

# 非线性Goss-Pitaevskii方程的行波解的存在性

杨滨宾

上海理工大学理学院, 上海

收稿日期: 2024年4月7日; 录用日期: 2024年6月19日; 发布日期: 2024年6月27日

## 摘 要

本文主要讨论一个非线性Gross-Pitaevskii方程在一维情形下的行波解, 我们建立了与最小化问题相关的欧拉-拉格朗日方程, 从而证明行波解的存在性, 更准确地说, 建立了由动量参数化的解族的存在性。

## 关键词

行波解, 非局部GP方程, 非线性

# Existence of Traveling Waves Solutions for the Nonlinear Goss-Pitaevskii Equations

Binbin Yang

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Apr. 7<sup>th</sup>, 2024; accepted: Jun. 19<sup>th</sup>, 2024; published: Jun. 27<sup>th</sup>, 2024

## Abstract

This article mainly discusses the traveling wave solution of a nonlinear Gross-Pitaevskii equation in one-dimensional case. We establish the Euler-Lagrange equation related to the minimization problem, which is crucial for proving the existence of traveling wave solutions. More precisely, the existence of a family of solutions parameterized by momentum is established.

## Keywords

Traveling Waves Solutions, Nonlocal GP Equation, Nonlinear



## 1. 问题的背景

本文我们考虑非局部 Gross-Pitaevskii [1] [2] 方程

$$icu' + u'' - u(W * (1 - |u|^2)) = 0, \quad u(x, t) \in \mathbb{C}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

这里的  $*$  表示  $\mathbb{R}$  内的卷积, 且  $W$  是实值偶函数, 我们讨论其是否具有限能量行波解, 注意到当满足无穷远处消失的边界条件时 [3] [4], 这类方程已经得到了广泛的研究, 此外凝聚态中的远处偶相互作用最近得到了广泛的关注 [5] [6], 然而这些作品中使用的技术不能适应于包括满足

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |u(x, t)| = 1. \quad (1.2)$$

本文的目的就是讨论在 (1.1) 满足 (1.2) 的情况下, 解的存在性. 根据 ([7] [8]) 的结果, 我们得到了  $W$  的补充条件, 从而得到其行波解在一定速度内必然是恒定的, 本文将对其解的性质以及速度展开讨论.

特别地, 当  $W = \delta_0$  时, 对 (1.1) 的研究可以推广至其他类型的局部非线性, 如 [9] 所示, 作者使用的方法依赖于对二阶牛顿型 ODE 的分析, 从而可以调用柯西 - 李普希茨定理并推导出一些显式公式.

为了给方程 (1.1) 的行波解一个清晰的定义, 我们先介绍下面两个空间

首先是能量空间:

$$\mathcal{E}(\mathbb{R}) := \left\{ v \in H_{loc}^1(\mathbb{R}) : 1 - |v|^2 \in L^2(\mathbb{R}), v' \in L^2(\mathbb{R}) \right\},$$

其次是不消失的能量空间:

$$n\mathcal{E}(\mathbb{R}) := \left\{ v \in \mathcal{E}(\mathbb{R}) : \inf_{\mathbb{R}} |v| > 0 \right\}.$$

由于能量和动量泛函在向量空间上没有定义, 微分的概念也不是平凡的, 所以就我们的目的而言, 我们只考虑具有紧集的光滑函数的方向导数, 更准确的说, 我们定义对于  $u \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ , 则

$$dE(u)[h] := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{E(u+th) - E(u)}{t} \quad \text{和} \quad dP(u)[h] := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(u+th) - P(u)}{t},$$

其中所有的  $h \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ , 对于  $dP(u)$ , 我们还假设  $u \in n\mathcal{E}(\mathbb{R})$  使得  $P(u+th)$  对于  $t$  足够小时是有定义的.

下面我们提出对  $W$  一些假设

$H_1$ :  $W$  是一个实值偶函数, 满足  $\text{essinf } \hat{W} \geq -\sigma$ , 且在原点处连续

$$\hat{W}(0) = -1.$$

$H_2$ : 存在  $\sigma \in (0, 1]$ ,  $\kappa \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$  使得对于  $\xi \in \mathbb{R}$ , 几乎处处有

$$\hat{W} \leq -\sigma + \kappa \xi^2.$$

## 2. 主要引理及其证明

**引理 2.1:** 假设  $W$  满足  $H_1$ , 则对于所有的  $h \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ , 我们有

$$dE(u)[h] = \int_{\mathbb{R}} \langle u', h' \rangle - \int_{\mathbb{R}} W * (1 - |u|^2) \langle u, h \rangle, \text{ 如果 } u \in \mathcal{E}(\mathbb{R}), \quad (2.1)$$

$$dP(u)[h] = - \int_{\mathbb{R}} \langle iu', h \rangle, \text{ 如果 } u \in n\mathcal{E}(\mathbb{R}). \quad (2.2)$$

其中  $\langle z_1, z_2 \rangle = \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)$ ,  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  [6] [9] [10]。特别地, 对于所有的  $c \in \mathbb{R}$ , 我们有  $dE(u) = cdP(u)$  成立当且仅当  $u$  满足(1.1)。

根据椭圆正则性原理, 我们知如果  $u$  是(1.1)的解, 那么  $u$  是光滑的, 更准确的说, 在高维空间的结论[11]在本文一维的情形中同样使用。

**引理 2.2:** ([11]) 令  $u \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$  是(1.1)的解, 且

$$W \in \{S': \|W * f\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^p}, \forall f \in L^p(\mathbb{R})\},$$

则  $u$  是有界的且属于  $C^\infty(\mathbb{R})$ 。除此以外, 令  $\eta := 1 - |u|^2$  和  $\nabla u$  都属于  $W^{k,p}(\mathbb{R})$ , 其中  $k \in \mathbb{N}$ ,  $p \in [2, \infty)$ 。

**引理 2.1 的证明:** 由于有  $\int_{\mathbb{R}} (W * f)g = \int_{\mathbb{R}} (W * g)f$ , 其中  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ , 所以(2.1)中的微分是  $dE$  定义的直接结果。为了证明(2.2), 我们固定  $u \in n\mathcal{E}(\mathbb{R})$ , 取  $h \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ , 则

$$\begin{aligned} dP(u)[h] &= \frac{d}{dt} P(u + th) \Big|_{t=0} \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \langle ih', u \rangle \left(1 - \frac{1}{|u|^2}\right) - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \langle iu', h \rangle \left(1 - \frac{1}{|u|^2}\right) - \int_{\mathbb{R}} \langle iu', u \rangle \frac{\langle u, h \rangle}{|u|^4} \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \langle iu', h \rangle \left(1 - \frac{1}{|u|^2}\right) + \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle ih, u \rangle \langle u', u \rangle}{|u|^4} - \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle iu', u \rangle \langle u, h \rangle}{|u|^4}. \end{aligned}$$

又由于

$$-\langle ih, u \rangle \langle u, u' \rangle + \langle iu', u \rangle \langle u, h \rangle = \langle iu', h \rangle |u|^2,$$

所以我们得到了(2.2)。这个引理的最后一个论断来自于这样一个事实: 如果对于一些  $v \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ , 我们有  $\int_{\mathbb{R}} \langle v, h \rangle = 0$ , 其中  $h \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ , 那么  $v \equiv 0$ 。

### 3. 主要结论及其证明

对于  $q > 0$ , 我们考虑极小化曲线

$$E_{\min}(q) := \inf \{E(u) : u \in n\mathcal{E}(\mathbb{R}), P(u) = q\}.$$

此外, 由([12], 定理 2), 我们知该曲线是非减曲线。我们定义

$$q^* = \sup \left\{ q > 0 : \forall u \in \mathcal{E}(\mathbb{R}), E(u) \leq E_{\min}(q) \Rightarrow \inf_{\mathbb{R}} |u| > 0 \right\},$$

基于[7]和[11]的结果, 我们可知与  $E_{\min}(q)$  相关的极小值是能得到的, 并且相应的 Euler-Lagrange 方程正是(1.1), 其中  $c$  表示为 Lagrange 乘子。下面我们对  $c$  的范围展开讨论。

**定理 3.1:** 假设  $E_{\min}$  在  $\mathbb{R}^+$  上是凹的且存在  $u \in n\mathcal{E}(\mathbb{R})$  满足  $E(u) = E_{\min}(q)$ ,  $P(u) = q$  且  $q > 0$ , 则存在  $c_q$  满足

$$E_{\min}^+(q) \leq c_q \leq E_{\min}^-(q), \quad (3.1)$$

特别地,  $u$  是(1.1)的解且  $c = c_q$ 。

**证明:** 取  $u \in n\mathcal{E}(\mathbb{R})$  使得  $P(u) = q$  和  $E(u) = E_{\min}(q)$ 。因为  $q > 0$ , 所以  $u$  不是一个常数函数。令

$h \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ , 根据  $E_{\min}$  的定义, 我们得到对于  $t > 0$

$$\frac{E(u+th) - E(u)}{t} \geq \frac{E_{\min}(P(u+th)) - E_{\min}(q)}{t}$$

如果  $dP(u)[h] > 0$ , 则  $P(u+th) \geq P(u) = q$ ,  $t > 0$  足够小, 那么当  $t \rightarrow 0^+$ , 我们得到

$$dE(u)[h] \geq E_{\min}^+(q) dP(u)[h].$$

类似地, 当  $dP(u)[h] < 0$ , 我们得到

$$dE(u)[h] \geq E_{\min}^-(q) dP(u)[h].$$

用  $-h$  代替  $h$ , 我们得到下列不等式

$$E_{\min}^+(q) dP(u)[h] \leq dE(u)[h] \leq E_{\min}^-(q) dP(u)[h], \text{ 如果 } dP(u)[h] > 0. \quad (3.2)$$

和

$$E_{\min}^-(q) dP(u)[h] \leq dE(u)[h] \leq E_{\min}^+(q) dP(u)[h], \text{ 如果 } dP(u)[h] < 0. \quad (3.3)$$

由于泛函  $dP(u), dE(u): C_c^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  是线性的, 因此为了建立 Euler-Lagrange 方程, 只需证明下面一点

$$\text{Ker } dP(u) \subset \text{Ker } dE(u) \quad (3.4)$$

事实上, 根据([13], 引理 3.2), 我们推导出存在一些  $c_q \in \mathbb{R}$  使得

$$dE(u) = c_q dP(u) \quad (3.5)$$

进一步地, 由引理 2.1, 我们得到  $u$  是(1.1)的解且  $c = c_q$ 。

最后我们证明(3.4), 令  $\phi \in \text{Ker } dP(u)$ , 由于  $u$  不是常数函数, 则存在泛函  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  使得  $dP(u)[\psi] \neq 0$ 。因此对于所有  $n \in \mathbb{N}$ , 我们有

$$dP(u)[\psi + n\phi] = dP(u)[\psi] \neq 0.$$

由(3.2)和(3.3), 我们推导出  $dE(u)[\psi + n\phi] = dE(u)[\psi] + ndE(u)[\phi]$  是有界的。所以  $dE(u)[\phi] = 0$  即  $\phi \in \text{Ker } dE(u)$ , 这样我们得到了(3.4)。

现在还需证明(3.1)。令  $h_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  使得  $dP(u)[h_0] = 1$ 。根据(3.5), 我们得到  $dE(u)[h_0] = c_q$ , 再结合(3.2), 我们得到

$$E_{\min}^+(q) \leq c_q \leq E_{\min}^-(q)$$

证毕。

**引理 3.2:** ([7]) 假设  $E_{\min}$  在  $\mathbb{R}^+$  上是凹的, 则  $E_{\min}(q) < \sqrt{2}q$ ,  $q > 0$ 。  $E_{\min}$  在  $\mathbb{R}^+$  上是严格次可加, 且  $E_{\min}$  的左导  $E_{\min}^-$  和右导  $E_{\min}^+$  满足

$$0 \leq E_{\min}^+(q) \leq E_{\min}^-(q) < \sqrt{2}$$

此外,  $E_{\min}^+(q) \rightarrow E_{\min}^+(0) = \sqrt{2}$ , 当  $q \rightarrow 0^+$ 。

**定理 3.3:** 假设  $W$  满足  $H_1$  和  $H_2$  且  $E_{\min}$  在  $\mathbb{R}^+$  上是凹的, 则存在(1.1)的解  $u \in n\mathcal{E}(\mathbb{R})$  满足  $E(u) = E_{\min}(q)$ ,  $P(u) = q$  且  $q \in (0, q^*)$ 。

另外对于解  $u$ , 有  $c_q \in (0, \sqrt{2})$  满足

$$E_{\min}^+(q) \leq c_q \leq E_{\min}^-(q),$$

除此以外, 当  $q \rightarrow 0^+$  时有  $c_q \rightarrow \sqrt{2}$ 。

**证明:** 根据(3.1)和引理 3.2 我们能够证明解的存在性且  $c_q \in [0, \sqrt{2})$ 。下面我们说明  $c_q > 0$ 。我们通过反证法, 假设存在  $p \in (0, q^*)$  使得  $c_p = 0$ 。因此根据(3.1), 我们得到  $E_{\min}^+(p) = 0$ 。因为  $E_{\min}$  是凹的, 我们有对于所有的  $r < s$ ,

$$E_{\min}^-(r) \geq E_{\min}^+(r) \geq E_{\min}^-(s) \geq E_{\min}^+(s) \geq 0$$

这说明在  $[p, \infty)$  上  $E_{\min}^- = E_{\min}^+ = 0$ , 所以  $E_{\min}$  在  $[p, \infty)$  上是常数, 这与  $E_{\min}$  在  $[p, q^*)$  上严格次可加。这样我们就完成了定理 3.3 的证明。证毕。

## 4. 总结与展望

在与 Schrödinger 方程相关的经典极小化问题中, 在无穷远处消失的条件下, 质量给出了约束, 而在我们的讨论中, 动量是我们需要作为约束条件证明暗孤子存在的一个关键。我们由定理 3.1, 得到当  $q \in (0, q^*)$  时,  $E_{\min}$  的极小值可以达到, 换句话说, 存在  $u \in n\mathcal{E}(\mathbb{R})$  满足  $E(u) = E_{\min}(q)$ ,  $P(u) = q$ 。再通过定理 3.3 证明得到(1.1)存在非平凡解。此外, 还得到其行波解的速度范围。

与[7]相比, 我们的研究对象发生了改变, 针对不同的非线性项, 本文中提出了相应的解决方法。

本文的另一个关键在于利用  $E_{\min}$  泛函的凹性, 若用隐函数定理来建立欧拉-拉格朗日方程也是可行的, 且此方法不需要讨论  $E_{\min}$  泛函的凹凸性, 尽管后一种的论证更具有一般性, 但我们用凹性来证明, 更简单。

还有一个有趣的问题是此时(1.1)的解是否具有稳定性和整体唯一性, 我们认为该问题的行波解可以通过改进本文中对  $W$  作出的条件以及引入流的平移等相关概念来证明解的分支是轨道稳定的。后续我们将研究这一模型行波解的存在性及其性质。

## 参考文献

- [1] Gross, E.P. (1963) Hydrodynamics of a Superfluid Condensate. *Journal of Mathematical Physics*, **4**, 195-207. <https://doi.org/10.1063/1.1703944>
- [2] Pitaevskii, L. (1961) Vortex Lines in an Imperfect Bose Gas. *Soviet Physics JETP*, **13**, 451-454.
- [3] Cazenave, T. (2003) Semilinear Schrödinger Equations. Courant Lecture Notes. <https://doi.org/10.1090/cln/010>
- [4] Moroz, V. and Van Schaftingen, J. (2013) Groundstates of Nonlinear Choquard Equations: Existence, Qualitative Properties and Decay Asymptotics. *Journal of Functional Analysis*, **265**, 153-184. <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2013.04.007>
- [5] Antonelli, P. and Sparber, C. (2011) Existence of Solitary Waves in Dipolar Quantum Gases. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **240**, 426-431. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2010.10.004>
- [6] Bellazzini, J. and Jeanjean, L. (2016) On Dipolar Quantum Gases in the Unstable Regime. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **48**, 2028-2058. <https://doi.org/10.1137/15m1015959>
- [7] de Laire, A. and Mennuni, P. (2020) Traveling Waves for Some Nonlocal 1D Gross-Pitaevskii Equations with Nonzero Conditions at Infinity. *Discrete & Continuous Dynamical Systems—A*, **40**, 635-682. <https://doi.org/10.3934/dcds.2020026>
- [8] Laire, A. and López-Martínez, S. (2022) Existence and Decay of Traveling Waves for the Nonlocal Gross-Pitaevskii Equation. *Communications in Partial Differential Equations*, **47**, 1732-1794. <https://doi.org/10.1080/03605302.2022.2070853>
- [9] Chiron, D. (2012) Travelling Waves for the Nonlinear Schrödinger Equation with General Nonlinearity in Dimension One. *Nonlinearity*, **25**, 813-850. <https://doi.org/10.1088/0951-7715/25/3/813>
- [10] de Laire, A. (2010) Global Well-Posedness for a Nonlocal Gross-Pitaevskii Equation with Non-Zero Condition at Infinity. *Communications in Partial Differential Equations*, **35**, 2021-2058. <https://doi.org/10.1080/03605302.2010.497200>
- [11] de Laire, A. (2012) Nonexistence of Traveling Waves for a Nonlocal Gross-Pitaevskii Equation. *Indiana University Mathematics Journal*, **61**, 1451-1484. <https://doi.org/10.1512/iumj.2012.61.4707>

- [12] Pecher, H. (2012) Global Solutions for 3D Nonlocal Gross-Pitaevskii Equations with Rough Data. *Electronic Journal Of Differential Equations*, **34**, 170.
- [13] Brezis, H. (2011) Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Springer.  
<https://doi.org/10.1007/978-0-387-70914-7>