Operations Research and Fuzziology 运筹与模糊学, 2024, 14(3), 301-312
Published Online June 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/orf
https://doi.org/10.12677/orf.2024.143268

联盟信息缺失下的合作博弈比例分离解及其应用

王佳颖，张　广*

上海理工大学管理学院，上海

收稿日期：2024年3月25日；录用日期：2024年6月10日；发布日期：2024年6月18日

摘　要

本文研究了合作博弈理论，在部分联盟信息缺失的基础上将联盟形成过程和比例分配结合起来，提出了部分联盟信息缺失下的比例分离解的概念。首先，在部分联盟信息缺失的情况下利用给定的权重，依据回报率高的联盟先加入大联盟，得出大联盟合适的划分，之后按照加入顺序对划分联盟的边际贡献基于权重进行比例分配。其次，在公理刻画部分基于最高回报一致性进行了研究，得出三个刻画定理。最后，将新的解概念应用到区域建设问题中，以一带一路某地区为例，分析了该地区修建高铁时各国合理的出资比例。

关键词

合作博弈，信息缺失，比例分离解，一带一路

The Proportional Split-Off Solution and Application for Cooperative Games in the Missing Information of Coalitions

Jiaying Wang, Guang Zhang*

Business School, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Mar. 25th, 2024; accepted: Jun. 10th, 2024; published: Jun. 18th, 2024

Abstract

This paper studies the theory of cooperative games, combines the coalition formation process and

*通讯作者。

文章引用: 王佳颖, 张广. 联盟信息缺失下的合作博弈比例分离解及其应用[J]. 运筹与模糊学, 2024, 14(3): 301-312.
DOI: 10.12677/orf.2024.143268

proportional allocation on the basis of partial coalition information missing, and proposes the concept of proportional split-off solution under partial coalition information missing. Firstly, in the missing information of some coalitions, using the given weights, the coalition with high return rate joins the big coalition first, thus obtaining the appropriate division of the big coalition, and then according to the order of joining the marginal contribution of the divided coalition based on the proportional allocation of the weights. Secondly, in the axiomatic characterization section, three characterization theorems are derived based on the highest payoff consistency. Finally, the new solution concept is applied to the regional construction problem, and the reasonable contribution ratio of each country in the construction of high-speed rail in a region of The Belt and Road is analyzed as an example.

Keywords

Cooperative Game, Missing Information, Proportional Split-Off Solution, The Belt and Road

1. 引言

在以往对于支付效用可转移的合作博弈(TU 博弈)的研究中，往往会假定联盟中任意参与者都能形成联盟进行合作，并产生相应的联盟收益。在对于合作博弈的研究中，Shapley 值是合作博弈最重要的单值解[1]。Shapley 值使用特征函数中包含的所有信息来决定每个玩家的收益。当大联盟中部分联盟的信息缺失时，Shapley 值就不能用于计算分配联盟的收益。现实生活中，由于某些因素的影响，使得一些联盟并不是真正的形成，大联盟中的某些联盟的价值等于空集，那么联盟的价值被视为在博弈中缺失。某些联盟价值缺失的博弈就被称为部分联盟信息缺失的合作博弈[2]。

等分解和比例分解是以往较为常见的合作博弈分配规则[3]，等分解是比例分解的一种特殊情况。但在现实中的分配，博弈中参与人的重要程度通常是不同的，考虑角度也不是单一的。分配联盟价值时规则的设计和分配结果与联盟形成的过程有很强的关系，如信息的沟通与交流[4] [5]。在经典合作博弈中分配过程的公平性和合理性与结果也有很强的联系[6] [7]。目前，将联盟形成过程考虑进去的解主要有 Dutta-Ray 解、等分离集和过程平等解等[8] [9] [10]。而比例分离解这种结合比例分配以及联盟形成过程给定权重的合作博弈分配方法兼顾了参与人的重要程度和联盟形成过程[11]。但是目前对于部分联盟信息缺失的合作博弈基于比例分配思想的分配过程和分配规则却鲜有研究。

合作博弈最重要的领域之一就是对于区域间经济合作的成本分摊。在该领域中，很多学者对区域经济合作补偿机制进行了研究。如“一带一路”能源电力投资项目安全随机合作博弈分担模型[12]、中国—东盟国家环保合作博弈模型[13]、基于区间模糊 Shapley 值构建“一带一路”PPP 项目利益分配初始模型[14]以及 Shapley 值法作为利益分享方法，构建了中欧班列区域利益分享机制[15]等。但基于联盟信息缺失下的比例分离解规则研究区域建设合作成本分摊问题还很少见。

本文将联盟形成的过程性与按比例分配规则进行结合，研究一类联盟信息缺失的比例分离解。通过考虑外部给定权重，提出了联盟信息缺失的比例分离解的概念。将此解应用于“一带一路”区域建设合作的成本分摊问题，得到了较为合理的各国出资比例。

2. 合作博弈

令 $N=\{1,\cdots,n\}$， $n\geq 2$，为非空有限个参与人组成的集合，将任意参与人组成的子集 $S\in 2^N$ 称为联盟，N 就被称为大联盟。给定 (N,v) 来表示合作博弈，N 是非空有限个参与人组成的集合，$v:2^N\to\mathbb{R}$ 是特征函数且 $v(\varnothing)=0$。$v(S)$ 代表在没有其他参与人合作的情况下 S 这个联盟独立获得的价值。$|S|$ 表示任意非空联盟 S 的基数，$\mathcal{G}^N$ 表示联盟 N 的所有合作博弈的集合。f 在 $\mathcal{G}^N$ 上将一个向量 $f(N,v)\in\mathbb{R}^n$ 与 $(N,v)\in\mathcal{G}^N$ 相关联。

若集合 $\{T_1,T_2,\cdots,T_m\}\left(m\in\{1,2,\cdots,|N|\}\right)$ 满足 $T_i\cap T_j=\varnothing$ 且 $\bigcup_{i=1}^m T_i=N$， $\forall i,j\in\{1,2,\cdots,m\}$ 且 $i\neq j$，则称其为 N 的一个划分。对任意的 $f\in\mathbb{R}^n$ 和 $\omega\in\mathbb{R}_+^n$，令 $P_0^{f,\omega}=\varnothing$，则 $\left\{P_1^{f,\omega},P_2^{f,\omega},\cdots,P_m^{f,\omega}\right\}$ 为由 f 和 ω 导出的 N 的有序覆盖，其中 $k\in\{1,2,\cdots,m\}$，$P_k^{f,\omega}=\left\{i\in N\middle|\frac{f_i}{\omega_i}\geq\frac{f_j}{\omega_j},\forall j\in N\setminus P_{k-1}^{f,\omega}\right\}$，另记 $p_k^{f,\omega}=\frac{f_i}{\omega_i}\quad\forall i\in P_k^{f,\omega}\setminus P_{k-1}^{f,\omega}$。$\forall T\in 2^N$，$(N,v)\in\mathcal{G}^N$，$\left(T,v|_T\right)$ 为 (N,v) 与联盟 T 有关的子博弈，对于任意的 $S\in 2^T$， $v|_T(S)=v(S)$。

映射 $F:\mathcal{G}^N\to\mathbb{R}^n$ 称为合作博弈的解，其分配给 $(N,v)\in\mathcal{G}^N$ 一组支付向量 $F(N,v)\subseteq\mathbb{R}^n$ 并且满足 $\sum_{i\in N}f_i\leq v(N)$，$\forall f\in F(N,v)$；若 $|F(N,v)|=1$，则 F 称为单值解，否则为多值解。设 F 为某类博弈 $\mathcal{G}'^N\subseteq\mathcal{G}^N$ 的解且满足一些特定性质，若对其他满足该特定性质的解 F' 均有 $F'(N,v)\subseteq F(N,v)$，$\forall(N,v)\in\mathcal{G}'^N$，则 F 为满足该特定性质的最大解，不妨令其中两个解为 F 和 F' 且 $F(N,v)\neq F'(N,v)$，$\forall(N,v)\in\mathcal{G}'^N$，则必定存在另外一个解 $\hat{F}$ 使得对任意的 $\forall(N,v)\in\mathcal{G}'^N$ 有 $\hat{F}(N,v)=F(N,v)\cup F'(N,v)$ 成立。由于在某些 $(N,v)\in\mathcal{G}'^N$ 中有 $F(N,v)$，$F'(N,v)\subsetneq\hat{F}(N,v)$，这与 F 和 F' 均是最大解矛盾。核心是合作博弈重要的解概念之一。$\forall(N,v)\in\mathcal{G}^N$，核心为

$$C(N,v)=\left\{f\in\mathbb{R}^n\middle|\sum_{i\in N}f_i=v(N);\sum_{i\in S}f_i\geq v(S),\forall S\in 2^N\right\}.$$

3. 部分联盟信息缺失的合作博弈比例分离解

参与人间的差异性在以往对于合作博弈的研究中往往容易被忽略，如等分离解。但是在现实中的分配，博弈中参与人有着不同的重要程度，比例分离解这种给定权重的合作博弈分配方法就考虑到了这种情况。在比例分离解中，权重往往是由外部给定，参与人单干时的收益也可以作为权重。部分联盟信息缺失的合作博弈解中令参与者所属的已知联盟的数量作为给定的权重，来分配大联盟的价值。部分联盟信息缺失的合作博弈比例分离解是将比例分离解中外部给定的权重变为参与者所属的已知联盟的数量，考虑了特征函数中包含的信息量。

3.1. 部分联盟信息缺失的合作博弈解

部分联盟信息缺失的合作博弈是将参与者的幂集映射到实线和空集的并集。对于大联盟中的某些联盟，如果它们的价值等于空集，那么联盟的价值被视为在博弈中缺失。给定 (N,v) 来表示部分联盟信息缺失的合作博弈，N 是非空有限个参与人组成的集合，$v:2^N\to\mathbb{R}\cup\{\varnothing\}$ 是特征函数，且 $v(\varnothing)=0$。H^N 表示部分联盟信息缺失下的联盟N的所有合作博弈的集合，$\mathcal{G}^N\subseteq H^N$，令 $v\in H^N$。

对于任意的 $v\in H^N$，令集合 $K(v)$ 为：

$$K(v)=\{S\subseteq N:v(S)\neq\varnothing\}.$$

因此，集合 $K(v)$ 就是博弈中已知联盟的集合。然后令

$$K_i(v)=\{S\subseteq K(v):i\in S\},|K_i(v)|\geq 1.$$

$K_i(v)$ 包含那些参与人i是其中一员，且其价值在博弈中已知的联盟。对于 $i \in N$ 有：

$$f_i(N,v) = \frac{|K_i(v)|}{\sum_{j\in N}|K_j(v)|} v(N).$$

在这个模型中，允许任意部分信息在特征函数中缺失，$v(N) \neq \varnothing, v(\varnothing) = 0$。该模型以参与者所属的已知联盟的数量为比例，将大联盟的价值分配给参与者。因此，当所有信息都包含在特征函数中时，它与等分解一致。

3.2. 解概念

三元组(N,v,ω)为一个赋权博弈，(N,v)为合作博弈，$\omega \in \mathbb{R}_+^n$ 作为此博弈的非负权重向量。令 $\mathcal{G}_\omega$ 表示所有的赋权博弈的集合。给定博弈$(N,v,\omega) \in \mathcal{G}_\omega^N$。令 H_ω 表示所有部分联盟信息缺失下的赋权博弈的集合。给定部分联盟信息缺失下的合作博弈$(N,v,\omega) \in H_\omega^N$。给定 N 的一个划分 $\pi = \{T_1,T_2,\cdots,T_m\}$，其中 $T_i \cap T_j = \varnothing$ 且 $\bigcup_{i=1}^m T_i = N$。$\forall k \in \{1,2,\cdots,m\}$，博弈$(N_k,v_k)$定义如下

$$N_k = N_{k-1} \setminus T_{k-1}, N_0 = N, T_0 = \varnothing;$$

$$v_k(S) = v_{k-1}(S \cup T_{k-1}) - v_{k-1}(T_{k-1}), v_0 = v, S \in 2^{N_k}. \tag{3.1}$$

此外，有

$$T_k \in \arg\max_{S\in 2^{N_k}\setminus\{\varnothing\}} \frac{v_k(S)}{\sum_{j\in S}\omega_j}, \forall k \in \{0,1,\cdots,m\},$$

则 N 的划分 $\pi = \{T_1,T_2,\cdots,T_m\}$ 是(N,v,ω)适配的。对此适配划分 π，存在一个比例支付向量 $f \in \mathbb{R}^n$，其中 $f_i = \frac{\omega_i}{\sum_{j\in T_k}\omega_j} v_k(T_k)$，$\forall i \in N$。注意到，$\omega_j, \forall j \in T_k$，由原博弈$(N,v,\omega)$直接给定，与$(N_k,v_k)$无关。

3.2.1. 比例分离解

定义 3.1 任意的$(N,v,\omega) \in \mathcal{G}_\omega^N$，其比例分离解(PSO)如下

$$PSO(N,v,\omega) = \left\{ f \in \mathbb{R}^n \middle| f_i = \alpha_k\omega_i, \forall i \in T_k; \alpha_k = \max_{S\in 2^{N_k}\setminus\{\varnothing\}} \frac{v_k(S)}{\sum_{j\in S}\omega_j}, T_k \in \arg\max_{S\in 2^{N_k}\setminus\{\varnothing\}} \frac{v_k(S)}{\sum_{j\in S}\omega_j} \right\} \tag{3.2}$$

其中，$\pi = \{T_1,T_2,\cdots,T_m\}$ 是(N,v,ω)的适配划分；$\forall k \in \{1,2,\cdots,m\}$，$(N_k,v_k)$由(3.1)式来定义。

注 3.1 定义 3.1 在按比例分配的思想的基础上，将合作联盟的一种形成过程也考虑进来：随着参与人的不断加入，联盟由小到大的过程。将权重向量引入比例分解丰富了合作博弈的解概念，在这个解中当 $\omega_i = v(i) \in \mathbb{R}_+, \forall i \in N$ 时，每个参与人自身独立价值就作为分配大联盟价值时所占的权重；而当 $\omega_i = c \in \mathbb{R}_+, \forall i \in N$ 时，此解退化为等分离集(equal split-off set)。在这个解中，权重无论是直接给定还是取值为参与人自身独立价值，权重本质上为外生权重。

3.2.2. 部分联盟信息缺失的合作博弈比例分离解

定义 3.2 任意的$(N,v,\omega) \in H_\omega^N$，其信息缺失下的比例分离解(IMPSO)为下列支付向量的集合

$$\begin{aligned} &IMPSO(N,v,\omega) \\ &= \left\{ f \in \mathbb{R}^n \middle| f_i = \alpha_k\omega_i, \forall i \in T_k; \alpha_k = \max_{S\in K_i(v)} \frac{v_k(S)}{\sum_{j\in S}\omega_j}, T_k \in \arg\max_{S\in K_i(v)} \frac{v_k(S)}{\sum_{j\in S}\omega_j} \right\} \end{aligned} \tag{3.3}$$

其中，$\pi=\{T_1,T_2,\cdots,T_m\}$ 为 (N,v,ω) 的适配划分；$\forall k\in\{1,2,\cdots,m\}$，$(N_k,v_k)$ 由(3.1)式来定义。

注 3.2 定义 3.2 是基于按比例分配的思想，将信息缺失的合作博弈的分配方法和比例分离解的概念结合起来。这样的分配方法不仅很好的考虑到了各参与人之间的合作关系，各参与人所占比重的不同，还考虑到随着参与人的不断加入，联盟由小到大的联盟形成过程。

例 3.1 考虑 3 人博弈 $(N,v,\omega),(N,v',\omega')\in H_\omega^N$，其中 $N=\{1,2,3\}$，以及

$$v(S)=\begin{cases}12, & S\in\{\{1,2\},\{1,3\},N\},\\ 4, & S=\{1\},\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\qquad v'(S)=\begin{cases}12, & S\in\{\{1,2\},N\},\\ 6, & S=\{1\},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

令 $\omega=|K_i(v)|$，$\omega=(4,2,2)$，$\omega'=(3,2,1)$；(N,v,ω) 缺失信息下的比例分离解 $IMPSO(N,v,\omega)=\{(8,4,0),(8,0,4)\}$，其中，$(8,4,0)$ 对应的适配划分为 $\{\{1,2\},\{3\}\}$，$(8,0,4)$ 对应的适配划分为 $\{\{1,3\},\{2\}\}$；(N,v',ω') 缺失信息下的比例分离解 $IMPSO(N,v',\omega')=\left\{\left(\frac{36}{5},\frac{24}{5},0\right)\right\}$，其对应的适配划分为 $\{\{1,2\},\{3\}\}$。在这里，$C(N,v)=\varnothing$，而 $C(N,v')=\left\{\left(\frac{36}{5},\frac{24}{5},0\right)\right\}$，因此，$IMPSO(N,v,\omega)\subsetneq C(N,v)$ 而 $IMPSO(N,v',\omega')\subseteq C(N,v')$。

根据信息缺失下的比例分离解的定义，我们可以直接得出如下性质(证明略)。

引理 3.1 给定 $(N,v,\omega)\in H_\omega^N$, $f\in IMPSO(N,v,\omega)$ 以及 f 对应的划分 $\pi=\{T_1,T_2,\cdots,T_m\}$，有下式成立

$$1)\ \frac{f_i}{\omega_i}=\frac{f_j}{\omega_j},\forall i,j\in T_k,k\in\{1,2,\cdots,m\};$$

$$2)\ \frac{f_i}{\omega_i}=\frac{f_j}{\omega_j},\forall i\in T_k,\forall j\in T_h,k,h\in\{1,2,\cdots,m\}\ \text{且}\ k\le h;$$

$$3)\ \sum_{\ell=1}^{k}\sum_{i\in T_\ell}f_i=v\left(\bigcup_{\ell=1}^{k}T_\ell\right),\forall k\in\{1,2,\cdots,m\}.$$

引理 3.2 给定 $(N,v,\omega)\in H_\omega^N$, $f\in IMPSO(N,v,\omega)$ 和 f,ω 的有序覆盖 $\{P_1^{f,\omega},P_2^{f,\omega},\cdots,P_m^{f,\omega}\}$，则

$$1)\ \sum_{i\in P_k^{f,\omega}}f_i=v\left(P_k^{f,\omega}\right),\forall k\in\{1,2,\cdots,m\};$$

$$2)\ p_k^{f,\omega}=\frac{v\left(P_k^{f,\omega}\right)-v\left(P_{k-1}^{f,\omega}\right)}{\sum_{i\in P_k^{f,\omega}\setminus P_{k-1}^{f,\omega}}\omega_i},\forall k\in\{1,2,\cdots,m\}\ \text{且}\ P_{k-1}^{f,\omega}\ne N.$$

在引理 3.2 中，由 $IMPSO$ 解和 f,ω 的有序覆盖 $\{P_1^{f,\omega},P_2^{f,\omega},\cdots,P_m^{f,\omega}\}$ 定义可知，$P_k^{f,\omega}=\bigcup_{\ell=1}^{k}T_k,k\in\{1,2,\cdots,m\}$，因此由引理 3.1 3)可直接得到 1)成立；又由 $T_k=P_k^{f,\omega}\setminus P_{k-1}^{f,\omega}$ 以及 $p_k^{f,\omega}$ 的设定，可知 $p_k^{f,\omega}=\alpha_k,k\in\{1,2,\cdots,m\}$，因此 2)成立。

3.3. 公理刻画

此节研究信息缺失下的比例分离解的公理刻画。令 F 是博弈空间 H_ω^N 上的解，有如下定义。

定义 3.3 任意的 $(N,v,\omega)\in H_\omega^N$，如果 $F(N,v,\omega)\ne\varnothing$，那么我们称 F 为非空解。

定义 3.4 任意的 $(N,v,\omega)\in H_\omega^N$，如果 $\forall f\in F(N,v,\omega)$，有 $\sum_{i\in P_1^{f,\omega}}f_i\le v\left(P_1^{f,\omega}\right)$ 成立，那么我们称 F 为最高回报有界。

最高回报有界是指在大联盟中回报率最高的一群参与人可以首先形成“高回报率”联盟并得到其最

DOI: 10.12677/orf.2024.143268

高回报率的支付。

定义 3.5 任意的 $(N,v,\omega)\in H_\omega^N$，若 $\forall f\in F(N,v,\omega)$，存在 $\left\{T\in \arg\max_{S\in K_i(v)}\frac{v(S)}{\sum_{j\in S}\omega_j}\right\}$ 以及 $i\in T$ 使得 $f_i\geq \frac{\omega_i v(T)}{\sum_{j\in T}\omega_j}$ 成立，那么我们称 F 是弱比例稳定的。

弱比例稳定性是指在大联盟中一定存在一个基于给定权重的“高回报率”联盟，且在大联盟中参与人的支付需大于等于其在该联盟中的比例分配支付。

引理 3.3 在博弈空间 H_ω^N 中，部分联盟信息缺失下的比例分离解满足最高回报有界与弱比例稳定性且其为非空解。

证 由定义 3.2 中的(3.3)式可知，对任意的 $(N,v,\omega)\in H_\omega^N$，$\exists T_1\neq\varnothing$，因此存在 N 的适配划分 π 使得 $IMPSO(N,v,\omega)\neq\varnothing$，因此部分联盟信息缺失下的比例分离解是非空解。

考虑任意的 $(N,v,\omega)\in H_\omega^N$ 以及 $f\in IMPSO(N,v,\omega)$。由引理3.2中的性质 1)可知 $\sum_{i\in P_1^{f,\omega}} f_i = v\left(P_1^{f,\omega}\right)$，因此部分联盟信息缺失下的比例分离解满足最高回报有界。由定义 3.2 中的(3.3)式知，$\pi=\{T_1,T_2,\cdots,T_m\}$ 为 f 的适配划分，$T_1\in\arg\max_{S\in K_i(v)}\frac{v_k(S)}{\sum_{j\in S}\omega_j}$ 成立，且 $f_i=\alpha_1\omega_i=\frac{\omega_i v(T_1)}{\sum_{j\in T_1}\omega_j}$，$\forall i\in T_1$，因此部分联盟信息缺失下的比例分离解满足弱比例稳定性。

定义 3.6 $\forall(N,v,\omega)\in H_\omega^N$ 和 $f\in F(N,v,\omega)$，且 $P_1^{f,\omega}\neq N$，有 $\left(N\setminus P_1^{f,\omega},v_{sel}^f,\omega_{N\setminus P_1^{f,\omega}}\right)\in H_\omega^N$，$f_{N\setminus P_1^{f,\omega}}\in F\left(N\setminus P_1^{f,\omega},v_{sel}^f,\omega_{N\setminus P_1^{f,\omega}}\right)$，那么 F 就是最高回报自一致的，$\forall S\in N\setminus P_1^{f,\omega}$ 有

$$v_{sel}^f(S)=\sum_{i\in S} f_i\left(S\cup P_1^{f,\omega},v|_{S\cup P_1^{f,\omega}},\omega_{S\cup P_1^{f,\omega}}\right).$$

定义 3.7 $\forall(N,v,\omega)\in H_\omega^N$ 和 $f\in F(N,v,\omega)$，且 $P_1^{f,\omega}\neq N$，有 $\left(N\setminus P_1^{f,\omega},v_{com}^f,\omega_{N\setminus P_1^{f,\omega}}\right)\in H_\omega^N$，$f_{N\setminus P_1^{f,\omega}}\in F\left(N\setminus P_1^{f,\omega},v_{com}^f,\omega_{N\setminus P_1^{f,\omega}}\right)$，那么 F 就是最高回报补足一致的，$\forall S\in N\setminus P_1^{f,\omega}$，且 $v(\varnothing)=0$，有

$$v_{com}^f(S)=v\left(S\cup P_1^{f,\omega}\right)-\sum_{i\in P_1^{f,\omega}} f_i.$$

定义 3.8 $\forall(N,v,\omega)\in H_\omega^N$ 和 $f\in F(N,v,\omega)$，且 $P_1^{f,\omega}\neq N$，有 $\left(N\setminus P_1^{f,\omega},v_{mar}^f,\omega_{N\setminus P_1^{f,\omega}}\right)\in H_\omega^N$，$f_{N\setminus P_1^{f,\omega}}\in F\left(N\setminus P_1^{f,\omega},v_{mar}^f,\omega_{N\setminus P_1^{f,\omega}}\right)$，那么 F 就是最高回报边际一致的，$\forall S\in N\setminus P_1^{f,\omega}$，有

$$v_{mar}^f(S)=v\left(S\cup P_1^{f,\omega}\right)-v\left(P_1^{f,\omega}\right).$$

定义 3.6~3.8 含义相似，都表示一群参与人离开大联盟后对其他参与人支付产生的影响。定义 3.6 的含义是：在“高回报率”联盟(大联盟中回报率最高的一群参与人)离开联盟后，通过调整选择器，来使得其他参与人在自导出博弈中的支付等于原博弈中的支付；在这里，自导出博弈指的是当一群参与人与“高回报率”联盟形成一个子博弈后，选择器将分配其在子博弈中的支付。定义 3.7 指的是：当“高回报率”联盟的参与人离开大联盟后，其他参与人在补足导出博弈中的支付等于在原博弈中的支付；在这里，补足导出博弈指的是当一群参与人与“高回报率”联盟进行合作，要先保证“高回报率”联盟的参与人的支付，之后这群参与人分配剩下的部分。定义 3.8 的含义是：当“高回报率”联盟离开大联盟后，其他

参与人在其边际导出博弈中的支付等于原博弈中的支付；在这里，边际导出博弈指的是当一群参与人与“高回报率”联盟合作，这群人分配其为“高回报率”联盟的参与人带来的边际贡献。

引理 3.4 在博弈空间 H_{ω}^{N} 中，部分联盟信息缺失下的比例分离解满足最高回报自一致，补足一致和边际一致。

证 考虑 $\forall(N,v,\omega)\in H_{\omega}^{N}$ 以及 $f\in IMPSO(N,v,\omega)$ 且 $P_1^{f,\omega}\neq N$。$\pi=\{T_1,T_2,\cdots,T_m\}$ 为 f 一个适配划分，有 $P_k^{f,\omega}=\bigcup_{\ell=1}^{k}T_{\ell},k\in\{1,2,\cdots,m\}$，因此，$\sum_{i\in P_1^{f,\omega}}f_i=\sum_{i\in T_1}f_i=v(T_1)=v\left(P_1^{f,\omega}\right)$ 和

$P_1^{f,\omega}=T_1\in\arg\max_{S\in K_i(v)}\dfrac{v_k(S)}{\sum_{j\in S}\omega_j}$。令 $S\subseteq N\setminus P_1^{f,\omega}$，$i\in S\bigcup P_1^{f,\omega}$，有 $P_1^{f,\omega}\in\arg\max_{R\in K_i(v)}\dfrac{v_{S\cup P_1^{f,\omega}}(R)}{\sum_{j\in R}\omega_j}$。这表明存在一个选择器 $f\in IMPSO(N,v,\omega)$，使得 $f_i\left(S\cup P_1^{f,\omega},v|_{S\cup P_1^{f,\omega}},\omega_{S\cup P_1^{f,\omega}}\right)=f_i,\forall i\in P_1^{f,\omega}$，成立，即在子博弈 $\left(S\cup P_1^{f,\omega},v|_{S\cup P_1^{f,\omega}},\omega_{S\cup P_1^{f,\omega}}\right)$ 中 f 分配给“高回报率”联盟的参与人其在原博弈中的支付。令 f 是 IMPSO 为满足上述条件的选择器，则 $\forall S\in N\setminus P_1^{f,\omega}$，有

$$
\begin{aligned}
v_{sel}^{f}(S)&=\sum_{i\in S}f_i\left(S\cup P_1^{f,\omega},v|_{S\cup P_1^{f,\omega}},\omega_{S\cup P_1^{f,\omega}}\right)\\
&=\sum_{i\in S\cup P_1^{f,\omega}}f_i\left(S\cup P_1^{f,\omega},v|_{S\cup P_1^{f,\omega}},\omega_{S\cup P_1^{f,\omega}}\right)-\sum_{i\in P_1^{f,\omega}}f_i\left(S\cup P_1^{f,\omega},v|_{S\cup P_1^{f,\omega}},\omega_{S\cup P_1^{f,\omega}}\right)\\
&=v\left(S\cup P_1^{f,\omega}\right)-\sum_{i\in P_1^{f,\omega}}f_i\\
&=v\left(S\cup P_1^{f,\omega}\right)-v\left(P_1^{f,\omega}\right).
\end{aligned}
$$

由(3.2)式可知，此时 $v_{sel}^{f}=v_2$。同理可得，$f_{N\setminus P_1^{f,\omega}}\in IMPSO\left(N\setminus P_1^{f,\omega},v_{sel}^{f},\omega_{N\setminus P_1^{f,\omega}}\right)$。因此部分联盟信息缺失的比例分离解满足最高回报自一致。

同样地，$\forall S\subseteq N\setminus P_1^{f,\omega}$，有

$$
v_{com}^{f}(S)=v\left(S\cup P_1^{f,\omega}\right)-\sum_{i\in P_1^{f,\omega}}f_i=v\left(S\cup P_1^{f,\omega}\right)-v\left(P_1^{f,\omega}\right)=v_{mar}^{f}(S)=v_2(S).
$$

部分联盟信息缺失的比例分离解满足最高回报补足一致和最高回报边际一致。引理得证。

定理 3.1 在博弈空间 H_{ω}^{N} 中，满足最高回报有界，弱比例稳定性和最高回报自一致的唯一最大解是部分联盟信息缺失的比例分离解。

证 由引理 3.3 和引理 3.4 知，部分联盟信息缺失的比例分离解满足最高回报有界，弱比例稳定性和最高回报自一致。之后我们证唯一性。

令 F 是博弈空间 H_{ω}^{N} 中的一个解，且满足最高回报有界，弱比例稳定性和最高回报自一致，接下来我们用归纳法来证明 $\forall(N,v,\omega)\in\mathcal{G}_{\omega}^{N}$，均有 $F(N,v,\omega)\subseteq IMPSO(N,v,\omega)$ 成立。

$\forall(N,v,\omega)\in H_{\omega}^{N}$ 且 $|N|=1$，根据弱比例稳定性可得 $F(N,v,\omega)=IMPSO(N,v,\omega)=\{v(N)\}$。

假设 $k\in\mathbb{N}$，假设 $\forall(N,v,\omega)\in H_{\omega}^{N}$ 且 $|N|\le k$，有 $F(N,v,\omega)\subseteq IMPSO(N,v,\omega)$ 成立。

迭代：考虑 $|N|=k+1$ 人的博弈 $(N,v,\omega)\in H_{\omega}^{N}$，如果 $F(N,v,\omega)\neq\varnothing$，则有 $F(N,v,\omega)\subseteq IMPSO(N,v,\omega)$。如果 $F(N,v,\omega)\neq\varnothing$，则设 $f\in F(N,v,\omega)$。由弱比例稳定性和 $\omega\in\mathbb{R}_{+}^{n}$ 知，存在 $T\in\arg\max_{S\in K_i(v)}\dfrac{v(S)}{\sum_{j\in S}\omega_j}$ 且 $i\in T$，有

$$p_1^{f,\omega}=\frac{x_i}{\omega_i}\geq\frac{v(T)}{\sum_{j\in T}\omega_j}\geq\max_{S\in K_i(v)}\frac{v(S)}{\sum_{j\in S}\omega_j}.$$

由最高回报有界可得

$$v\left(P_1^{f,\omega}\right)\geq\sum_{i\in P_1^{f,\omega}}f_i=\sum_{i\in P_1^{f,\omega}}\left(p_1^{f,\omega}\cdot\omega_i\right)=p_1^{f,\omega}\sum_{i\in P_1^{f,\omega}}\omega_i.$$

再由 $\omega\in\mathbb{R}_+^n$ 得

$$p_1^{f,\omega}\leq\frac{v\left(P_1^{f,\omega}\right)}{\sum_{i\in P_1^{f,\omega}}\omega_i}\leq\max_{S\in K_i(v)}\frac{v(S)}{\sum_{j\in S}\omega_j}.$$

因此，$p_1^{f,\omega}=\frac{v\left(P_1^{f,\omega}\right)}{\sum_{i\in P_1^{f,\omega}}\omega_i}=\max_{S\in K_i(v)}\frac{v(S)}{\sum_{j\in S}\omega_j}$，$f_i=p_1^{f,\omega}\omega_i=\frac{v\left(P_1^{f,\omega}\right)}{\sum_{j\in P_1^{f,\omega}}\omega_j}\omega_i$，$\forall i\in P_1^{f,\omega}$。

如果 $P_1^{f,\omega}=N$，那么可以知道 $F(N,v,\omega)\subseteq IMPSO(N,v,\omega)$。如果 $P_1^{f,\omega}\neq N$，那么由最高回报一致可知，必定存在一个选择器 f 使得 $f_{N\setminus P_1^{f,\omega}}\in F\left(N\setminus P_1^{f,\omega},v_{sel}^f,\omega_{N\setminus P_1^{f,\omega}}\right)$ 成立。

再由 $\left|N\setminus P_1^{f,\omega}\right|\leq k$ 以及假设步，可得 $F\left(N\setminus P_1^{f,\omega},v_{sel}^f,\omega_{N\setminus P_1^{f,\omega}}\right)\in IMPSO\left(N\setminus P_1^{f,\omega},v_{sel}^f,\omega_{N\setminus P_1^{f,\omega}}\right)$，对 $\forall f\in F(N,v,\omega)$ 有 $f_{N\setminus P_1^{f,\omega}}\in IMPSO\left(N\setminus P_1^{f,\omega},v_{sel}^f,\omega_{N\setminus P_1^{f,\omega}}\right)$ 成立。又由 $f_i=\frac{v\left(P_1^{f,\omega}\right)}{\sum_{j\in P_1^{f,\omega}}\omega_j}\omega_i$，$\forall i\in P_1^{f,\omega}$，因此 $f\in IMPSO(N,v,\omega)$。有 $F(N,v,\omega)\in IMPSO(N,v,\omega)$ 成立。

可以发现，部分联盟信息缺失下的比例分离解中的元素往往不是唯一的。有时给定博弈的参与人集合有多个适配划分，那么部分联盟信息缺失下的比例分离解就会存在多个支付向量。接下来用一个例子来说明定理 3.1 中三个性质是逻辑独立的。

例 3.2 考虑 H_ω^N 上的如下 3 个解：$\forall(N,v,\omega)\in H_\omega^N$，

$$f^1(N,v,\omega)=\begin{cases}C(N,v), & |N|\leq 3,\\ \varnothing, & |N|>3;\end{cases}\quad f^2(N,v,\omega)=\frac{v(N)\omega_i}{\sum_{j\in N}\omega_j},\forall i\in N\text{；}$$

$$f^3(N,v,\omega)=\begin{cases}(5,5,2), & \text{例3.1中的}(N,v,\omega),\\ IMPSO(N,v,\omega), & \text{其他博弈},\end{cases}$$

其中，f^1 不满足最高回报有界，但满足另外两个；f^2 不满足弱比例稳定，但满足另外两个；f^3 不满足最高回报自一致，但满足另外两个。因此，定理 3.1 中的三个性质逻辑独立，部分联盟信息缺失的比例分离解由这三个性质唯一确定，缺少任何一个都无法唯一确定。

定理 3.2 在博弈空间 H_ω^N 中，部分联盟信息缺失的比例分离解为满足最高回报有界，弱比例稳定性和最高回报补足一致的唯一最大解。相关证明与定理 3.1 相似，只有使用一致性时稍有差别，所以证明部分省略。

例 3.3 任意的 $\forall(N,v,\omega)\in H_\omega^N$，核心 $C(N,v)$ 不满足最高回报有界，但满足另外两个；例 3.2 中的 f^2 不满足弱比例稳定，但满足另外两个；例 3.2 中的 f^3 不满足最高回报自一致，但满足另外两个。因此，定理 3.2 中的三个性质满足逻辑独立性。

定理 3.3 在博弈空间 H_ω^N 中，部分联盟信息缺失下的比例分离解为满足弱比例稳定性和最高回报边际一致的唯一最大解。

证 由引理 3.3 和 3.4 可知，部分联盟信息缺失下的比例分离解是满足弱比例稳定性和最高回报边际一致。下证唯一性。

设 F 为一个在 H_{ω}^{N} 上满足弱比例稳定和最高回报边际一致的解。接下来用归纳法证明对于 $\forall(N,v,\omega)\in H_{\omega}^{N}$，$F(N,v,\omega)\subseteq IMPSO(N,v,\omega)$。初始步和假设步与定理 3.1 的证明过程相同，可直接考虑迭代步。

考虑 $|N|=k+1$ 人的博弈 $(N,v,\omega)\in H_{\omega}^{N}$，如果 $F(N,v,\omega)=\varnothing$，则 $F(N,v,\omega)\subseteq IMPSO(N,v,\omega)$。如果 $F(N,v,\omega)=\varnothing$，则设 $f\in F(N,v,\omega)$。有下式成立

$$
\begin{aligned}
v(N) &\geq \sum_{i\in N} f_i=\sum_{\ell=1}^{m}\sum_{i\in P_{\ell}^{f,\omega}\setminus P_{\ell-1}^{f,\omega}} f_i=\sum_{\ell=1}^{m}\sum_{i\in P_{\ell}^{f,\omega}\setminus P_{\ell-1}^{f,\omega}}\omega_i p_{\ell}^{f,\omega}\\
&\geq \sum_{\ell=1}^{m}\sum_{i\in P_{\ell}^{f,\omega}\setminus P_{\ell-1}^{f,\omega}}\omega_i\max_{S\in K_i(v)}\frac{v\left(S\cup P_{\ell-1}^{f,\omega}\right)-v\left(P_{\ell-1}^{f,\omega}\right)}{\sum_{j\in S}\omega_j}\\
&\geq \sum_{\ell=1}^{m}\sum_{i\in P_{\ell}^{f,\omega}\setminus P_{\ell-1}^{f,\omega}}\omega_i\frac{v\left(P_{\ell}^{f,\omega}\right)-v\left(P_{\ell-1}^{f,\omega}\right)}{\sum_{j\in P_{\ell}^{f,\omega}\setminus P_{\ell-1}^{f,\omega}}\omega_j}\\
&=\sum_{\ell=1}^{m}\left(v\left(P_{\ell}^{f,\omega}\right)-v\left(P_{\ell-1}^{f,\omega}\right)\right)=v\left(P_{m}^{f,\omega}\right)-v\left(P_{0}^{f,\omega}\right)=v(N)-v(\varnothing)=v(N),
\end{aligned}
$$

其中，第一个不等式由核心的概念得到，在第一个等式中 ℓ 表示大联盟 N 的适配划分由 m 个小联盟构成，第二个不等式可以根据弱比例稳定性求出(同定理 3.1 中的证明)，而第三个不等式可以根据最高回报边际一致性得出。从以上式子可知，$\sum_{i\in N} f_i=v(N)$，$p_1^{f,\omega}=\max_{S\in K_i(v)}\frac{v(S)}{\sum_{j\in S}\omega_j}$，$f_i=p_1^{f,\omega}\omega_i=\frac{v\left(P_1^{f,\omega}\right)}{\sum_{j\in P_1^{f,\omega}}\omega_j}\omega_i$，$\forall i\in P_1^{f,\omega}$。

如果 $P_1^{f,\omega}=N$，那么我们可以知道 $F(N,v,\omega)\subseteq IMPSO(N,v,\omega)$。如果 $P_1^{f,\omega}\neq N$，那么由最高回报边际一致可知 $f_{N\setminus P_1^{f,\omega}}\in F\left(N\setminus P_1^{f,\omega},v_{mar}^{f},\omega_{N\setminus P_1^{f,\omega}}\right)$。

再由 $\left|N\setminus P_1^{f,\omega}\right|\leq k$ 以及假设步，可得 $F\left(N\setminus P_1^{f,\omega},v_{mar}^{f},\omega_{N\setminus P_1^{f,\omega}}\right)\in IMPSO\left(N\setminus P_1^{f,\omega},v_{sel}^{f},\omega_{N\setminus P_1^{f,\omega}}\right)$，有 $F(N,v,\omega)\in IMPSO(N,v,\omega)$ 成立。

例 3.4 $\forall(N,v,\omega)\in H_{\omega}^{N}$，核心解 $C(N,v)$ 不满足最高回报边际一致性，但满足弱比例稳定性；例 3.2 中的 f^2 不满足弱比例稳定性，但满足最高回报边际一致性。因此，定理 3.3 中的 2 个性质满足逻辑独立性。

4. 应用：一带一路某地区修建高铁成本分摊案例分析

用 N 来表示一带一路某区域经济独立体的集合，$(i,j)\in N\times N, i\neq j$，由 i 到 j 的平均年客流量用 A_{ij} 来表示，若 i,j 两国因政策或其他原因互不往来，则 $A_{ij}=0$，$A_{ji}=0$。用 B_{ij} 来表示由 i 到 j 的年平均客流量占 i 在联盟国间平均出行人数的比重(简称客流率)，$B_{ij}=\frac{A_{ij}}{\sum_{j\in N\setminus i}A_{ij}}$。对任意的 $S\in 2^N$，有

$$v(S)=\sum_{i\in S}\sum_{j\in S\setminus i}B_{ij}$$

假设一带一路某区域 4 个国家，$N=\{1,2,3,4\}$，国家 1 与国家 3 之间由于某些原因，两国互不开放公民通行，因此 $A_{13}=0$，$A_{31}=0$，国家 1 有公民 7.5 千万人，国家 2 有公民 8 千万人，国家 3 有公民 1.5

DOI: 10.12677/orf.2024.143268

千万人，国家 4 有公民 2 千万人。近五年此四国相互间平均年客流量和客流率如表 1 所示。

Table 1. Passenger flow trends in four countries in the past five years
表 1. 近 5 年 4 国客流趋势

地区	指标	1	2	3	4
1	A_{1j}	-	8	0	2
	B_{1j}	-	80%	0	20%
2	A_{2j}	1	-	4	5
	B_{2j}	10%	-	40%	50%
3	A_{3j}	0	0.4	-	0.8
	B_{3j}	0	33.33%	-	66.67%
4	A_{4j}	0.2	0.8	1	-
	B_{4j}	10%	40%	50%	-

据此给出关于 B_{ij} 的矩阵：

$$B_{ij}=\begin{pmatrix} 0 & 0.800 & 0 & 0.200 \\ 0.100 & 0 & 0.400 & 0.500 \\ 0 & 0.333 & 0 & 0.667 \\ 0.100 & 0.400 & 0.500 & 0 \end{pmatrix}$$

则一带一路区域建设成本分摊博弈为 (N,v)，其中特征函数 v 的设定为如下表 2 所示：

Table 2. Characteristic function (three-digit decimal)
表 2. 特征函数(保留三位小数)

$S\in K_i(v)$	$\{1,2\}$	$\{1,4\}$	$\{2,3\}$	$\{2,4\}$	$\{3,4\}$
$V(S)$	0.900	0.300	0.733	0.900	1.167
$S\in K_i(v)$	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,4\}$	$\{1,3,4\}$	$\{2,3,4\}$	N
$V(S)$	1.633	2.100	1.467	2.800	4.000

另外，我们以 1，2，3，4 这四国公民数量来衡量修建高铁对其重要程度，因此权重向量 ω 为 $\omega=(7.5,8,1.5,2)$。由此可得一带一路成本分摊赋权博弈 $(N,v,\omega)\in H_{\omega}^{N}$。由定义可得该问题的比例分离解为

$$\max_{S\in K_i(v)}\frac{v(S)}{\sum_{j\in S}\omega_j}=\frac{v(\{3,4\})}{\omega_3+\omega_4}\approx 0.334\Rightarrow T_1=\{3,4\},(x_3,x_4)=(0.5,0.668)$$

$$\max_{S\in K_i(v)\setminus\{3,4\}}\frac{v(S\cup\{3,4\})-v(\{3,4\})}{\sum_{j\in S}\omega_j}=\frac{v(\{2,3,4\})-v(\{3,4\})}{\omega_2}\approx 0.204\Rightarrow T_2=\{2\},x_2=(1.632)$$

$$\max_{S\in K_i(v)\setminus\{2,3,4\}}\frac{v(S\cup\{2,3,4\})-v(\{2,3,4\})}{\sum_{j\in S}\omega_j}=\frac{v(N)-v(\{2,3,4\})}{\omega_1}\approx 0.16\Rightarrow T_3=\{1\},x_1=(1.2)$$

因此，$IMPSO(N,v,\omega)=\{(1.2,1.632,0.5,0.668)\}$，其对应的适配划分为$\{\{3,4\},\{2\},\{1\}\}$。此外，$IMPSO(N,v,\omega)\subseteq C(N,v)$，可知得到的成本分摊向量是稳定的，即国家 1，国家 2，国家 3 和国家 4 都愿意接受这样的成本分摊评定。

对 *IMPSO* 的成本分摊向量归一化后可得(0.3, 0.408, 0.125, 0.167)，该结果表明：国家 1，国家 2，国家 3 和国家 4 对此地区修建高铁成本承担的百分数分别为 30%，40.8%，12.5%以及 16.7%。由成本分摊百分数可知，在该地区修建高铁时国家 2 应承担较多的部分，这是由于其国家人数最多的原因；国家 1 对该地区修建高铁的成本分摊起到了支撑性的作用．由适配划分$\{\{3,4\},\{2\},\{1\}\}$可知，基于公民数量权重下的国家 3 和国家 4 分摊率最高，为 0.334；其次是国家 2，为 0.204；国家 1 最低，为 0.16。这样的结果较为合理，国家 2 作为公民人数和出游人最多的国家承担最多，由于高铁修建成本基本在站台，铁路线，列车，国家 2 的成本并没有按人数比例分那么多，因此，国家 2 的比例分离解的成本分摊百分数小于按比例分配的成本分摊百分数，对其起到了安抚作用。国家 1 同理。国家 3 和国家 4 的承担率一样，两者的比例分离解的成本分摊百分数大于按比例分配的成本分摊百分数，但这样的成本分摊百分数远小于两国独立修建高铁，以较少的成本参与了四国间的高铁修建。

5. 结论

本文在部分联盟信息缺失的基础上将联盟形成过程和比例分配结合起来，提出部分联盟信息缺失下的比例分离解概念。以往的研究均聚焦于合作博弈分配规则的设计，也有一些学者研究了部分联盟信息缺失的合作博弈，但对于部分联盟信息缺失的合作博弈比例分离解研究还是很少见。而对于“一带一路”区域经济合作成本分摊问题，许多学者是基于 Shapley 值法来进行分配，基于部分联盟信息缺失的合作博弈比例分离解还比较少见，因此将部分联盟信息缺失的合作博弈比例分离解应用于“一带一路”区域经济合作成本分摊问题具有现实意义。本文将部分联盟信息缺失的合作博弈比例分离解应用到一带一路某地区修建高铁成本分摊中，得出人数最多的国家承担最多的出资比例，但基于公民数量权重下分摊率较低，对其起到了安抚作用；人数第二多的国家承担第二多的出资比例，但基于公民数量权重下分摊率最低，这就保证了其更可能参与合作，在其中起到支撑性的作用；而人数较少的两个国家也以较少的成本参与合作修建高铁。通过该案例得出了部分联盟信息缺失的合作博弈比例分离解在区域建设成本分摊问题中应用的合理性。然而本文仅限于理论层面的研究，在应用方面对于除人口之外的其他因素，在后续研究中，我们将考虑政治、经济、社会和技术(PEST)等因素影响下的“一带一路”区域经济合作问题。

参考文献

[1] Shapley, L.S. (1953) A Value for n-Person Games. In: Roth, A.E., Ed., *The Shapley Value Essays in Honor of Lloyd S. Shapley*, Cambridge University Press.

[2] Routledge, R.R. (2016) Information, Egalitarianism and the Value. *Operations Research Letters*, **44**, 775-778. https://doi.org/10.1016/j.orl.2016.09.010

[3] Béal, S., Casajus, A., Huettner, F., *et al.* (2016) Characterizations of Weighted and Equal Division Values. *Theory and Decision*, **80**, 649-667. https://doi.org/10.1007/s11238-015-9519-7

[4] van den Brink, R., Herings, P.J.-J., van der Laan, G., *et al.* (2015) The Average Tree Permission Value for Games with a Permission Tree. *Economic Theory*, **58**, 99-123. https://doi.org/10.1007/s00199-013-0796-5

[5] Shan, E., Zhang, G. and Shan, X. (2018) The Degree Value for Games with Communication Structure. *International Journal of Game Theory*, **47**, 857-871. https://doi.org/10.1007/s00182-018-0631-0

[6] Dietzenbacher, B., Borm, P. and Hendrickx, R. (2017) The Procedural Egalitarian Solution. *Games and Economic Behavior*, **106**, 179-187. https://doi.org/10.1016/j.geb.2017.10.001

[7] Sun, P., Hou, D., Sun, H., *et al.* (2017) Process and Optimization Implementation of the α-ENSC Value. *Mathematical Methods of Operations Research*, **86**, 293-308. https://doi.org/10.1007/s00186-017-0595-z

[8] Dutta, B. and Ray, D. (1989) A Concept of Egalitarianism under Participation Constraints. *Econometrica*, **57**, 615-635. https://doi.org/10.2307/1911055

[9] Branzei, R., Dimitrov, D. and Tijs, S.H. (2006) The Equal Split-Off Set for Cooperative Games. Banach Center Publications, Vol. 71, 39-46.

[10] Dietzenbacher, B. and Yanovskaya, E. (2021) Consistency of the Equal Split-Off Set. *International Journal of Game Theory*, **50**, 1-22. https://doi.org/10.1007/s00182-020-00713-5

[11] 张广，何楠. 合作博弈的比例分离解及其在区域经济一体化中的应用[J]. 系统科学与数学, 2022, 42(4): 791-801.

[12] 杨太华，李志翔，秦静. "一带一路"电力投资项目安全成本分担的博弈模型分析[J]. 华东理工大学学报(社会科学版), 2019, 34(3): 43-50.

[13] 赵锋，马奔，陈增贤. 绿色"一带一路"背景下中国-东盟环保产业合作博弈分析[J]. 石河子大学学报(哲学社会科学版), 2020, 34(1): 1-6.

[14] 王亦虹，田平野，邓斌超，等. 基于修正区间模糊 Shapley 值的"一带一路" PPP 项目利益分配模型[J]. 运筹与管理, 2021, 30(5): 168-175.

[15] 董振. 合作博弈下中欧班列的区域利益协调机制研究[D]: [硕士学位论文]. 重庆: 重庆邮电大学, 2022.