, x \in BND(C) \quad (5)$$

$$\Pr(C|[x]) \leq \beta, x \in BND(C) \quad (6)$$

其中,

$$\alpha = \frac{\lambda_{PN} - \lambda_{BN}}{\lambda_{PN} - \lambda_{BN} + \lambda_{BP} - \lambda_{PP}} \quad (7)$$

$$\beta = \frac{\lambda_{BN} - \lambda_{NN}}{\lambda_{BN} - \lambda_{NN} + \lambda_{NP} - \lambda_{BP}} \quad (8)$$

### 3. 改进的得分函数

本节中, 首先简要回顾现有文献研究的区间中智集的得分函数, 并通过几个例子提出这些公式存在的问题。其次, 提出了改进的得分函数公式解决该问题。

#### 3.1. 现有文献提出的得分函数

2014年, Şahin R [7]提出的单值中智数的得分函数公式为:

定义4 设  $a = \langle t_a, i_a, f_a \rangle$  是一个单值中智数, 则  $a$  的得分函数为:

$$s_1(a) = \frac{2 + t_a - 2i_a - f_a}{2} \quad (9)$$

这里,  $s_1(a) \in [-1, 1]$ 。

Şahin R [7]提出的区间中智数的得分函数公式为:

定义5 设  $a = \langle [t_a^-, t_a^+], [i_a^-, i_a^+], [f_a^-, f_a^+] \rangle$  是一个区间中智数, 则  $a$  的得分函数为:

$$s_2(a) = \frac{2 + t_a^- + t_a^+ - 2i_a^- - 2i_a^+ - f_a^- - f_a^+}{4} \quad (10)$$

这里,  $s_2(a) \in [-1, 1]$ 。

而上述两个公式, 在一些特殊情况下无法比较大小, 现给出两个例子, 具体如下:

例1: 设  $A_1 = \langle 0.4, 0.2, 0.3 \rangle$ ,  $A_2 = \langle 0.4, 0.1, 0.5 \rangle$ , 通过公式(9)计算得,  $s_1(A_1) = s_1(A_2) = 0.85$ , 无法判断两个单值中智数的大小。

例2: 设  $A_1 = \langle [0.2, 0.3], [0, 0.2], [0.2, 0.4] \rangle$ ,  $A_2 = \langle [0, 0.2], [0, 0.2], [0.1, 0.2] \rangle$ , 通过公式(10)计算得,  $s_2(A_1) = s_2(A_2) = 0.38$ , 无法判断两个区间中智数的大小。

为克服上述例子的缺点, Nancy [8]和 AmirHossein Nafei [9]相继在 2016 年和 2021 年对单值中智数的得分函数进行优化:

Nancy 对单值中智数的得分函数优化为:

定义 6 设  $a = \langle t_a, i_a, f_a \rangle$  是一个单值中智数, 则  $a$  的得分函数为:

$$s_3(a) = \frac{1 + (t_a - 2i_a - f_a)(2 - t_a - f_a)}{2} \quad (11)$$

AmirHossein Nafei 等人[9]对单值中智集的得分函数优化为:

定义 7 设  $a = \langle t_a, i_a, f_a \rangle$  是一个单值中智数, 则  $a$  的得分函数公式为:

$$s_4(a) = \frac{(4 + t_a - 2i_a - f_a)(2 - i_a)(2 - f_a)}{5} \quad (12)$$

Nancy [8]对区间中智数的得分函数优化为:

定义 8 设  $a = \langle [t_a^-, t_a^+], [i_a^-, i_a^+], [f_a^-, f_a^+] \rangle$  是一个区间中智数, 则  $a$  的得分函数为:

$$s_5(a) = \frac{4 + (t_a^- + t_a^+ - 2i_a^- - 2i_a^+ - f_a^- - f_a^+)(4 - t_a^- - t_a^+ - f_a^- - f_a^+)}{8} \quad (13)$$

这里,  $s_5(a) \in [0, 1]$ 。

Nancy 克服了例 1 和例 2 中的问题, 但优化的不够彻底, 问题在其他例子同样存在, 例如:

例 3: 设  $A_1 = \langle 0.6, 0.3, 0 \rangle$ ,  $A_2 = \langle 0.6, 0, 0.6 \rangle$ , 经公式(10)计算得  $s_3(A_1) = s_3(A_2) = 0.5$ , 无法比较。

例 4: 设  $A_1 = \langle [0.1, 0.3], [0.2, 0.3], [0, 0.1] \rangle$ ,  $A_2 = \langle [0, 0.2], [0.1, 0.2], [0, 0.3] \rangle$ , 经公式(10)计算得  $s_5(A_1) = s_5(A_2) = 0.19$ , 无法比较。

AmirHossein Nafei 对单值中智集得分函数优化存在同样的问题, 例如:

例 5: 设  $A_1 = \langle 0.5, 0.4, 0.8 \rangle$ ,  $A_2 = \langle 0.9, 0.8, 0.4 \rangle$ , 利用公式(12)计算得  $s_4(A_1) = s_4(A_2) = 1.11$ , 同样无法比较大小。

为了克服上述问题, 本文进一步对中智集的得分函数公式进行改进, 彻底解决无法比较的缺点。

## 3.2. 改进的得分函数

本节在 AmirHossein Nafei 提出的得分函数基础上做了进一步的优化, 在延伸到区间中智数时, 得分函数的计算结果以区间数比较大小。

### 3.2.1. 改进的单值中智数得分函数

本小节, 针对公式(12)进行了改进。具体如下:

定义 9 设  $a = \langle t_a, i_a, f_a \rangle$  是一个单值中智数, 则  $a$  的得分函数定义为:

$$s_6(a) = \frac{(4 + t_a - 2i_a - f_a)(1 + t_a)(2 - i_a)(2 - f_a)}{30} \quad (14)$$

这里  $s_6(a) \in [0, 1]$ 。

定理 1: 设  $a$  和  $b$  是两个单值中智数, 若  $a \supseteq b$ , 则  $s_6(a) \geq s_6(b)$ 。

证: 设  $a = \langle t_a, i_a, f_a \rangle$ ,  $b = \langle t_b, i_b, f_b \rangle$  是两个单值中智数, 若  $a \supseteq b$ , 则  $t_a \geq t_b$ ,  $i_a \leq i_b$ ,  $f_a \leq f_b$ 。

因此,

$$\begin{aligned}
& \frac{(4+t_a-2i_a-f_a)(1+t_a)(2-i_a)(2-f_a)}{30} - \frac{(4+t_b-2i_b-f_b)(1+t_b)(2-i_b)(2-f_b)}{30} \\
&= \frac{(4+t_a-2i_a-f_a)(1+t_a-t_b+t_b)(2-i_a+i_b-i_b)(2-f_a+f_b-f_b)}{30} \\
& \quad - \frac{(4+t_b-2i_b-f_b)(1+t_b)(2-i_b)(2-f_b)}{30} \\
&= \frac{(4+t_a-2i_a-f_a)((1+t_b)+(t_a-t_b))((2-i_b)+(i_b-i_a))((2-f_b)+(f_b-f_a))}{30} \\
& \quad - \frac{(4+t_b-2i_b-f_b)(1+t_b)(2-i_b)(2-f_b)}{30} \\
&= \frac{((t_a-t_b)+2(i_b-i_a)+(f_b-f_a))(1+t_b)(2-i_b)(2-f_b)}{30} \\
& \quad + \frac{(4+t_a-2i_a-f_a)(1+t_b)(2-i_b)(f_b-f_a)}{30} + \frac{(4+t_a-2i_a-f_a)(1+t_b)(i_b-i_a)(2-f_b)}{30} \\
& \quad + \frac{(4+t_a-2i_a-f_a)(1+t_b)(i_b-i_a)(f_b-f_a)}{30} + \frac{(4+t_a-2i_a-f_a)(t_a-t_b)(2-i_b)(2-f_b)}{30} \\
& \quad + \frac{(4+t_a-2i_a-f_a)(t_a-t_b)(2-i_b)(f_b-f_a)}{30} + \frac{(4+t_a-2i_a-f_a)(t_a-t_b)(i_b-i_a)(2-f_b)}{30}
\end{aligned}$$

因为所有括号里的值都是大于等于 0，所以  $s_6(a) \geq s_6(b)$ 。

现利用公式(14)计算例 5 中的两个单值中智数有  $s_6(A_1) = 0.28$ ， $s_6(A_2) = 0.32$ ，所以  $s_6(A_2) > s_6(A_1)$ 。

### 3.2.2. 区间中智数的改进得分函数

在本节中，将公式(14)引用到区间中智数中，为了更精细、准确地表达两个区间中智数间的关系。这里用区间数表示两区间中智数的大小。

定义 10: 设  $a = \langle [t_a^-, t_a^+], [i_a^-, i_a^+], [f_a^-, f_a^+] \rangle$ ，则  $a$  的得分函数定义为：

$$s_5^-(a) = \frac{(4+t_a^- - 2i_a^+ - f_a^+)(1+t_a^-)(2-i_a^+)(2-f_a^+)}{30} \quad (15)$$

$$s_5^+(a) = \frac{(4+t_a^+ - 2i_a^- - f_a^-)(1+t_a^+)(2-i_a^-)(2-f_a^-)}{30} \quad (16)$$

现利用公式(15)~(16)计算例 1 至例 4 中的得分函数值，有：

例 1 中， $s_5(A_1) = [0.48, 0.65]$ ， $s_5(A_2) = [0.48, 0.67]$ ；

例 2 中， $s_5(A_1) = [0.39, 0.64]$ ， $s_5(A_2) = [0.37, 0.62]$ ；

例 3 中， $s_5(A_1) = [0.6, 0.81]$ ， $s_5(A_2) = [0.5, 0.72]$ ；

例 4 中， $s_5(A_1) = [0.4, 0.61]$ ， $s_5(A_2) = [0.34, 0.61]$ 。

应用文献[22]中可能度公式继续计算可得，例 1 中  $s_5(A_1) < s_5(A_2)$ ，例 2 中  $s_5(A_1) > s_5(A_2)$ ，例 3 中  $s_5(A_1) > s_5(A_2)$ ，例 4 中  $s_5(A_1) > s_5(A_2)$ 。

这里，可能度公式[22]为：

设  $x = [a, b]$  和  $y = [c, d]$  为两个区间数，则两者之间的可能度公式为：

$$P(x \geq y) = \max \left\{ 1 - \max \left( \frac{d-a}{b-a+d-c}, 0 \right), 0 \right\} \quad (17)$$

#### 4. 构建区间中智集的多属性非线性规划模型

本节是依据改进的得分函数来构建非线性规划模型以求得各方案的评估值, 并且评估值是以区间数形式体现, 这样可以避免出现文献[20]中由于评估值相等而导致的对方案无法排序的问题。

设  $X_1, X_2, \dots, X_m$  为方案集,  $C_1, C_2, \dots, C_n$  为属性集。对应的属性评估值为

$x_{ij} = \left\langle [t_{ij}^-, t_{ij}^+], [i_{ij}^-, i_{ij}^+], [f_{ij}^-, f_{ij}^+] \right\rangle$ , 其中  $i=1, 2, \dots, m$ ,  $j=1, 2, \dots, n$ 。属性权重向量由决策者给出, 并以区间数的形式表示, 即  $W_j = \left\langle [z_j^-, z_j^+], [r_j^-, r_j^+], [y_j^-, y_j^+] \right\rangle$ , 这里,  $0 \leq z_j^- \leq z_j^+ \leq 1$ ;  $0 \leq r_j^- \leq r_j^+ \leq 1$ ;  $0 \leq y_j^- \leq y_j^+ \leq 1$  且  $z_j^+ + r_j^+ + y_j^+ \leq 1$ 。现利用公式(15)和(16)构建非线性规划模型, 如下:

$$X_i^- = \min \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{(4 + z_j t_{ij}^- - 2r_j i_{ij}^+ - y_j f_{ij}^+)(1 + z_j t_{ij}^-)(2 - r_j i_{ij}^+)(2 - y_j f_{ij}^+)}{30}$$

$$s.t. \begin{cases} z_j^- \leq z_j \leq z_j^+ \\ r_j^- \leq r_j \leq r_j^+ \\ y_j^- \leq y_j \leq y_j^+ \\ \sum_{j=1}^n (z_j + r_j + y_j) = 1 \end{cases} \quad (18)$$

$$X_i^+ = \max \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{(4 + z_j t_{ij}^+ - 2r_j i_{ij}^- - y_j f_{ij}^-)(1 + z_j t_{ij}^+)(2 - r_j i_{ij}^-)(2 - y_j f_{ij}^-)}{30}$$

$$s.t. \begin{cases} z_j^- \leq z_j \leq z_j^+ \\ r_j^- \leq r_j \leq r_j^+ \\ y_j^- \leq y_j \leq y_j^+ \\ \sum_{j=1}^n (z_j + r_j + y_j) = 1 \end{cases} \quad (19)$$

这里, 通过上述的非线性规划模型计算的各方案评估值  $[X_i^-, X_i^+]$  用来表示第4节中三支决策方法中条件概率的取值。

#### 5. 区间中智集的多属性三支决策方法

本节的主要工作是在区间中智集的多属性三支决策方法中更多地考虑客观因素, 几个重要参数均由数据本身客观计算产生, 极大程度减少主观依赖。在三支决策过程中, 条件概率和损失函数是两个重要的参数, 如何客观计算尤为重要, 文献[14]利用灰色关联度计算条件概率, 但损失函数是主观给出, 而在文献[23]中主要提出损失函数的确定方法, 条件概率则是随之推算出合理的取值范围。因此, 本节对三支决策方法改进的地方在于对损失函数和条件概率通过改进的得分函数和非线性规划方法同时客观求得, 以此强化三支决策方法的客观性。具体步骤如下:

步骤一: 建立决策矩阵信息表, 见表2;

设  $X_1, X_2, \dots, X_m$  为方案集,  $C_1, C_2, \dots, C_n$  为属性集。属性评估值以区间中智数形式表达。具体如下:

即  $x_{ij} = \left\langle [t_{ij}^-, t_{ij}^+], [i_{ij}^-, i_{ij}^+], [f_{ij}^-, f_{ij}^+] \right\rangle$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ,  $j=1, 2, \dots, n$ ), 这里的属性权重向量由决策者给出,

并以区间数的形式表示, 即  $W_j = \left( [z_j^-, z_j^+], [r_j^-, r_j^+], [y_j^-, y_j^+] \right)$ , 其中  $0 \leq z_j^- \leq z_j^+ \leq 1$ ;  $0 \leq r_j^- \leq r_j^+ \leq 1$ ;  $0 \leq y_j^- \leq y_j^+ \leq 1$  且  $z_j^+ + r_j^+ + y_j^+ \leq 1$ 。

**Table 2.** Decision matrix table  
**表 2.** 决策矩阵表

	$C_1$	$C_2$	...	$C_n$
$X_1$	$x_{11}$	$x_{12}$	...	$x_{1n}$
$X_2$	$x_{21}$	$x_{22}$	...	$x_{2n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$X_m$	$x_{m1}$	$x_{m2}$	...	$x_{mn}$

步骤二: 条件概率的确定;

利用第三节构建的非线性规划模型求解各方案的评估值, 即为各方案的条件概率。

步骤三: 损失函数的确定;

在现有多属性三支决策文献中[14] [24], 损失函数一般是由决策者主观给出, 而这样会使决策结果缺乏客观性。为此, 本文结合公式(15)、(16), 先将决策信息表的区间中智数转化为区间数, 再通过加权平均, 得到各方案的评估值, 利用此评估值构造各方案对应的相对损失函数表, 如下所示。为计算方便, 这里设损失因子  $\sigma$  为 0.3。

① 经公式(15)和(16)将决策表转为区间数,

$$X = \begin{bmatrix} s_5(x_{11}) & s_5(x_{12}) & \cdots & s_5(x_{1n}) \\ s_5(x_{21}) & s_5(x_{22}) & \cdots & s_5(x_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ s_5(x_{m1}) & s_5(x_{m2}) & \cdots & s_5(x_{mn}) \end{bmatrix}$$

② 对各方案进行线性加权平均,

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{n}(s_5(x_{11}) + \cdots + s_5(x_{1n})) \\ \frac{1}{n}(s_5(x_{21}) + \cdots + s_5(x_{2n})) \\ \vdots \\ \frac{1}{n}(s_5(x_{m1}) + \cdots + s_5(x_{mn})) \end{bmatrix}$$

③ 求各方案对应的相对损失函数表。

	$C$	$\neg C$
$a_p$	$[0, 0]$	$1 - \frac{1}{n}(s_5(x_{i1}) + \cdots + s_5(x_{in}))$
$a_B$	$\sigma \left( \frac{1}{n}(s_5(x_{i1}) + \cdots + s_5(x_{in})) \right)$	$\sigma \left( 1 - \frac{1}{n}(s_5(x_{i1}) + \cdots + s_5(x_{in})) \right)$
$a_N$	$\frac{1}{n}(s_5(x_{i1}) + \cdots + s_5(x_{in}))$	$[0, 0]$



步骤四：计算阈值；

在取得各方案相对损失函数表的基础上确定各方案的阈值，由于损失函数表中的值都是区间数形式。因此阈值的计算结合区间数的性质和阈值公式所得[13]。计算结果为区间数。具体计算公式如下：

$$\alpha^- = \frac{\lambda_{PN}^- - \lambda_{BN}^+}{\lambda_{PN}^- - \lambda_{BN}^+ + \lambda_{BP}^+ - \lambda_{PP}^-}, \quad \alpha^+ = \frac{\lambda_{PN}^+ - \lambda_{BN}^-}{\lambda_{PN}^+ - \lambda_{BN}^- + \lambda_{BP}^- - \lambda_{PP}^+}. \quad (20)$$

$$\beta^- = \frac{\lambda_{BN}^- - \lambda_{NN}^+}{\lambda_{BN}^- - \lambda_{NN}^+ + \lambda_{NP}^- - \lambda_{BP}^+}, \quad \beta^+ = \frac{\lambda_{BN}^+ - \lambda_{NN}^-}{\lambda_{BN}^+ - \lambda_{NN}^- + \lambda_{NP}^+ - \lambda_{BP}^-}. \quad (21)$$

步骤五：三支决策的分类规则。

通过上述步骤确定的条件概率和阈值都是区间数，其对应的分类规则如下图 1。

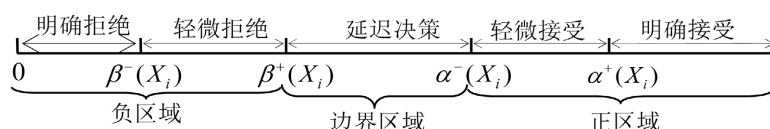


Figure 1. Classification rules for three-way decision

图 1. 三支决策的分类规则

根据分类规则对方案进行最终分类，具体规则如下：

$$\begin{aligned} \Pr(C|[x])^- &\in [\alpha^-(X_i), 1], x \in POS(C) \\ \Pr(C|[x])^- &\in [\beta^+(X_i), \alpha^-(X_i)], x \in BND(C) \\ \Pr(C|[x])^- &\in [0, \beta^+(X_i)], x \in NEG(C) \end{aligned} \quad (22)$$

## 6. 实例分析

这里，利用文献[17]中印度 Punjab 电力局竞选发电公司的案例进行分析和比较，说明本文所提方法的合理性和有效性。

Punjab 电力局分别从以下五个电力公司进行筛选： $A_1$  (KSK Energy Ventures limited),  $A_2$  (Hartek Power Private Limited),  $A_3$  (JSW Energy Limited),  $A_4$  (CESC Limited),  $A_5$  (NTPC Limited)。通过以下 4 个标准选出最佳的电力公司：C1 (可信用)，C2 (适应策略)，C3 (项目的财务规划) 和 C4 (燃料供应商的可用性)。

步骤一：由决策者提供的评估信息表如表 3；

Table 3. Evaluation information sheet

表 3. 评估信息表

	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
$A_1$	$\langle [0.7, 0.8], [0.5, 0.7], [0.1, 0.2] \rangle$	$\langle [0.6, 0.8], [0.4, 0.5], [0.3, 0.3] \rangle$	$\langle [0.8, 0.8], [0.4, 0.6], [0.1, 0.2] \rangle$	$\langle [0.7, 0.9], [0.3, 0.4], [0.2, 0.2] \rangle$
$A_2$	$\langle [0.6, 0.8], [0.4, 0.6], [0.1, 0.3] \rangle$	$\langle [0.5, 0.7], [0.3, 0.5], [0.1, 0.3] \rangle$	$\langle [0.6, 0.6], [0.2, 0.3], [0.4, 0.5] \rangle$	$\langle [0.6, 0.8], [0.4, 0.4], [0.2, 0.4] \rangle$
$A_3$	$\langle [0.4, 0.6], [0.2, 0.2], [0.2, 0.4] \rangle$	$\langle [0.6, 0.7], [0.4, 0.6], [0.3, 0.4] \rangle$	$\langle [0.7, 0.8], [0.6, 0.7], [0.1, 0.2] \rangle$	$\langle [0.5, 0.6], [0.5, 0.6], [0.2, 0.3] \rangle$
$A_4$	$\langle [0.4, 0.5], [0.5, 0.6], [0.4, 0.4] \rangle$	$\langle [0.5, 0.6], [0.3, 0.4], [0.4, 0.5] \rangle$	$\langle [0.6, 0.7], [0.7, 0.8], [0.2, 0.3] \rangle$	$\langle [0.8, 0.9], [0.3, 0.4], [0.1, 0.2] \rangle$
$A_5$	$\langle [0.6, 0.7], [0.4, 0.5], [0.4, 0.5] \rangle$	$\langle [0.8, 0.9], [0.3, 0.4], [0.1, 0.2] \rangle$	$\langle [0.7, 0.8], [0.5, 0.6], [0.1, 0.2] \rangle$	$\langle [0.5, 0.7], [0.5, 0.5], [0.2, 0.3] \rangle$

步骤二: 条件概率的确定;

各属性  $C_j$  的 ( $j=1,2,3,4$ ) 权重由决策者以区间数的形式给出。

$$\begin{aligned}
 W &= \langle [z_i, r_i, y_i] \rangle \\
 &= \{ \langle [0.1, 0.3], [0.1, 0.2], [0.2, 0.4] \rangle, \langle [0.2, 0.5], [0.1, 0.2], [0.15, 0.25] \rangle, \\
 &\quad \langle [0.25, 0.4], [0.2, 0.3], [0.15, 0.3] \rangle, \langle [0.15, 0.3], [0.1, 0.3], [0.3, 0.4] \rangle \} \\
 &\quad (i=1,2,3,4,5).
 \end{aligned}$$

利用非线性规划模型计算各方案的条件概率, 计算过程如下:

$$\begin{aligned}
 A_1^- &= \min \frac{1}{4} \left\{ \frac{(4+0.7z_1-2\cdot 0.7r_1-0.2y_1)(1+0.7z_1)(2-0.7r_1)(2-0.2y_1)}{30} + \frac{(4+0.6z_2-2\cdot 0.5r_2-0.3y_2)}{30} \right. \\
 &\quad \cdot \frac{(1+0.6z_2)(2-0.5r_2)(2-0.3y_2)}{30} + \frac{(4+0.8z_3-2\cdot 0.6r_3-0.2y_3)(1+0.8z_3)(2-0.6r_3)(2-0.2y_3)}{30} \\
 &\quad \left. + \frac{(4+0.7z_4-2\cdot 0.4r_4-0.2y_4)(1+0.7z_4)(2-0.4r_4)(2-0.2y_4)}{30} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 0.1 \leq z_1 \leq 0.3 & ; & 0.1 \leq r_1 \leq 0.2 \\ 0.2 \leq z_2 \leq 0.5 & ; & 0.1 \leq r_2 \leq 0.2 \\ 0.25 \leq z_3 \leq 0.4 & ; & 0.2 \leq r_3 \leq 0.3 \\ 0.15 \leq z_4 \leq 0.3 & ; & 0.1 \leq r_4 \leq 0.3 \\ 0.2 \leq y_1 \leq 0.4 & ; & 0.15 \leq y_2 \leq 0.25 \\ 0.15 \leq y_3 \leq 0.3 & ; & 0.3 \leq y_4 \leq 0.4 \\ \sum_{j=1}^4 (z_j + r_j + y_j) = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_1^+ &= \max \frac{1}{4} \left\{ \frac{(4+0.8z_1-2\cdot 0.5r_1-0.1y_1)(1+0.8z_1)(2-0.5r_1)(2-0.1y_1)}{30} + \frac{(4+0.8z_2-2\cdot 0.4r_2-0.3y_2)}{30} \right. \\
 &\quad \cdot \frac{(1+0.8z_2)(2-0.4r_2)(2-0.3y_2)}{30} + \frac{(4+0.8z_3-2\cdot 0.4r_3-0.1y_3)(1+0.8z_3)(2-0.4r_3)(2-0.1y_3)}{30} \\
 &\quad \left. + \frac{(4+0.9z_4-2\cdot 0.3r_4-0.2y_4)(1+0.9z_4)(2-0.3r_4)(2-0.2y_4)}{30} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 0.1 \leq z_1 \leq 0.3 & ; & 0.1 \leq r_1 \leq 0.2 \\ 0.2 \leq z_2 \leq 0.5 & ; & 0.1 \leq r_2 \leq 0.2 \\ 0.25 \leq z_3 \leq 0.4 & ; & 0.2 \leq r_3 \leq 0.3 \\ 0.15 \leq z_4 \leq 0.3 & ; & 0.1 \leq r_4 \leq 0.3 \\ 0.2 \leq y_1 \leq 0.4 & ; & 0.15 \leq y_2 \leq 0.25 \\ 0.15 \leq y_3 \leq 0.3 & ; & 0.3 \leq y_4 \leq 0.4 \\ \sum_{j=1}^4 (z_j + r_j + y_j) = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

由 Lingo 编程计算上述非线性规划模型可得各方案的评估值,  $A_1^- = 0.55703$ ,  $A_1^+ = 0.5856$ , 即  $A_1 = [0.557, 0.5856]$ 。同样的方法可得  $A_2 = [0.5389, 0.5774]$ ,  $A_3 = [0.5345, 0.5648]$ ,  $A_4 = [0.5321, 0.5566]$ ,

$A_5 = [0.5487, 0.5768]$ , 通过可能度公式, 可有  $A_1 > A_5 > A_2 > A_3 > A_4$ 。

从多属性决策角度分析, 这与文献[17]中基于 TOPSIS 构建非线性模型计算结果是一致的。说明了本文构建优化模型的有效性。

同时, 也得出各公司的条件概率为:  $\Pr(C|A_1) = [0.557, 0.5856]$ ,  $\Pr(C|A_2) = [0.5389, 0.5774]$ ,  $\Pr(C|A_3) = [0.5345, 0.5648]$ ,  $\Pr(C|A_4) = [0.5321, 0.5566]$ ,  $\Pr(C|A_5) = [0.5487, 0.5768]$ 。

步骤三: 计算各公司的损失函数;

① 利用公式(15)和(16)将信息评估表转化为区间数。结果如表 4。

**Table 4.** Interval type decision information table

**表 4.** 区间型决策信息表

	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
$A_1$	[0.411, 0.633]	[0.449, 0.604]	[0.441, 0.711]	[0.604, 0.795]
$A_2$	[0.393, 0.711]	[0.408, 0.732]	[0.476, 0.584]	[0.464, 0.657]
$A_3$	[0.484, 0.691]	[0.358, 0.555]	[0.411, 0.479]	[0.357, 0.49]
$A_4$	[0.031, 0.372]	[0.384, 0.522]	[0.294, 0.411]	[0.365, 0.859]
$A_5$	[0.372, 0.508]	[0.657, 0.859]	[0.471, 0.633]	[0.408, 0.536]

② 对各公司进行加权平均, 结果如下:

$A_1 = [0.476, 0.686]$ ,  $A_2 = [0.435, 0.671]$ ,  $A_3 = [0.403, 0.554]$ ,  $A_4 = [0.269, 0.541]$ ,  $A_5 = [0.477, 0.634]$ 。

③ 计算各方案的相对损失函数, 如下如表 5~9。

**Table 5.**  $A_1$  relative loss function table

**表 5.**  $A_1$  相对损失函数表

$A_1$	$C$	$\neg C$
$a_p$	[0, 0]	[0.314, 0.524]
$a_B$	[0.143, 0.206]	[0.094, 0.157]
$a_N$	[0.476, 0.686]	[0, 0]

**Table 6.**  $A_2$  relative loss function table

**表 6.**  $A_2$  相对损失函数表

$A_2$	$C$	$\neg C$
$a_p$	[0, 0]	[0.329, 0.565]
$a_B$	[0.131, 0.201]	[0.099, 0.17]
$a_N$	[0.435, 0.671]	[0, 0]

**Table 7.**  $A_3$  relative loss function table

**表 7.**  $A_3$  相对损失函数表

$A_3$	$C$	$\neg C$
$a_p$	[0, 0]	[0.446, 0.597]

续表

$a_B$	[0.12, 0.166]	[0.134, 0.179]
$a_N$	[0.403, 0.554]	[0, 0]

**Table 8.**  $A_4$  relative loss function table  
**表 8.**  $A_4$  相对损失函数表

$A_4$	$C$	$\neg C$
$a_P$	[0,0]	[0.459, 0.731]
$a_B$	[0.081, 0.162]	[0.138, 0.219]
$a_N$	[0.269, 0.541]	[0, 0]

**Table 9.**  $A_5$  relative loss function table  
**表 9.**  $A_5$  相对损失函数表

$A_5$	$C$	$\neg C$
$a_P$	[0, 0]	[0.366, 0.523]
$a_B$	[0.143, 0.190]	[0.11, 0.157]
$a_N$	[0.477, 0.634]	[0, 0]

步骤四：计算阈值；

$$\alpha_1 = \frac{[0.314, 0.524] - [0.094, 0.157]}{[0.314, 0.524] - [0.094, 0.157] + [0.143, 0.206]},$$

$$\alpha_1^- = \frac{0.314 - 0.157}{0.314 - 0.157 + 0.206} = 0.433, \quad \alpha_1^+ = \frac{0.524 - 0.094}{0.524 - 0.094 + 0.143} = 0.75.$$

$$\beta_1 = \frac{[0.094, 0.15]}{[0.094, 0.157] + [0.476, 0.686] - [0.143, 0.206]},$$

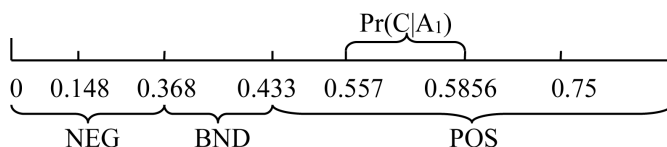
$$\beta_1^- = \frac{0.094}{0.094 + 0.686 - 0.143} = 0.148, \quad \beta_1^+ = \frac{0.157}{0.157 + 0.476 - 0.206} = 0.368.$$

同样可得  $A_2$ 、 $A_3$ 、 $A_4$  和  $A_5$  的阈值：

$$\alpha_2 = [0.442, 0.781], \quad \beta_2 = [0.155, 0.358], \quad \alpha_3 = [0.617, 0.794], \quad \beta_3 = [0.236, 0.430],$$

$$\alpha_4 = [0.597, 0.88], \quad \beta_4 = [0.231, 0.538], \quad \alpha_5 = [0.524, 0.743], \quad \beta_5 = [0.183, 0.354].$$

步骤五：结合各公司的条件概率和阈值的对比，对各公司进行分类。公司  $A_1$  的分类结果如图 2 所示。



**Figure 2.** Classification result  
**图 2.** 分类结果

从图 2 可看出, 公司  $A_1 \in POS(C)$ 。同理可得出,  $A_2 \in POS(C)$ ,  $A_3 \in BND(C)$ ,  $A_4 \in NEG(C)$ ,  $A_5 \in POS(C)$ 。即公司  $A_1$ 、 $A_2$  和  $A_5$  在考虑范围内, 公司  $A_3$  需要进一步观察, 而公司  $A_4$  则考虑拒绝。

## 7. 小结

本文的主要工作有三点。一是提出新的得分函数, 得分公式使得任意两个单值中智集都是可比较的, 满足了全序关系。将公式扩展到区间中智数上, 依然能保持这种全序关系, 具有良好的数学性质。二是用优化的方法建立了一对非线性规划的模型, 用来求得评估值的上下界, 以形成区间型的评估值, 由于处理的问题是区间中智集, 因而最终的评估值为区间型显得更为合理。三是结合改进的得分函数和非线性规划模型给出区间中智集的三支决策新方法, 其中损失函数的确定完全由客观数据计算得出, 摆脱了以往人为主观确定损失函数的随意性。在未来的研究中, 本方法可扩展到各领域中解决多属性三支决策问题。

## 参考文献

- [1] Smarandache, F. (1999) A Unifying Field in Logics: Neutrosophic Logic. In: *Philosophy*, American Research Press, Champaign, 1-141.
- [2] Zadeh, L.A. (1965) Fuzzy Sets. *Information and Control*, **8**, 338-353. [https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(65\)90241-X](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X)
- [3] Atanassov, K.T. and Stoeva, S. (1986) Intuitionistic Fuzzy Sets. *Fuzzy Sets and Systems*, **20**, 87-96. [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(86\)80034-3](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(86)80034-3)
- [4] Atanassov, K.T. and Atanassov, K.T. (1999) Interval Valued Intuitionistic Fuzzy Sets. In: Krassimir T. Atanassov, Ed., *Intuitionistic Fuzzy Sets: Theory and Applications*, Springer, Berlin, 139-177. [https://doi.org/10.1007/978-3-7908-1870-3\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-7908-1870-3_2)
- [5] Wang, H., Smarandache, F., Zhang, Y., et al. (2010) Single Valued Neutrosophic Sets. *Multispace and Multistructure*, **4**, 410-413.
- [6] Wang, H., Smarandache, F., Zhang, Y.Q., et al. (2005) Interval Neutrosophic Sets and Logic: Theory and Applications in Computing. Hexis, Phoenix, 6-14.
- [7] Şahin, R. (2014) Multi-Criteria Neutrosophic Decision Making Method Based on Score and Accuracy Functions under Neutrosophic Environment.
- [8] Nancy, G.H. (2016) An Improved Score Function for Ranking Neutrosophic Sets and Its Application to Decision-Making Process. *International Journal for Uncertainty Quantification*, **6**, 377-385. <https://doi.org/10.1615/Int.J.UncertaintyQuantification.2016018441>
- [9] Nafei, A.H., Javadpour, A., Nasser, H., et al. (2021) Optimized Score Function and Its Application in Group Multiattribute Decision Making Based on Fuzzy Neutrosophic Sets. *International Journal of Intelligent Systems*, **36**, 7522-7543. <https://doi.org/10.1002/int.22597>
- [10] Yao, Y. (2010) Three-Way Decisions with Probabilistic Rough Sets. *Information Sciences*, **180**, 341-353. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2009.09.021>
- [11] 赵蒙, 张少谱, 冯涛. 基于优势关系的毕达哥拉斯模糊集上的三支决策[J]. 模糊系统与数学, 2020, 34(6): 109-129.
- [12] 刘久兵, 彭莉莎, 李华雄, 等. 考虑权重信息未知的区间直觉模糊三支群决策方法[J]. 运筹与管理, 2022, 31(7): 50-57.
- [13] Pan, X.H., He, S.F., Wang, Y.M., et al. (2022) A Novel Interval-Valued Three-Way Decision Theory under Multiple Criteria Environment. *Knowledge-Based Systems*, **253**, Article ID: 109522. <https://doi.org/10.1016/j.knsys.2022.109522>
- [14] Liu, P. and Yang, H. (2019) Three-Way Decisions with Single-Valued Neutrosophic Decision Theory Rough Sets Based on Grey Relational Analysis. *Mathematical Problems in Engineering*, **2019**, Article ID: 3258018. <https://doi.org/10.1155/2019/3258018>
- [15] Jiao, L., Yang, H. and Li, S. (2020) Three-Way Decision Based on Decision-Theoretic Rough Sets with Single-Valued Neutrosophic Information. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, **11**, 657-665. <https://doi.org/10.1007/s13042-019-01023-3>
- [16] Yang, W., Shi, J., Pang, Y., et al. (2018) Linear Assignment Method for Interval Neutrosophic Sets. *Neural Computing*

- 
- and Applications*, **29**, 553-564. <https://doi.org/10.1007/s00521-016-2575-2>
- [17] Nancy, G.H. (2018) Non-Linear Programming Method for Multi-Criteria Decision Making Problems under Interval Neutrosophic Set Environment. *Applied Intelligence*, **48**, 2199-2213. <https://doi.org/10.1007/s10489-017-1070-5>
- [18] Chen, S.M., Kuo, L.W. and Zou, X.Y. (2018) Multiattribute Decision Making Based on Shannon's Information Entropy, Non-Linear Programming Methodology, and Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Values. *Information Sciences*, **465**, 404-424. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2018.06.047>
- [19] Kumar, S. and Biswas, A. (2018) TOPSIS Based on Linear Programming for Solving MADM Problems in Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Settings. 2018 4th International Conference on Recent Advances in Information Technology (RAIT), Dhanbad, 15-17 March 2018, 1-6. <https://doi.org/10.1109/RAIT.2018.8389071>
- [20] Wang, C.Y. and Chen, S.M. (2018) A New Multiple Attribute Decision Making Method Based on Linear Programming Methodology and Novel Score Function and Novel Accuracy Function of Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Values. *Information Sciences*, **438**, 145-155. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2018.01.036>
- [21] Ye, J. (2014) Similarity Measures Between Interval Neutrosophic Sets and Their Applications in Multicriteria Decision-Making. *Journal of Intelligent Fuzzy Systems*, **26**, 165-172. <https://doi.org/10.3233/IFS-120724>
- [22] 徐泽水, 达庆利. 区间数排序的可能度法及其应用[J]. 系统工程学报, 2003(1): 67-70.
- [23] Jia, F. and Liu, P. (2019) A Novel Three-Way Decision Model under Multiple-Criteria Environment. *Information Sciences*, **471**, 29-51. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2018.08.051>
- [24] 刘久兵, 鞠恒荣, 李华雄, 等. 基于最优化方法的区间直觉模糊三支群决策模型(英文) [J]. 山西大学学报(自然科学版), 2020, 43(4): 817-827.