

基于矩形坐标系的语言不确定Z-Number的多属性群决策方法

郑文杰, 颜 茜, 阮艳丽

西华大学理学院, 四川 成都

收稿日期: 2024年4月22日; 录用日期: 2024年6月22日; 发布日期: 2024年6月30日

摘 要

针对语言不确定Z-Number (LUZ), 本文首先提出了基于矩形坐标系的加权曼哈顿距离并讨论了该距离所满足的性质。其次, 基于加权曼哈顿距离与TOPSIS决策方法, 给出了基于矩形坐标系的LUZ的新的得分函数。最后, 针对语言不确定Z-Number环境下的决策问题, 建立了基于矩形坐标系的LUZ的新的多属性群决策方法。

关键词

语言不确定Z-Number, 曼哈顿距离, 矩形坐标系, TOPSIS, 多属性群决策方法

A Multi-Attribute Group Decision-Making Method Based on Linguistic Uncertain Z-Number with a Rectangular Coordinate System

Wenjie Zheng, Xi Yan, Yanli Ruan

School of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan

Received: Apr. 22nd, 2024; accepted: Jun. 22nd, 2024; published: Jun. 30th, 2024

Abstract

In view of the linguistic uncertain Z-Number, in this paper, firstly, a weighted Manhattan distance

文章引用: 郑文杰, 颜茜, 阮艳丽. 基于矩形坐标系的语言不确定 Z-Number 的多属性群决策方法[J]. 运筹与模糊学, 2024, 14(3): 1174-1184. DOI: 10.12677/orf.2024.143348

based on a rectangular coordinate system is proposed, and the properties satisfied by the distance are discussed. Secondly, based on the weighted Manhattan distance and TOPSIS decision method, a new scoring function of LUZ based on rectangular coordinate system is given. Finally, aiming at the decision-making problem in the LUZ environment, a new multi-attribute group decision-making method based on rectangular coordinate system is established.

Keywords

Linguistic Uncertain Z-Number, Manhattan Distance, Rectangular Coordinate System, TOPSIS, Multi-Attribute Group Decision-Making Method

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

Zadeh 于 1965 年提出了模糊集[1]的概念, 模糊集是用来描述一类边界不分明的对象, 例如: “高的人” “比较晚” “大约 10”, 都属于模糊集。模糊集及其理论[2]被广泛的应用于图像处理、人工智能、决策、金融、医学、控制等领域。截止目前, 模糊理论在上述领域中都取得了不错的研究成果。

Zadeh 在 2011 年提出了 Z-Number [3]的概念, Z-Number 是一种处理不确定和不完整信息的数学工具。通常, 对于一个事件 X , 一个标准的 Z-Number 是由 $Z = (A, B)$ 的形式表示, 其中 A 表示的是 X 上的模糊约束, B 表示的是 A 的可信度。例如: “坐地铁从成都市犀浦站到龙泉驿站所需要的时间通常是 45 分钟左右”, 那么用 Z-评价来表示就是: (坐地铁从成都市犀浦站到龙泉驿站所需要的时间, 45 分钟左右, 通常), 而用 Z-Number 表示就是 $Z = (A, B) = (45\text{分钟左右}, \text{通常})$ 。显然, Z-Number 不仅反映了信息的不确定性也简化了事件描述的复杂性。多年来, Z-Number 的研究一直很火热, 在 Z-Number 形式的改进上有: Z^+ -Number [4]、 Z^* -Number [5]、 Z^E -Number [6]、区间值语言 Z-Number [7]等, 上述这些形式的 Z-Number 都是基于可信度的改进, 并利用一些成熟的数学计算方法从 Z-Number 形式的信息中得出比较可靠的结论; 在 Z-Number 的计算上涉及到: 语言尺度函数[8], 得分函数[9], 聚合算子[10]等, 这些是 Z-Number 在决策问题中应用时所需要的重要数学工具, 它们可以很好地度量出 Z-Number 形式的信息所包括的范围, 并且可以对多个 Z-Number 信息进行整合从而得出其中所蕴含的结论。

在文献[11]中, Peng 提出了区间值语言 Z-Number, 例如: $Z = ([\text{好}, \text{非常好}], \text{确定})$ 。在文献[12]中, Jia 提出了基于阿塔纳索夫的区间值直觉模糊集的 Z-Number 形式, 例如:

$Z = ((\text{好}, [0.5, 0.6]), (\text{确定}, [0.6, 0.7]))$ 。在文献[13]中, Zadeh 提出了一种嵌套的语言真值指派形式, 例如

“ “ “这道数学题是非常非常难的” 是非常真的” 是比较真的”, 这里的两次真值指派可以理解为是来自两个评价主体, 而且第二次真值指派是对之前包括第一次真值指派在内的整体的评价。在文献[6]中, Tian 提出了改进的 Z-Number 形式: $Z^E = ((A, B), E)$, 其中 E 是 (A, B) 的可信度, 并且 E 的值是通过群体投票后根据公式计算得出。在文献[12]中, Jia 结合文献[1]中的经典语言模糊集给出了语言不确定 Z-Number, 例如: $LUZ = ((\text{好}, 0.6), (\text{确定}, 0.8))$, 其中第一项是决策者所邀请的专家对于某个方案属性

的评价,第二项是决策者针对专家描述的可信度给予的评价,数字 0.6 与 0.8 分别对应隶属度。

然而 Z-Number 在决策问题中应用时计算起来往往比较复杂,尤其是一些复杂模型,例如文献[11]中所给出的基于云模型的计算公式不仅复杂而且计算难度也比较大。在文献[12]中, Jia 提出了一种基于矩形坐标系来研究语言不确定 Z-Number (LUZ)的思路,它可以大大地降低 LUZ 计算的难度。基于上述思路,本文提出了基于矩形坐标系的语言不确定 Z-Number 的多属性群决策方法。

2. 预备知识

2.1. 语言不确定 Z-Number

定义 1. [14] [15] 令 $S = \{S_0, S_1, \dots, S_e, \dots, S_E | E \in N^*\}$ 和 $H = \{H_0, H_1, \dots, H_f, \dots, H_F | F \in N^*\}$ 是两个有限且完全有序的语言术语集(LTS_s), E 和 F 的值是任意正整数。 S_e 和 H_f 表示语言变量的可能值。当且仅当 $e_1 \leq e_2$; $f_1 \leq f_2$ 时有 $S_{e_1} \leq S_{e_2}$ 和 $H_{f_1} \leq H_{f_2}$ 成立。

定义 2. [12] 令 $S = \{S_1, \dots, S_k, \dots, S_{2k} | k \in N^*\} = \{\text{特别差, 非常差, 差, } \dots, \text{好, 非常好, 特别好}\}$, $H = \{H_1, \dots, H_j, \dots, H_{2j} | j \in N^*\} = \{\text{非常不确定, 不确定, } \dots, \text{确定, 非常确定}\}$ 。当 k 增大时, 所代表的语言信息更积极。特别地: S_k 是有点差, S_{k+1} 是有点好。此外, 当且仅当 $k_1 + k_2 = 2k + 1$ 时, S_{k_1} 和 S_{k_2} 相反。例如: S_2 = 非常差, S_{2k-1} = 非常好; S_k = 有点差, S_{k+1} = 有点好。术语集 H 类似于 S 。

定义 3. [12] 语言不确定 Z-Number (LUZ) 定义为如下形式: $LUZ = ((S_\phi, \mu(S_\phi)), (H_\psi, \mu(H_\psi)))$, 其表示语言术语集 S 中语言变量的可能值, H_ψ 表示语言术语集 H 中语言变量的可能值。 $\mu(S_\phi) \in [0, 1]$, $\mu(H_\psi) \in [0, 1]$ 表示隶属度, K 和 J 的值是主观确定的。注意: 经典语言 Z-Number: $Z = (S_\phi, H_\psi)$ 可以视为一种特例, 即 $\mu(S_\phi) = \mu(H_\psi) = 1$ 。

2.2. 语言不确定 Z-Number 在矩形坐标系上的表示

令 $S = \{S_1, \dots, S_k, \dots, S_{2k} | k \in N^*\} = \{\text{非常差, 差, } \dots, \text{好, 非常好}\}$, $H = \{H_1, \dots, H_j, \dots, H_{2j} | j \in N^*\} = \{\text{非常不确定, 不确定, } \dots, \text{确定, 非常确定}\}$ 。对于任意给定的一个 $LUZ = ((S_\phi, \mu(S_\phi)), (H_\psi, \mu(H_\psi)))$, 它在矩形坐标系中的坐标表示公式如下[12]:

- 1) 如果 $K+1 \leq \phi \leq 2K$ 并且 $J+1 \leq \psi \leq 2J$, 那么对应的矩形坐标 $z(x, y)$ 属于 Q_1 , 并且 $z(x, y) = (\phi - K - 1 + \mu(S_\phi), \psi - J - 1 + \mu(H_\psi))$ 。
- 2) 如果 $1 \leq \phi \leq K$ 并且 $1 \leq \psi \leq J$, 那么对应的矩形坐标 $z(x, y)$ 属于 Q_2 , 并且 $z(x, y) = (\phi - K - \mu(S_\phi), J - \psi + \mu(H_\psi))$ 。
- 3) 如果 $1 \leq \phi \leq K$ 并且 $J+1 \leq \psi \leq 2J$, 那么对应的矩形坐标 $z(x, y)$ 属于 Q_3 , 并且 $z(x, y) = (\phi - K - \mu(S_\phi), J - \psi + 1 - \mu(H_\psi))$ 。
- 4) 如果 $K+1 \leq \phi \leq 2K$ 并且 $1 \leq \psi \leq J$, 那么对应的矩形坐标 $z(x, y)$ 属于 Q_4 , 并且 $z(x, y) = (\phi - K - 1 + \mu(S_\phi), \psi - J - \mu(H_\psi))$ 。

例如: 点 M 和点 N (如图 1) 分别是 $LUZ_1 = ((S_1, \mu(S_1)), (H_{J+2}, \mu(H_{J+2})))$ 和 $LUZ_2 = ((S_{K+2}, 1), (H_{J+2}, 1))$ 在矩形坐标系中的表示。

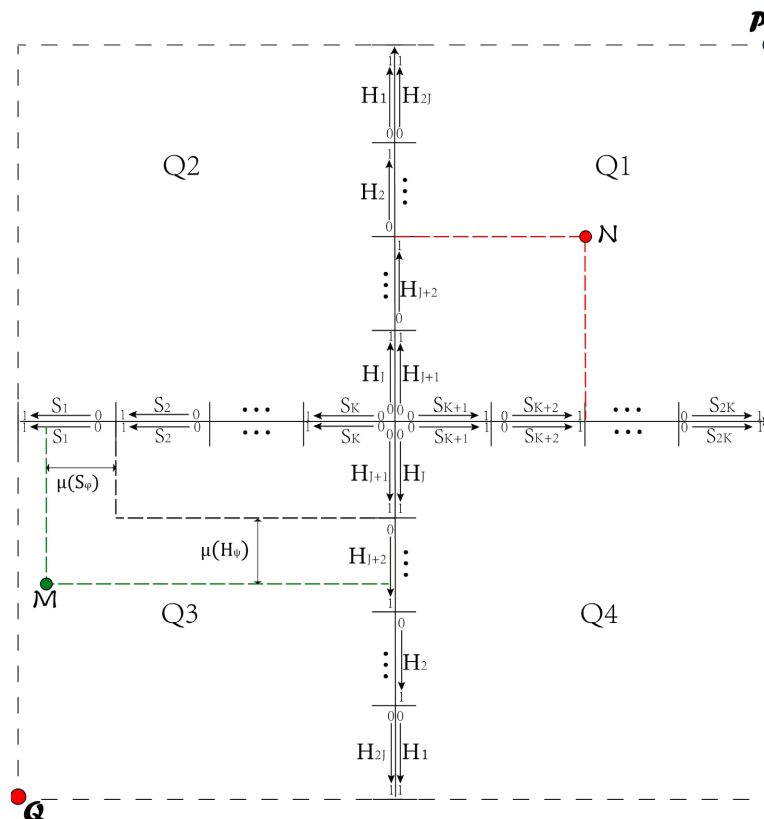


Figure 1. The representation of the linguistic uncertain Z-number in a rectangular coordinate system
图 1. 语言不确定 Z-Number 在矩形坐标系中的表示

2.3. 基于矩形坐标系的语言不确定 Z-Number 的计算

对于任意的 LUZ_1 和 LUZ_2 , 在矩形坐标系上的加法运算和减法运算定义如下[12]; (以第一象限为例)

1) 加法运算

$$\begin{aligned} LUZ^\oplus &= \left((S_\phi, \mu(S_\phi)), (H_\psi, \mu(H_\psi)) \right) = LUZ_1 + LUZ_2 \\ &= \left((S_{\phi_1}, \mu(S_{\phi_1})), (H_{\psi_1}, \mu(H_{\psi_1})) \right) + \left((S_{\phi_2}, \mu(S_{\phi_2})), (H_{\psi_2}, \mu(H_{\psi_2})) \right) \\ &= (\phi_1 + \phi_2 - 2K - 2 + \mu(S_{\phi_1}) + \mu(S_{\phi_2}), \psi_1 + \psi_2 - 2J - 2 + \mu(H_{\psi_1}) + \mu(H_{\psi_2})) \end{aligned}$$

2) 減法运算

$$\begin{aligned} LUZ^\circ &= \left((S_\phi, \mu(S_\phi)), (H_\psi, \mu(H_\psi)) \right) = LUZ_1 - LUZ_2 \\ &= \left((S_{\phi_1}, \mu(S_{\phi_1})), (H_{\psi_1}, \mu(H_{\psi_1})) \right) - \left((S_{\phi_2}, \mu(S_{\phi_2})), (H_{\psi_2}, \mu(H_{\psi_2})) \right) \\ &= (\phi_1 - \phi_2 + \mu(S_{\phi_1}) - \mu(S_{\phi_2}), \psi_1 - \psi_2 + \mu(H_{\psi_1}) - \mu(H_{\psi_2})) \end{aligned}$$

2.4. 基于矩形坐标系的语言不确定 Z-Number 的加权平均聚合算子

定义 4. [12] 假设 $LUZ_i = \left(\left(S_{\phi_i}, \mu(S_{\phi_i}) \right), \left(H_{\psi_i}, \mu(H_{\psi_i}) \right) \right)$, $i=1, 2, \dots, n$ 。相应的权重向量是

$W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ 。 $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, 并且 $w_i \geq 0$, 那么基于矩形坐标系的语言不确定 Z-Number 加权平均聚

合算子(LUZWAAORCS)定义如下:

$$LUZWAAORCS(Z_1, Z_2, \dots, Z_n) = \sum_{i=1}^n w_i Z_i$$

3. 距离度量

3.1. 曼哈顿距离

曼哈顿距离是一种通用的距离度量方法,在很多领域都有应用,包括:数据可视化、图像处理、路径规划、决策、机器学习以及数据挖掘等[16]-[20]。曼哈顿距离具有直观性、简便性、且它只考虑水平方向和竖直方向这两个维度的差距等特点。在文献[12]中提到的闵可夫斯基距离,虽然相较于传统的基于语言尺度函数(LSF)或是云模型的距离测度简便了许多,但是它忽视了语言不确定 Z-Number (LUZ)两个维度的差异,因为一个 LUZ 是由专家评价与决策者评价两部分构成的,例如:“好”和“非常好”的差距与“确定”和“非常确定”的差距是不同的。那么在度量两个 LUZ 的距离时要凸显出这两个维度的差异,所以本文采用曼哈顿距离(即取 $p = 1$ 时的闵可夫斯基距离),并在经典的曼哈顿距离上做了改进:为两个评价部分赋权,并且根据实际情况选取合适的权重。这样做易于对 Z-Number 形式的评价信息做出恰当的处理,进而提高决策结果的可靠性。

曼哈顿距离可以降低极端数据对决策结果的影响,例如: $LUZ^* = ((\text{特别好}, 1), (\text{特别不确定}, 1))$, $LUZ^{**} = ((\text{特别差}, 1), (\text{特别不确定}, 1))$, 根据这两个 LUZ 的决策者评价信息,可以判断出专家的评价信息几乎无效,那么在计算时就要将这样的信息进行修正,以尽量保证结果的可靠性。于是本文提出了一种通过为两部分赋权来修正评价信息的方法:首先,对于矩形坐标系中的两点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$, 曼哈顿标准距离公式如下: $D(A, B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$, 则加权曼哈顿距离公式如下:

$$\tilde{D}(A, B) = w_1 |x_1 - x_2| + w_2 |y_1 - y_2|, \text{ 其中 } w_1 + w_2 = 1.$$

综上,本文给出基于矩形坐标系的 LUZ 的加权曼哈顿距离公式。

定义 5. 给定两个语言不确定 Z-Number: $LUZ_1 = ((S_{\phi_1}, \mu(S_{\phi_1})), (H_{\psi_1}, \mu(H_{\psi_1})))$,

$LUZ_2 = ((S_{\phi_2}, \mu(S_{\phi_2})), (H_{\psi_2}, \mu(H_{\psi_2})))$ 。则基于矩形坐标系的语言不确定 Z-Number 的加权曼哈顿距离公式如下:

$$\tilde{D}(LUZ_1, LUZ_2) = w_1 |\phi_1 - \phi_2 + \mu(S_{\phi_1}) - \mu(S_{\phi_2})| + w_2 |\psi_1 - \psi_2 + \mu(H_{\psi_1}) - \mu(H_{\psi_2})|, \text{ 其中 } w_1 + w_2 = 1.$$

3.2. 性质及证明

定理 1. 加权曼哈顿距离满足以下性质:

$$1) \tilde{D}(LUZ_1, LUZ_2) \geq 0;$$

$$2) \text{ 如果 } LUZ_1 = LUZ_2, \text{ 那么 } \tilde{D}(LUZ_1, LUZ_2) = 0;$$

$$3) \tilde{D}(LUZ_1, LUZ_2) = \tilde{D}(LUZ_2, LUZ_1);$$

$$4) \text{ 如果 } \phi_1 \leq \phi_2 \leq \phi_3, \mu(S_{\phi_1}) \leq \mu(S_{\phi_2}) \leq \mu(S_{\phi_3}), \psi_1 \leq \psi_2 \leq \psi_3, \text{ 以及 } \mu(H_{\psi_1}) \leq \mu(H_{\psi_2}) \leq \mu(H_{\psi_3}),$$

那么有 $\tilde{D}(LUZ_1, LUZ_2) \leq \tilde{D}(LUZ_1, LUZ_3)$ 以及 $\tilde{D}(LUZ_2, LUZ_3) \leq \tilde{D}(LUZ_1, LUZ_3)$ 。

证明: 1)由于曼哈顿距离公式使用的是横纵坐标差的绝对值的和表示的,所以结果显然是非负的; 2)、3)也是显然的; 4)由于 $\phi_1 \leq \phi_2 \leq \phi_3$ 并且 $\mu(S_{\phi_1}) \leq \mu(S_{\phi_2}) \leq \mu(S_{\phi_3})$ 那么有

$$|\phi_1 - \phi_2 + \mu(S_{\phi_1}) - \mu(S_{\phi_2})| \leq |\phi_1 - \phi_3 + \mu(S_{\phi_1}) - \mu(S_{\phi_3})|, \text{ 又由于 } \psi_1 \leq \psi_2 \leq \psi_3 \text{ 并且}$$

$\mu(H_{\psi_1}) \leq \mu(H_{\psi_2}) \leq \mu(H_{\psi_3})$, 那么有 $|\psi_1 - \psi_2 + \mu(H_{\psi_1}) - \mu(H_{\psi_2})| \leq |\psi_1 - \psi_3 + \mu(H_{\psi_1}) - \mu(H_{\psi_3})|$ 。因此有 $D(LUZ_1, LUZ_2) \leq D(LUZ_1, LUZ_3)$ 。同理可证 $D(LUZ_2, LUZ_3) \leq D(LUZ_1, LUZ_3)$ 。

4. 基于曼哈顿距离与 TOPSIS 的得分函数

根据文献[12]中所给出的基于 TOPSIS 决策方法的得分函数公式: ($\hat{D}$ 代表闵可夫斯基距离) 当 $z(x, y)$

属于第二象限时, $S(Z) = \frac{\hat{D}(Z, Q)}{\hat{D}(Z, P)} = \frac{\left((\phi - \mu(S_\phi))^p + (2J - \psi + \mu(H_\psi))^p \right)^{\frac{1}{p}}}{\left((\phi - 2K - \mu(S_\phi))^p + (-\psi + \mu(H_\psi))^p \right)^{\frac{1}{p}}}$; 当 $z(x, y)$ 属于第四象限时,

$$S(Z) = \frac{\hat{D}(Z, Q)}{\hat{D}(Z, P)} = \frac{\left((\phi - 1 + \mu(S_\phi))^p + (\psi - \mu(H_\psi))^p \right)^{\frac{1}{p}}}{\left((\phi - 2K - 1 + \mu(S_\phi))^p + (\psi - 2J - \mu(H_\psi))^p \right)^{\frac{1}{p}}}。$$

假设: 给定 $LUZ_m = ((S_{2k}, 1), (H_1, 1))$ 、 $LUZ_n = ((S_1, 1), (H_1, 1))$, 则根据上述公式可以计算出这两个 LUZ 的得分值分别为 $S(LUZ_m) = \frac{k}{j}$ 、 $S(LUZ_n) = \frac{j}{k}$, 即这两个 LUZ 的得分值仅仅和语言术语集 S 、 H 中的语言值的数量有关。如果取 $j = k$, 则会得到 $S(LUZ_m) = S(LUZ_n)$ 这样的结论, 然而:

$$LUZ_m = ((S_{2k}, 1), (H_1, 1)) = ((\text{特别好}, 1), (\text{特别不确定}, 1))、$$

$LUZ_n = ((S_1, 1), (H_{2j}, 1)) = ((\text{特别差}, 1), (\text{特别不确定}, 1))$, 这两个 LUZ 的模糊语义显然是不同的, 然而得分值却相同, 这将会影响后续决策结果的可靠性, 于是本文选用上文提出的加权曼哈顿距离公式并结合 TOPSIS 决策方法给出新的得分函数计算公式如下:

定义 6. 对于任意给定的 $LUZ = ((S_\phi, \mu(S_\phi)), (H_\psi, \mu(H_\psi)))$, 并结合 TOPSIS 决策方法以及定义 5 所给出的加权曼哈顿距离, 那么基于矩形坐标系的 LUZ 的得分函数定义如下:

当 $z(x, y)$ 属于第一象限时:

$$S(Z) = \frac{\tilde{D}(Z, Q)}{\tilde{D}(Z, P)} = \frac{w_1 |\phi - 1 + \mu(S_\phi)| + w_2 |\psi - 1 + \mu(H_\psi)|}{w_1 |2K - \phi + 1 - \mu(S_\phi)| + w_2 |2J - \psi + 1 - \mu(H_\psi)|}, \text{ 其 } w_1 + w_2 = 1。$$

当 $z(x, y)$ 属于第二象限时:

$$S(Z) = \frac{\tilde{D}(Z, Q)}{\tilde{D}(Z, P)} = \frac{w_1 |\phi - \mu(S_\phi)| + w_2 |2J - \psi + \mu(H_\psi)|}{w_1 |\phi - 2K - \mu(S_\phi)| + w_2 |-\psi + \mu(H_\psi)|}, \text{ 其中 } w_1 + w_2 = 1。$$

当 $z(x, y)$ 属于第三象限时:

$$S(Z) = \frac{\tilde{D}(Z, Q)}{\tilde{D}(Z, P)} = \frac{w_1 |\phi - \mu(S_\phi)| + w_2 |2J - \psi + 1 - \mu(H_\psi)|}{w_1 |\phi - 2K - \mu(S_\phi)| + w_2 |-\psi + 1 - \mu(H_\psi)|}, \text{ 其中 } w_1 + w_2 = 1。$$

当 $z(x, y)$ 属于第四象限时:

$$S(Z) = \frac{\tilde{D}(Z, Q)}{\tilde{D}(Z, P)} = \frac{w_1 |\phi - 1 + \mu(S_\phi)| + w_2 |\psi - \mu(H_\psi)|}{w_1 |\phi - 2K - 1 + \mu(S_\phi)| + w_2 |\psi - 2J - \mu(H_\psi)|}, \text{ 其中 } w_1 + w_2 = 1。$$

5. 基于矩形坐标系的 LUZ 的多属性群决策方法

考虑语言不确定 Z-Number 的多属性群决策问题, 假设 $A_1, A_2, \dots, A_m$ 是 m 个可供选择的方案, $C_1, C_2, \dots, C_n$ 是 n 个属性, $M_1, M_2, \dots, M_k$ 是 k 个专家。这 k 个专家分别对全部 m 个方案的 n 个属性进行评价, 专家权重向量 $W = (w_1, w_2, \dots, w_k)^T$, 满足 $w_i \in [0, 1]$ 和 $\sum_{i=1}^k w_i = 1$ ($i = 1, 2, \dots, k$); 属性权重向量 $\tilde{W} = (W_1, W_2, \dots, W_n)^T$, 满足 $W_j \in [0, 1]$ 和 $\sum_{j=1}^n W_j = 1$ ($j = 1, 2, \dots, n$)。专家 M_i ($i = 1, 2, \dots, k$) 根据自己的知识经验以语言不确定 Z-Number (LUZ) 的形式给出属性 C_j ($j = 1, 2, \dots, n$) 在方案 A_l ($l = 1, 2, \dots, m$) 下的评价从而构成专家评价矩阵 Z^i ($i = 1, 2, \dots, k$), 进而利用下文所提出的基于矩形坐标系的 LUZ 的多属性群决策方法计算得到最优方案。

5.1. 决策矩阵的确定

第一步: 确定专家的评价矩阵。

$$Z^1 = \begin{bmatrix} z_{11}^1 & z_{12}^1 & \cdots & z_{1n}^1 \\ z_{21}^1 & z_{22}^1 & \cdots & z_{2n}^1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ z_{m1}^1 & z_{m2}^1 & \cdots & z_{mn}^1 \end{bmatrix} \quad Z^2 = \begin{bmatrix} z_{11}^2 & z_{12}^2 & \cdots & z_{1n}^2 \\ z_{21}^2 & z_{22}^2 & \cdots & z_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ z_{m1}^2 & z_{m2}^2 & \cdots & z_{mn}^2 \end{bmatrix} \quad \cdots \quad Z^k = \begin{bmatrix} z_{11}^k & z_{12}^k & \cdots & z_{1n}^k \\ z_{21}^k & z_{22}^k & \cdots & z_{2n}^k \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ z_{m1}^k & z_{m2}^k & \cdots & z_{mn}^k \end{bmatrix} \quad \text{其中 } z_{ij}^k \text{ 表示第 } k \text{ 个}$$

专家在第 A_l 个方案的第 C_j 个属性上的评价。例如: 第 2 位专家在第 3 个方案的第 2 个属性的评价为 $z_{32}^2 = (\text{非常好}, 0.8)$ 。

第二步: 确定可信度矩阵。在实际决策过程中, 很难找到知识和经验完全相同的若干个专家, 所以决策者会根据选取的专家所擅长的领域的不同, 在每个专家在不同方案的各个属性上给出建议之后, 对专家的评价给予可信度评价。

$$\text{Cred}^1 = \begin{bmatrix} \text{cred}_{11}^1 & \text{cred}_{12}^1 & \cdots & \text{cred}_{1n}^1 \\ \text{cred}_{21}^1 & \text{cred}_{22}^1 & \cdots & \text{cred}_{2n}^1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \text{cred}_{m1}^1 & \text{cred}_{m2}^1 & \cdots & \text{cred}_{mn}^1 \end{bmatrix} \quad \text{Cred}^2 = \begin{bmatrix} \text{cred}_{11}^2 & \text{cred}_{12}^2 & \cdots & \text{cred}_{1n}^2 \\ \text{cred}_{21}^2 & \text{cred}_{22}^2 & \cdots & \text{cred}_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \text{cred}_{m1}^2 & \text{cred}_{m2}^2 & \cdots & \text{cred}_{mn}^2 \end{bmatrix} \quad \cdots$$

$$\text{Cred}^k = \begin{bmatrix} \text{cred}_{11}^k & \text{cred}_{12}^k & \cdots & \text{cred}_{1n}^k \\ \text{cred}_{21}^k & \text{cred}_{22}^k & \cdots & \text{cred}_{2n}^k \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \text{cred}_{m1}^k & \text{cred}_{m2}^k & \cdots & \text{cred}_{mn}^k \end{bmatrix}$$

例如: 决策者对专家 2 的评价信息给出可信度评价矩阵

$$\text{Cred}^2 = \begin{bmatrix} \text{cred}_{11}^2 & \text{cred}_{12}^2 & \cdots & \text{cred}_{1n}^2 \\ \text{cred}_{21}^2 & \text{cred}_{22}^2 & \cdots & \text{cred}_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \text{cred}_{m1}^2 & \text{cred}_{m2}^2 & \cdots & \text{cred}_{mn}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\text{非常确定}, 0.8) & (\text{非常确定}, 0.7) & \cdots & (\text{确定}, 0.8) \\ (\text{不太确定}, 0.5) & (\text{比较确定}, 0.6) & \cdots & (\text{非常确定}, 0.8) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (\text{确定}, 0.9) & (\text{比较确定}, 0.8) & \cdots & (\text{不太确定}, 0.5) \end{bmatrix}$$

第三步: 决策矩阵的确定。综合前两步的评价矩阵与可信度矩阵从而得出决策矩阵:

$$Z - \text{Cred}^1 = \begin{bmatrix} z - \text{cred}_{11}^1 & z - \text{cred}_{12}^1 & \cdots & z - \text{cred}_{1n}^1 \\ z - \text{cred}_{21}^1 & z - \text{cred}_{22}^1 & \cdots & z - \text{cred}_{2n}^1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ z - \text{cred}_{m1}^1 & z - \text{cred}_{m2}^1 & \cdots & z - \text{cred}_{mn}^1 \end{bmatrix} \quad Z - \text{Cred}^2 = \begin{bmatrix} z - \text{cred}_{11}^2 & z - \text{cred}_{12}^2 & \cdots & z - \text{cred}_{1n}^2 \\ z - \text{cred}_{21}^2 & z - \text{cred}_{22}^2 & \cdots & z - \text{cred}_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ z - \text{cred}_{m1}^2 & z - \text{cred}_{m2}^2 & \cdots & z - \text{cred}_{mn}^2 \end{bmatrix}$$

$$\cdots Z-Cred^k = \begin{bmatrix} z-cred_{11}^k & z-cred_{12}^k & \cdots & z-cred_{1n}^k \\ z-cred_{21}^k & z-cred_{22}^k & \cdots & z-cred_{2n}^k \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ z-cred_{m1}^k & z-cred_{m2}^k & \cdots & z-cred_{mn}^k \end{bmatrix}$$

例如: $z-cred_{32}^2 = (z_{32}^2, cred_{32}^2) = ((\text{非常好}, 0.8), (\text{不太确定}, 0.7))$ 。

5.2. 得分矩阵的确定

根据第 3 节提出的加权曼哈顿距离公式与第 4 节提出的得分函数, 计算出每一个 $z-cred_{ij}^l$ 的得分值

$$s_{ij}^l = \frac{D(z-cred_{ij}^l, P)}{D(z-cred_{ij}^l, Q)}; \quad (l=1, 2, \cdots, k; i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n), \quad \text{从而得到得分矩阵:}$$

$$S^1 = \begin{bmatrix} s_{11}^1 & s_{12}^1 & \cdots & s_{1n}^1 \\ s_{21}^1 & s_{22}^1 & \cdots & s_{2n}^1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ s_{m1}^1 & s_{m2}^1 & \cdots & s_{mn}^1 \end{bmatrix} \quad S^2 = \begin{bmatrix} s_{11}^2 & s_{12}^2 & \cdots & s_{1n}^2 \\ s_{21}^2 & s_{22}^2 & \cdots & s_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ s_{m1}^2 & s_{m2}^2 & \cdots & s_{mn}^2 \end{bmatrix} \quad \cdots \quad S^k = \begin{bmatrix} s_{11}^k & s_{12}^k & \cdots & s_{1n}^k \\ s_{21}^k & s_{22}^k & \cdots & s_{2n}^k \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ s_{m1}^k & s_{m2}^k & \cdots & s_{mn}^k \end{bmatrix}$$

5.3. 专家权重的确定

本文采用层次分析法(AHP)来确定专家的权重[21]。

第一步: 构建专家的成对比较矩阵。根据 Saaty 的相对重要性量表, 得到 k 个专家的成对比较矩阵:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } a_{ii} = 1 (i=1, 2, \cdots, k); \quad a_{ij} \text{ 表示第 } i \text{ 个专家与第 } j \text{ 个专家的相对重要比较结果。}$$

第二步: 计算成对比较矩阵的最大特征值 $\lambda_{\max}$ 和相应的特征向量 $W = (w_1, w_2, \cdots, w_k)^T$ 。

第三步: 一致性检验。计算一致性指标 $CI = \frac{\lambda_{\max} - k}{k - 1}$, 和随机一致性指标 RI (取自预先制定的 RI 表)。

从而计算出一致性比率 $CR = \frac{CI}{RI}$ 。如果 $CR \leq 0.1$, 那么认为决策者的比较相对合理。反之, 需要重新审查并调整比较以提高一致性。

第四步: 如果通过上述的一致性检验, 那么可以得到专家权重向量为 $W = (w_1, w_2, \cdots, w_k)^T$ 。

5.4. 综合得分矩阵的确定

$$\text{根据上一步得到的权重向量, 计算得出综合得分矩阵 } \tilde{S} = \begin{bmatrix} \tilde{s}_{11} & \tilde{s}_{12} & \cdots & \tilde{s}_{1n} \\ \tilde{s}_{21} & \tilde{s}_{22} & \cdots & \tilde{s}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \tilde{s}_{m1} & \tilde{s}_{m2} & \cdots & \tilde{s}_{mn} \end{bmatrix}, \quad \text{其中}$$

$$\tilde{s}_{ij} = (w_1, w_2, \cdots, w_k) (s_{ij}^1, s_{ij}^2, \cdots, s_{ij}^k)^T。$$

5.5. 属性权重的确定

在文献[22]、[23]以及文献[24]中, 作者均采用了熵权法(EWM)作为多属性决策过程中的重要工具来

确定属性权重，它是 Shannon 和 Weaver 在 1974 年提出的，该方法在处理多指标赋权的问题时，可消除人为主观赋值所带来的结果偏差，规避主观因素的影响，提高评价结果的客观性和准确性，故本文在此步骤采取该方法。

第一步：计算熵值。根据公式 $E_j = -K \sum_{i=1}^m p_{ij} \ln(p_{ij})$ ($j=1,2,\dots,n$)，其中： $K = \frac{1}{\ln(m)}$ (m 为方案的数量)； $p_{ij} = \frac{r_{ij}}{\sum_{i=1}^m r_{ij}}$ ($r_{ij} = \tilde{s}_{ij}$)。计算这 n 个属性的熵值。

第二步：计算属性权重。根据公式 $W_j = \frac{d_j}{\sum_{j=1}^n d_j}$ ($j=1,2,\dots,n$)，其中偏离程度 $d_j = 1 - E_j$ 。从而计算得出属性权重向量 $\tilde{W} = (W_1, W_2, \dots, W_n)^T$ 。

5.6. 方案排序向量的确定

利用第 2 节提到的基于矩形坐标系的 LUZ 的加权平均聚合算子，得出排序矩阵 $Rank = \begin{bmatrix} rank_1 \\ rank_2 \\ \dots \\ rank_m \end{bmatrix}$ ，其

中。 $rank_i = (\tilde{s}_{i1}, \tilde{s}_{i2}, \dots, \tilde{s}_{in})(W_1, W_2, \dots, W_n)^T$ ($i=1,2,\dots,m$)，最后根据向量内的值的大小关系得出最终的方案排序。

5.7. 决策流程图

本文给出的基于矩形坐标系的 LUZ 的多属性群决策方法的决策流程如图 2 所示：

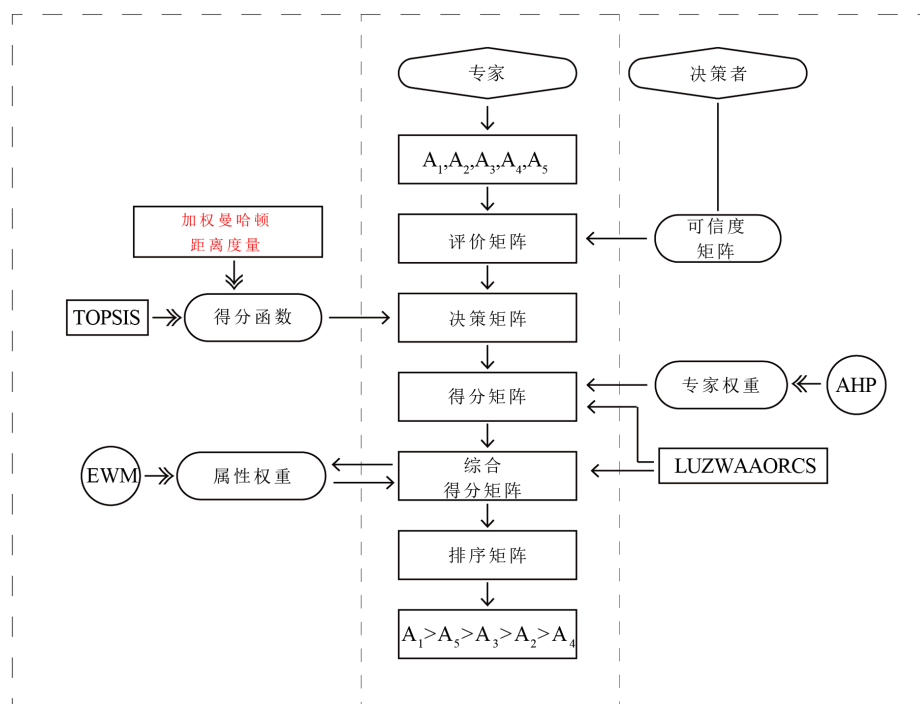


Figure 2. Decision flow charts

图 2. 决策流程图

6. 结论

在本文中, 首先回顾了模糊集、Z-Number 和语言不确定 Z-Number 的概念。其次, 提出了基于矩形坐标系的 LUZ 的加权曼哈顿距离, 相较于传统的距离度量方法, 该距离考虑到了 LUZ 是由来自两个不同主体的评价构成的, 所以在对不确定信息处理时可以根据第二个主体的信息对数据进行修正, 这样做不仅没有将计算过程复杂化而且保留了更多的有效信息。然后, 基于新提出的距离公式与 TOPSIS 决策方法, 本文给出了通过计算 LUZ 与正负理想解的距离的比值而定义的得分函数。最后, 提出了针对语言不确定 Z-Number 的新的多属性群决策方法。

致 谢

对于本篇论文的撰写, 首先要感谢的是阮艳丽老师, 她不仅耐心地指出我论文中的不足, 并且提出了诸多宝贵的修改意见, 才使得我顺利完成本篇论文。同时我也十分感谢李婷婷同学在我撰写论文的过程中给予我的支持与鼓励。在此表示由衷的感谢与敬意。

参考文献

- [1] Zadeh, L.A. (1965) Fuzzy Sets. *Information and Control*, **8**, 338-353. [https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(65\)90241-X](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X)
- [2] Zimmermann, H.J. (2010) Fuzzy Set Theory. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics*, **2**, 317-332. <https://doi.org/10.1002/wics.82>
- [3] Zadeh, L.A. (2011) A Note on Z-Numbers. *Information Sciences*, **181**, 2923-2932. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2011.02.022>
- [4] Ahmadov, S.A. (2022) Z+-Number Based Alternatives Selection in Investment Problem. In: *11th International Conference on Theory and Application of Soft Computing, Computing with Words and Perceptions and Artificial Intelligence*, Springer International Publishing, Berlin, 43-50. https://doi.org/10.1007/978-3-030-92127-9_10
- [5] Banerjee, R. and Pal, S.K. (2015) Z*-Numbers: Augmented Z-Numbers for Machine-Subjectivity Representation. *Information Sciences*, **323**, 143-178. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2015.06.026>
- [6] Tian, Y., Mi, X., Ji, Y. and Kang, B. (2021) ZE-Numbers: A New Extended Z-Numbers and Its Application on Multiple Attribute Group Decision Making. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, **101**, Article ID: 104225. <https://doi.org/10.1016/j.engappai.2021.104225>
- [7] Jia, Q., Hu, J., He, Q., Zhang, W. and Safwat, E. (2021) A Multicriteria Group Decision-Making Method Based on AIvIFSs, Z-Numbers, and Trapezium Clouds. *Information Sciences*, **566**, 38-56. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2021.02.042>
- [8] Wang, J.Q., Wu, J.T., Wang, J., Zhang, H.Y. and Chen, X.H. (2014) Interval-Valued Hesitant Fuzzy Linguistic Sets and Their Applications in Multi-Criteria Decision-Making Problems. *Information Sciences*, **288**, 55-72. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2014.07.034>
- [9] Wang, J.Q., Cao, Y.X. and Zhang, H.Y. (2017) Multi-Criteria Decision-Making Method Based on Distance Measure and Choquet Integral for Linguistic Z-Numbers. *Cognitive Computation*, **9**, 827-842. <https://doi.org/10.1007/s12559-017-9493-1>
- [10] Chen, B., Cai, Q., Wei, G. and Mo, Z. (2023) Novel Aczel-Alsina Operations-Based Linguistic Z-Number Aggregation Operators and Their Applications in Multi-Attribute Group Decision-Making Process. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, **124**, Article ID: 106541. <https://doi.org/10.1016/j.engappai.2023.106541>
- [11] Peng, H.G., Zhang, H.Y., Wang, J.Q. and Li, L. (2019) An Uncertain Z-Number Multicriteria Group Decision-Making Method with Cloud Models. *Information Sciences*, **501**, 136-154. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2019.05.090>
- [12] Jia, Q. and Hu, J. (2022) A Novel Method to Research Linguistic Uncertain Z-Numbers. *Information Sciences*, **586**, 41-58. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2021.11.016>
- [13] Zadeh, L.A. (1975) The Concept of a Linguistic Variable and Its Application to Approximate Reasoning—II. *Information Sciences*, **8**, 301-357. [https://doi.org/10.1016/0020-0255\(75\)90046-8](https://doi.org/10.1016/0020-0255(75)90046-8)
- [14] Zadeh, L.A. (1975) The Concept of a Linguistic Variable and Its Application to Approximate Reasoning—I. *Information Sciences*, **8**, 199-249. [https://doi.org/10.1016/0020-0255\(75\)90036-5](https://doi.org/10.1016/0020-0255(75)90036-5)
- [15] Zadeh, L.A. (1975) The Concept of a Linguistic Variable and Its Application to Approximate Reasoning—III. *Information Sciences*, **9**, 43-80. [https://doi.org/10.1016/0020-0255\(75\)90017-1](https://doi.org/10.1016/0020-0255(75)90017-1)

- [16] Neyman, S.N., Sitohang, B. and Sutisna, S. (2013) Reversible Fragile Watermarking Based on Difference Expansion Using Manhattan Distances for 2D Vector Map. *Procedia Technology*, **11**, 614-620. <https://doi.org/10.1016/j.protcy.2013.12.236>
- [17] Malkauthekar, M.D. (2013) Analysis of Euclidean Distance and Manhattan Distance Measure in Face Recognition. *3rd International Conference on Computational Intelligence and Information Technology (CIIT 2013)*, Mumbai, 18-19 October 2013, 503-507. <https://doi.org/10.1049/cp.2013.2636>
- [18] Zheng, X.J. (2014) A Connectivity Graph Generation Approach for Manhattan Path Calculation in Detailed Facility Layout. *Applied Mathematics and Computation*, **237**, 238-251. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.03.100>
- [19] Chiu, W.Y., Yen, G.G. and Juan, T.K. (2016) Minimum Manhattan Distance Approach to Multiple Criteria Decision Making in Multi-Objective Optimization Problems. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, **20**, 972-985. <https://doi.org/10.1109/TEVC.2016.2564158>
- [20] Wang, C., Yang, J. and Zhang, B. (2024) A Fault Diagnosis Method Using Improved Prototypical Network and Weighting Similarity-Manhattan Distance with Insufficient Noisy Data. *Measurement*, **226**, Article ID: 114171. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2024.114171>
- [21] Su, W., Luo, D., Zhang, C. and Zeng, S. (2022) Evaluation of Online Learning Platforms Based on Probabilistic Linguistic Term Sets with Self-Confidence Multiple Attribute Group Decision Making Method. *Expert Systems with Applications*, **208**, Article ID: 118153. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2022.118153>
- [22] Banadkouki, M.R.Z. (2023) Selection of Strategies to Improve Energy Efficiency in Industry: A Hybrid Approach Using Entropy Weight Method and Fuzzy TOPSIS. *Energy*, **279**, Article ID: 128070. <https://doi.org/10.1016/j.energy.2023.128070>
- [23] 游杰. 基于熵权法和偏好关系的犹豫模糊多属性决策方法研究[D]: [硕士学位论文]. 昆明: 云南师范大学, 2023.
- [24] 张甜, 阎红灿. 基于熵权法的多属性决策算法优化及应用[J]. 华北理工大学学报(自然科学版), 2022, 44(1): 82-88.