Operations Research and Fuzziology 运筹与模糊学, 2024, 14(5), 205-215
Published Online October 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/orf
https://doi.org/10.12677/orf.2024.145463

Hans汉斯

基于不确定理论的亚式障碍期权定价研究

周启航

南京林业大学经济管理学院，江苏 南京

收稿日期：2024年7月26日；录用日期：2024年9月19日；发布日期：2024年10月10日

摘　要

亚式障碍期权是一种路径依赖型期权，其收益取决于股票价格在特定的到期时间能否到达预设的障碍水平。不同于传统的随机理论，本文将在不确定理论的框架内研究亚式障碍期权的定价问题。首先，通过假设标的股票价格服从不确定指数O-U过程，且利率服从不确定CIR过程，我们构建了一种新的不确定股票模型。然后，运用不确定微积分和不确定微分方程的相关知识，推导出新模型下亚式障碍期权的定价公式及相应的数值解。最后，运用矩估计法对不确定股票模型中的未知参数进行估值，并通过数值案例对得到的参数估计值进行了合理性验证。研究结果表明，带有浮动利率的不确定指数O-U股价模型更符合金融市场的实际情况，能够合理地对亚式障碍期权定价。

关键词

不确定理论，亚式障碍期权，指数O-U过程，参数估计

Research on Pricing Asian-Barrier Options Based on Uncertainty Theory

Qihang Zhou

College of Economics and Management, Nanjing Forestry University, Nanjing Jiangsu

Received: Jul. 26th, 2024; accepted: Sep. 19th, 2024; published: Oct. 10th, 2024

Abstract

Asian-barrier option is a path-dependent option, whose payment depends on whether the stock price can reach the pre-set barrier level at a specific maturity time. This paper will investigate the pricing issue of Asian-barrier options within the framework of uncertainty theory, which is distinct from traditional stochastic theory. Firstly, assuming that the underlying stock prices follow an uncertain exponential O-U process and the interest rates follow an uncertain CIR process, we have constructed a new uncertain stock model. Then, the pricing formula and the corresponding numerical

文章引用: 周启航. 基于不确定理论的亚式障碍期权定价研究[J]. 运筹与模糊学, 2024, 14(5): 205-215.
DOI: 10.12677/orf.2024.145463

solution of Asian-barrier options are derived, based on the knowledge of uncertain calculus and uncertain differential equation. Finally, we apply the method of moments to estimate the unknown parameters in the uncertain stock model and validate the reasonableness of the estimated parameters through numerical examples. The research results indicate that the uncertainty exponential O-U stock price model with floating interest rates is more in line with the actual situation of the financial market and can reasonably price Asian barrier options.

Keywords

Uncertainty Theory, Asian-Barrier Option, Exponential O-U Process, Parameter Estimation

1. 引言

亚式障碍期权在障碍期权的基础上，增加了价格均值特征，能够有效降低股票价格波动。同时具有提供标的股票价格上下限的特点，使投资者只需考虑范围内的股票价格，增加投资便利性，备受投资者青睐。因此，研究亚式障碍期权的定价问题具有理论和实践意义。

1973 年，Black 和 Scholes [1]在标的资产价格服从对数正态分布情形下给出了著名的 Black-Scholes 期权定价公式。但是该模型是建立在概率论的基础上，概率论的应用前提是我们获知的概率分布必须充分接近真实的频率，然而大量的实证研究表明现实世界中的频率远不稳定。这一事实使得在实践中获得的分布函数通常偏离实际频率。随着行为金融学的兴起，越来越多的研究表明人的主观信度对实际决策有着重要的影响，为了更好处理人的主观信度，Liu [2]在 2007 年创立不确定理论，并于 2015 年做了进一步的完善[3]，随后广泛应用到金融领域。

目前有关亚式障碍期权的定价研究[4] [5]其利率大多假定为常数，然而在实际金融市场中利率是随着时间不断变化，而非恒定的。基于上述分析，本文假定利率服从不确定 CIR 过程，股票价格服从指数 O-U 过程，建立了一种新的不确定股票模型。然后，运用不确定微分方程的相关定理，分别推导出向上敲入亚式障碍期权定价公式，并给出了相应的数值算法。最后，采用矩估计法对不确定股票模型中的未知参数进行估值，并通过数值案例进行了合理性验证。

2. 不确定理论

2.1. 不确定微分方程

定义 1 [6] 一个不确定过程 C_t 被称作一个典范 Liu 过程，如果满足以下条件：

(1) $C_0 = 0$ 且几乎所有的样本路径是 Lipschitz 连续的；

(2) C_t 具有平稳独立增量；

(3) 对于时间 t，增量 $C_{s+t} - C_s$ 是一个期望为 0 方差为 t^2 的不确定变量，其不确定分布

$$\Phi(x) = \left(1 + \exp\left(-\frac{\pi x}{\sqrt{3}t}\right)\right) \qquad x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

定义 2 [7] 设 C_t 是一个典范 Liu 过程，f 和 g 是给定的函数，那么称

$$\mathrm{d}X_t = \mathrm{d}(t, X_t)\mathrm{d}t + g(t, X_t)\mathrm{d}C_t \tag{2}$$

是一个不确定微分方程。

定义 3 [8] 设$0<\alpha<1$，如果不确定微分方程(6)满足

$$\mathrm{d}X_t^\alpha = f\left(t, X_t^\alpha\right)\mathrm{d}t + \lg\left(t, X_t^\alpha\right)\Phi^{-1}\left(\alpha\right)\mathrm{d}t \tag{3}$$

则称X_t具有α路径，其中$\Phi^{-1}\left(\alpha\right)$是正态不确定变量的逆不确定分布，即

$$\Phi^{-1}\left(\alpha\right) = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\ln\frac{\alpha}{1-\alpha} \tag{4}$$

定义 4 [8] 设X_t和X_t^α分别是不确定微分方程(6)的解和α路径，那么有

$$M\left\{X_t \le X_t^\alpha, \forall t\right\} = \alpha \tag{5}$$

和

$$M\left\{X_t \le X_t^\alpha, \forall t\right\} = 1-\alpha \tag{6}$$

并且$\forall t$，且X_t有一个逆不确定分布

$$\Phi^{-1}\left(\alpha\right) = X_t^\alpha \tag{7}$$

定义 5 [9] 设X_t和X_t^α分别是不确定微分方程(6)的解和α路径，假设$J\left(X_t\right)$是严格递增(递减)函数，则积分

$$\int_0^s J\left(X_t\right)\mathrm{d}t \tag{8}$$

具有逆不确定分布

$$\Phi^{-1}\left(\alpha\right) = \int_0^s J\left(X_t^\alpha\right)\mathrm{d}t\left(\Phi^{-1}\left(\alpha\right) = \int_0^s J\left(X_t^{1-\alpha}\right)\mathrm{d}t\right) \tag{9}$$

2.2. 不确定股票模型

在实际金融市场中，利率是频繁波动的，有必要在浮动利率框架内讨论期权定价问题。考虑到股价和利率应该围绕某个均值水平上下波动的特征，刘兆鹏[10]提出了一种新的具有浮动利率的不确定指数 O-U 股票模型：

$$\begin{cases} \mathrm{d}r_t = \left(b - ar_t\right)\mathrm{d}t + \sigma_1 \mathrm{d}C_{1t} \\ \mathrm{d}X_t = \mu\left(1 - c\ln X_t\right)X_t\mathrm{d}t + \sigma_2 X_t \mathrm{d}C_2 \end{cases} \tag{10}$$

其中，r_t为利率，X_t为股价，$a,b,c,\mu,\sigma_1,\sigma_2$为非负实数，$C_{1t}$和$C_{2t}$为相互独立的典范 Liu 过程。

3. 敲入期权

3.1. 带有 CIR 利率的不确定指数 O-U 模型

模型(15)中的利率是 Vasicek 模型的不确定对应物，然而 Vasicek 模型会导致利率为负值。为了确保利率始终为正值，Wang [11]将利率过程假定为 CIR 模型的不确定对应物，提出一种新的浮动利率模型：

$$\mathrm{d}r_t = a\left(b - r_t\right)\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{r_t}\mathrm{d}C_t \tag{11}$$

其中，r_t为利率，a为利率的调整率，b为平均利率，σ为利率扩散率，C_t为典范 Liu 过程。

本文基于以上分析，假设股票价格服从不确定指数 O-U 过程，利率服从不确定 CIR 过程，给出一种新的不确定股票模型：

$$\begin{cases} \mathrm{d}r_t = a(b - r_t)\mathrm{d}t + \sigma_1\sqrt{r_t}\mathrm{d}C_{1t} \\ \mathrm{d}X_t = \mu(1 - c\ln X_t)X_t\mathrm{d}t + \sigma_2 X_t\mathrm{d}C_{2t} \end{cases} \tag{12}$$

其中，a 为利率的调整率，b 为平均利率，σ_1 为利率的波动率，σ_2 为股价波动率，μ 是控制股票价格变化的均值，其取值决定了股价的波动范围；c 是非负实数，当股价变化率超过一定范围时，使之均值回复；$\mu(1 - c\ln X_t)$ 是带有指数均值回归的预期收益率；C_{1t} 和 C_{2t} 是相互独立的典范 Liu 过程。

为更好描述亚式障碍期权，本文给出一个指标函数 $I_L(x)$：

$$I_L(x) = \begin{cases} 1 & x \ge L \\ 0 & x < L \end{cases} \tag{13}$$

其中，L 为给定的实数。

3.2. 向上敲入亚式看涨期权

向上敲入亚式看涨期权的股票初始价格 X_0 低于预设障碍水平 L，在到期日 T 之前，股票价格达到预设障碍水平，亚式看涨期权生效。则买入一份向上敲入亚式看涨期权的价格为

$$f_c^{ui} = E\left\{\exp\left(-\int_0^T r_t\mathrm{d}t\right)I_L\left(\sup_{0\le t\le T} x_t\right)\left(\frac{1}{T}\int_0^T X_t\mathrm{d}t - K\right)^+\right\} \tag{14}$$

定理 1 假设向上敲入亚式期权的执行价格为 K，到期时间为 T，障碍水平为 L，股票价格服从不确定股票模型(17)，则向上敲入亚式看涨期权的价格为

$$f_c^{ui} = \int_\beta^1 \exp\left(-\int_0^T r_t^{1-\alpha}\mathrm{d}t\right)\left(\frac{1}{T}\int_0^T X_t^\alpha\mathrm{d}t - K\right)^+ \mathrm{d}\alpha \tag{15}$$

其中，

$$\beta = \left(1 + \exp\left(\frac{1 - c\ln L - (1 - c\ln X_0)\exp(-\mu ct)}{1 - \exp(-\mu ct)}\frac{\mu\pi}{\sqrt{3}\sigma_2}\right)\right)^{-1} \tag{16}$$

证明：根据定义 3 可知

$$\mathrm{d}X_t^\alpha = \mu(1 - c\ln X_t^\alpha)X_t^\alpha\mathrm{d}t + \sigma_2 X_t^\alpha \ln\frac{\alpha}{1-\alpha}\mathrm{d}t$$

该不确定微分方程的解为

$$X_t^\alpha = \exp\left(\exp(-\mu ct)\ln X_0 + \left(1 - \exp(-\mu ct)\right)\left(\frac{1}{c} + \frac{\sigma_2\sqrt{3}}{\mu c\pi}\ln\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\right).$$

因此，我们得出定理 2。

定理 2 股票价格 X_t 有 α 路径

$$X_t^\alpha = \exp\left(\exp(-\mu ct)\ln X_0 + \frac{1}{c}\left(1 - \exp(-\mu ct)\right)\left(1 + \frac{\sqrt{3}\sigma_2}{\mu\pi}\ln\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\right). \tag{17}$$

定理 3 利率 r_t 的 α 路径满足以下微分方程

$$\mathrm{d}r_t^\alpha = a(b - r_t^\alpha)\mathrm{d}t + \sigma_1\sqrt{r_t^\alpha}\Phi^{-1}(\alpha)\mathrm{d}t \tag{18}$$

其中

$$\Phi^{-1}(\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{\pi}\ln\frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

首先，不确定变量

$$\exp\left(-\int_0^T r_t\mathrm{d}t\right)I_L\left(\sup_{0\le t\le T}X_t\right)\left(\frac{1}{T}\int_0^T X_t\mathrm{d}t-K\right)^+$$

的逆不确定分布为

$$\exp\left(-\int_0^T r_t^{1-\alpha}\mathrm{d}t\right)I_L\left(\sup_{0\le t\le T}X_t^\alpha\right)\left(\frac{1}{T}\int_0^T X_t^\alpha\mathrm{d}t-K\right)^+$$

其中

$$X_t^\alpha=\exp\left(\exp(-\mu ct)\ln X_0+\frac{1}{c}\left(1-\exp(-\mu ct)\right)\left(1+\frac{\sqrt{3}\sigma_2}{\mu\pi}\ln\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\right).$$

其次，对于 $\forall t\in[0,T]$，做出以下两个假设

$$X_t(\gamma)\le X_t^\alpha$$

和

$$r_t(\gamma)\ge r_t^{1-\alpha}$$

其中，$\gamma\in\Gamma$。由上述两个假设可知

$$I_L\left(\sup_{0\le t\le T}X_t(\gamma)\right)\left(\frac{1}{T}\int_0^T X_t(\gamma)\mathrm{d}t-K\right)^+\le I_L\left(\sup_{0\le t\le T}X_t^\alpha\right)\left(\frac{1}{T}\int_0^T X_t^\alpha\mathrm{d}t-K\right)^+$$

和

$$\exp\left(-\int_0^T r_t(\gamma)\mathrm{d}t\right)\le\exp\left(-\int_0^T r_t^{1-\alpha}\mathrm{d}t\right).$$

因此，可以得出

$$\begin{aligned}&\left\{\exp\left(-\int_0^T r_t\mathrm{d}t\right)I_L\left(\sup_{0\le t\le T}X_t\right)\left(\frac{1}{T}\int_0^T X_t\mathrm{d}t-K\right)^+\right.\\&\left.\le\exp\left(-\int_0^T r_t^{1-\alpha}\mathrm{d}t\right)I_L\left(\sup_{0\le t\le T}X_t^\alpha\right)\left(\frac{1}{T}\int_0^T X_t^\alpha\mathrm{d}t-K\right)^+\right\}\\&\supset\left\{r_t\ge r_t^{1-\alpha},\forall t\in[0,T]\right\}\cap\left\{X_t\le X_t^\alpha,\forall t\in[0,T]\right\}.\end{aligned}$$

根据定义 4，可知

$$\begin{aligned}&\mathcal{M}\left\{\exp\left(-\int_0^T r_t\mathrm{d}t\right)I_L\left(\sup_{0\le t\le T}X_t\right)\left(\frac{1}{T}\int_0^T X_t\mathrm{d}t-K\right)^+\right.\\&\left.\le\exp\left(-\int_0^T r_t^{1-\alpha}\mathrm{d}t\right)I_L\left(\sup_{0\le t\le T}X_t^\alpha\right)\left(\frac{1}{T}\int_0^T X_t^\alpha\mathrm{d}t-K\right)^+\right\}\\&\ge\mathcal{M}\left\{\left\{r_t\ge r_t^{1-\alpha},\forall t\in[0,T]\right\}\cap\left\{X_t\le X_t^\alpha,\forall t\in[0,T]\right\}\right\}\\&=\mathcal{M}\left\{r_t\ge r_t^{1-\alpha},\forall t\in[0,T]\right\}\wedge\mathcal{M}\left\{X_t\le X_t^\alpha,\forall t\in[0,T]\right\}\\&=\alpha\end{aligned}$$

同样地，对于 $\forall t \in [0,T]$，我们再做出两个假设

$$X_t(\gamma) > X_t^{\alpha}$$

和

$$r_t(\gamma) < r_t^{1-\alpha}$$

其中，$\gamma \in \Gamma$。由上述两个假设可知

$$I_L\left(\sup_{0\le t\le T} X_t(\gamma)\right)\left(\frac{1}{T}\int_0^T X_t(\gamma)\mathrm{d}t - K\right)^+ > I_L\left(\sup_{0\le t\le T} X_t^{\alpha}\right)\left(\frac{1}{T}\int_0^T X_t^{\alpha}\mathrm{d}t - K\right)^+$$

和

$$\exp\left(-\int_0^T r_t(\gamma)\mathrm{d}t\right) > \exp\left(-\int_0^T r_t^{1-\alpha}\mathrm{d}t\right).$$

因此，可以得出

$$\begin{aligned}
&\left\{\exp\left(-\int_0^T r_t\mathrm{d}t\right) I_L\left(\sup_{0\le t\le T} X_t\right)\left(\frac{1}{T}\int_0^T X_t\mathrm{d}t - K\right)^+\right. \\
&\left. > \exp\left(-\int_0^T r_t^{1-\alpha}\mathrm{d}t\right) I_L\left(\sup_{0\le t\le T} X_t^{\alpha}\right)\left(\frac{1}{T}\int_0^T X_t^{\alpha}\mathrm{d}t - K\right)^+\right\} \\
&\supset \left\{r_t < r_t^{1-\alpha}, \forall t \in [0,T]\right\} \cap \left\{X_t > X_t^{\alpha}, \forall t \in [0,T]\right\}.
\end{aligned}$$

根据 4，可知

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}\left\{\exp\left(-\int_0^T r_t\mathrm{d}t\right) I_L\left(\sup_{0\le t\le T} X_t\right)\left(\frac{1}{T}\int_0^T X_t\mathrm{d}t - K\right)^+\right. \\
&\left. > \exp\left(-\int_0^T r_t^{1-\alpha}\mathrm{d}t\right) I_L\left(\sup_{0\le t\le T} X_t^{\alpha}\right)\left(\frac{1}{T}\int_0^T X_t^{\alpha}\mathrm{d}t - K\right)^+\right\} \\
&\ge \mathcal{M}\left\{\left\{r_t < r_t^{1-\alpha}, \forall t \in [0,T]\right\} \cap \left\{X_t > X_t^{\alpha}, \forall t \in [0,T]\right\}\right\} \\
&= \mathcal{M}\left\{r_t < r_t^{1-\alpha}, \forall t \in [0,T]\right\} \wedge \mathcal{M}\left\{X_t > X_t^{\alpha}, \forall t \in [0,T]\right\} \\
&= 1-\alpha.
\end{aligned}$$

根据定义 1 中的对偶性公理可知

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}\left\{\exp\left(-\int_0^T r_t\mathrm{d}t\right) I_L\left(\sup_{0\le t\le T} X_t\right)\left(\frac{1}{T}\int_0^T X_t\mathrm{d}t - K\right)^+\right. \\
&\left. \le \exp\left(-\int_0^T r_t^{1-\alpha}\mathrm{d}t\right) I_L\left(\sup_{0\le t\le T} X_t^{\alpha}\right)\left(\frac{1}{T}\int_0^T X_t^{\alpha}\mathrm{d}t - K\right)^+\right\} \\
&+\mathcal{M}\left\{\exp\left(-\int_0^T r_t\mathrm{d}t\right) I_L\left(\sup_{0\le t\le T} X_t\right)\left(\frac{1}{T}\int_0^T X_t\mathrm{d}t - K\right)^+\right. \\
&\left. > \exp\left(-\int_0^T r_t^{1-\alpha}\mathrm{d}t\right) I_L\left(\sup_{0\le t\le T} X_t^{\alpha}\right)\left(\frac{1}{T}\int_0^T X_t^{\alpha}\mathrm{d}t - K\right)^+\right\} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

所以

$$\mathcal{M}\left\{\exp\left(-\int_0^T r_t \mathrm{d}t\right) I_L\left(\sup_{0\le t\le T} X_t\right)\left(\frac{1}{T}\int_0^T X_t \mathrm{d}t-K\right)^+\right.$$
$$\left.\le \exp\left(-\int_0^T r_t^{1-\alpha}\mathrm{d}t\right) I_L\left(\sup_{0\le t\le T} X_t^\alpha\right)\left(\frac{1}{T}\int_0^T X_t^\alpha \mathrm{d}t-K\right)^+\right\}$$
$$=\alpha.$$

进而推出

$$\exp\left(-\int_0^T r_t \mathrm{d}t\right) I_L\left(\sup_{0\le t\le T} X_t\right)\left(\frac{1}{T}\int_0^T X_t \mathrm{d}t-K\right)$$

的逆不确定分布为

$$\exp\left(-\int_0^T r_t^{1-\alpha}\mathrm{d}t\right) I_L\left(\sup_{0\le t\le T} X_t^\alpha\right)\left(\frac{1}{T}\int_0^T X_t^\alpha \mathrm{d}t-K\right)^+$$

最后，我们考虑指标函数

$$I_L\left(\sup_{0\le t\le T} X_t^\alpha\right)=1$$

当且仅当

$$\sup_{0\le t\le T} X_t^\alpha=\sup_{0\le t\le T}\exp\left(\exp(-\mu ct)\ln X_0+\frac{1}{c}\left(1-\exp(-\mu ct)\right)\left(1+\frac{\sqrt{3}\sigma_2}{\mu\pi}\ln\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\right)\ge L$$

时成立。即

$$\alpha\ge\left(1+\exp\left(\frac{1-c\ln L-(1-c\ln X_0)\exp(-\mu ct)}{1-\exp(-\mu ct)}\frac{\mu\pi}{\sqrt{3}\sigma_2}\right)\right)^{-1}=\beta.$$

最终得到向上敲入亚式看涨期权价格为

$$f_c^{ui}=\int_0^T\exp\left(-\int_0^T r_t^{1-\alpha}\mathrm{d}t\right) I_L\left(\sup_{0\le t\le T} X_t^\alpha\right)\left(\frac{1}{T}\int_0^T X_t^\alpha \mathrm{d}t-K\right)^+\mathrm{d}\alpha$$
$$=\int_\beta^1\exp\left(-\int_0^T r_t^{1-\alpha}\mathrm{d}t\right)\left(\frac{1}{T}\int_0^T X_t^\alpha \mathrm{d}t-K\right)^+\mathrm{d}\alpha.$$

证明完毕。

Step 1：根据定理 1，计算向上敲入亚式看涨期权价格 f_c^{ui} 的数值算法设计如下。

固定参数值，执行价格 K，到期时间 T，股票价格模型中的参数 X_0,μ,c 和 σ_2，浮动利率模型中的参数 a,b,r_0 和 σ_1。

Step 2：计算

$$\beta=\left(1+\exp\left(\frac{1-c\ln L-(1-c\ln X_0)\exp(-\mu ct)}{1-\exp(-\mu ct)}\frac{\mu\pi}{\sqrt{3}\sigma_2}\right)\right)^{-1}.$$

Step 3：选取足够大的数 M 和 N，令 $\alpha_i=\beta+i(1-\beta)/N, i=1,2,\cdots,N-1, t_j=j\cdot T/M, j=1,2,\cdots,M$，$r_{t_0}^{\alpha_i}=r_0$。

Step 4: 令 $i=0$。

Step 5: 令 $i=i+1$。

Step 6: 令 $j=0$。

Step 7: 令 $j=j+1$。

Step 8: 计算浮动利率和股票价格

$$r_{t_j}^{1-\alpha_i}=r_{t_{j-1}}^{1-\alpha_i}+a\left(b-r_{t_{j-1}}^{1-\alpha_i}\right)\frac{T}{M}+\sqrt{r_{t_{j-1}}^{1-\alpha_i}}\frac{\sqrt{3}\sigma_1}{\pi}\ln\frac{1-\alpha_i}{\alpha_i}\frac{T}{M}$$

$$X_{t_j}^{\alpha_i}=\exp\left(\exp\left(-\mu ct_j\right)\ln X_0+\frac{1}{c}\left(1-\exp\left(-\mu ct_j\right)\right)\left(1+\frac{\sqrt{3}\sigma_2}{\mu\pi}\ln\frac{\alpha_i}{1-\alpha_i}\right)\right)$$

如果 $j<M$，返回到 Step 7。

Step 9: 计算折现率

$$\exp\left(-\int_0^T r_t^{1-\alpha_i}\mathrm{d}t\right)\leftarrow\exp\left(-\frac{T}{M}\sum_{j=1}^{M}r_{t_j}^{1-\alpha_i}\right).$$

Step 10: 计算 T 时期内价格算术平均值与敲定价格 K 之间的正偏差

$$\left(\frac{1}{T}\int_0^T X_t^{\alpha}\mathrm{d}t-K\right)^{+}\leftarrow\max\left(0,\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}X_{t_j}^{\alpha_i}-K\right)$$

如果 $i<N-1$，返回到 Step 5。

Step 11: 计算期权价格

$$f_c^{ui}\leftarrow\frac{1-\beta}{N-1}\sum_{i=1}^{N-1}\exp\left(-\frac{T}{M}\sum_{j=1}^{M}r_{t_j}^{1-\alpha_i}\right)\max\left(0,\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}X_{t_j}^{\alpha_i}-K\right).$$

假设浮动利率的参数 $a=0.05$，$b=2$，$\sigma_1=0.04$，$r_0=0.03$，股票初始价格 $X_0=0.03$，到期时间 $T=5$，执行价格 $K=4$，股票价格的其他参数 $\mu=1.7$，$c=2$，$\sigma_2=\pi$，障碍水平 $L=9$，$M=N=1000$，则根据定理 1 和数值算法计算出向上敲入亚式看涨期权的价格为 $f_c^{ui}=0.1082$。

例 2.1 下面我们将研究一些参数(如障碍水平 L、利率波动率 σ_1、执行价格 K 和利率 r_0)对向上敲入亚式看涨期权价格 f_c^{ui} 的影响。当研究期权价格 f_c^{ui} 与某一个参数之间的关系时，需保持其他参数不变。

见图 1，价格 f_c^{ui} 关于障碍水平 L 递减，障碍水平越高，股价向上敲入达到该水平的可能性越小，期权被激活的可能性就越小，导致期权价格下降。价格 f_c^{ui} 关于到利率波动率 σ_1 递增，波动率越高，标的股票价格的波动越剧烈，收益率的不确定性就越强，导致期权价格约高。价格 f_c^{ui} 关于价格执行价格 K 递减，看涨期权将来某一时刻行使，期权收益等于股票价格与执行价格的差额。因此，股票价格一定时，随着执行价格的上升，看涨期权价格将会下降。价格 f_c^{ui} 关于利率 r_0 递减，当整个经济环境中利率增加时，股票价格往往会下降，利率上升与相应的股票价格下降的净效应会使期权下降。

4. 参数估计

Yao 和 Liu [12]在 2020 年首次提出不确定微分方程的矩估计方法，并对几种不确定微分方程进行参数估值，但并没有对不确定指数 O-U 模型的未知参数进行估值。下面我们将对模型(12)中股票价格模型的未知参数进行估值，并通过数值案例进行有效性验证。

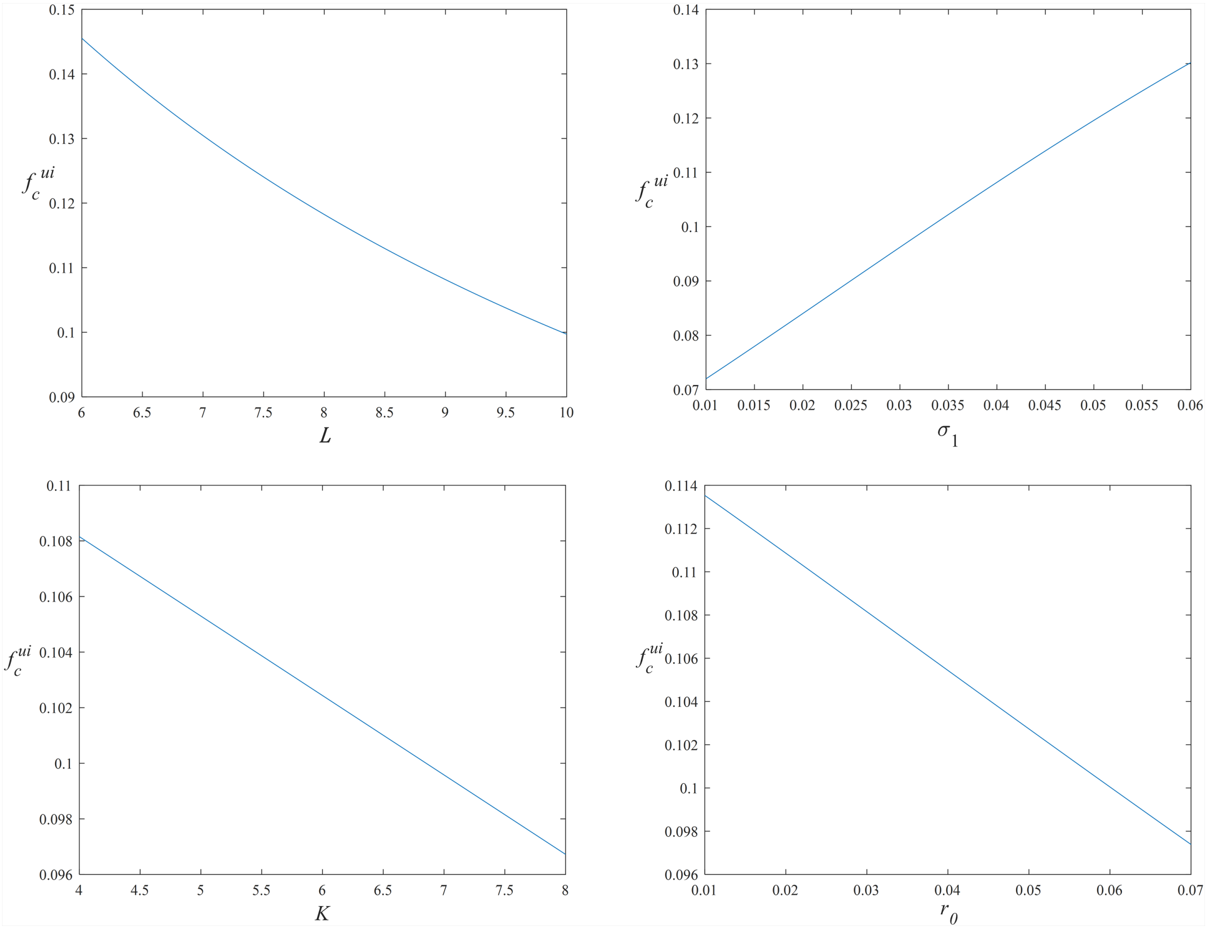

Figure 1. The relationship between f_c^{ui} and parameters L, σ_1, K and r_0

图 1. f_c^{ui} 与参数 L，σ_1，K 和 r_0 的关系

矩估计

对于股票价格模型

$$dX_t = \mu\left(1 - c\ln X_t\right)X_t dt + \sigma_2 X_t dC_{2t} \tag{19}$$

有 μ, c 和 σ_2 三个待估计的参数，其估计值分别为 μ^*, c^* 和 σ_2^*。根据表 1 中的 15 组观测数据[12]，估计值 μ^*, c^* 和 σ_2^* 通过解如下方程组获得

Table 1. 15 sets of observation data

表 1. 15 组观测数据

i	t_i	x_{ti}	i	t_i	x_{ti}
1	0.4	1.33	9	2.8	1.45
2	0.7	2.20	10	3.2	2.82
3	0.9	1.52	11	3.4	1.50
4	1.2	2.30	12	3.7	2.65

续表

5	1.5	2.37	13	4.0	2.07
6	1.9	2.49	14	4.2	2.99
7	2.1	1.90	15	4.6	1.88
8	2.4	1.65			

$$\begin{cases} \dfrac{1}{14}\sum_{i=1}^{14}\dfrac{x_{t_{i+1}}-x_{t_i}-\mu^*\left(1-c^*\ln X_t\right)\left(t_{i+1}-t_i\right)x_{t_i}}{\sigma_2^* x_{t_i}\left(t_{i+1}-t_i\right)}=0 \\ \dfrac{1}{14}\sum_{i=1}^{14}\left(\dfrac{x_{t_{i+1}}-x_{t_i}-\mu^*\left(1-c^*\ln X_t\right)\left(t_{i+1}-t_i\right)x_{t_i}}{\sigma_2^* x_{t_i}\left(t_{i+1}-t_i\right)}\right)^2=1 \\ \dfrac{1}{14}\sum_{i=1}^{14}\left(\dfrac{x_{t_{i+1}}-x_{t_i}-\mu^*\left(1-c^*\ln X_t\right)\left(t_{i+1}-t_i\right)x_{t_i}}{\sigma_2^* x_{t_i}\left(t_{i+1}-t_i\right)}\right)^3=0 \end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} \mu^*=8.5658 \\ c^*=1.3758 \\ \sigma_2^*=2.0389 \end{cases}$$

因此，股票价格模型为

$$\mathrm{d}X_t=8.5658\left(1-1.3758\ln X_t\right)X_t\mathrm{d}t+2.0389X_t\mathrm{d}C_{2t} \tag{20}$$

经检验，见图 2，所有的观测数据都落在式(40)的 0.98α 路径和 0.01α 路径之间的区域，因此参数估计值合理。

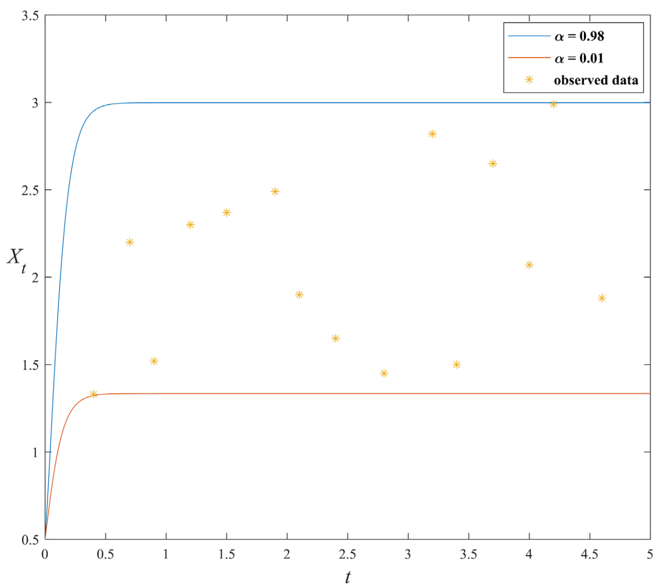

Figure 2. X_t^α and observation values

图 2. X_t^α 与观测值

5. 结论

本文在不确定理论的框架内研究了亚式障碍期权的定价问题。首先，通过构建一个新的不确定股票模型来模拟利率和股价的变化，推导出向上敲入亚式看涨期权的定价公式，其次，为了计算期权价格，设计了对应的数值算法，最后，运用矩估计法对不确定股票模型中的未知参数进行估值，并通过数值案例检验了参数值的合理性。参数估计是研究不确定微分方程的重要内容之一，本文采用矩估计的方法，利用观测数据进行估计，在后续的研究中，可以将实际的股票价格作为观测数据，进一步探究不确定股票模型的有效性，以构建更符合实际金融市场的不确定股票模型。

参考文献

[1] Black, F. and Scholes, M. (1973) The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, **81**, 637-654. https://doi.org/10.1086/260062

[2] Liu, B. (2007) Uncertainty Theory. 2nd Edition, Springer.

[3] Liu, B. (2015) Uncertainty Theory. 4th Edition, Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-44354-5

[4] Yang, X., Zhang, Z. and Gao, X. (2019) Asian-Barrier Option Pricing Formulas of Uncertain Financial Market. *Chaos, Solitons & Fractals*, **123**, 79-86. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2019.03.037

[5] Gao, R., Wu, W., Lang, C. and Lang, L. (2020) Geometric Asian Barrier Option Pricing Formulas of Uncertain Stock Model. *Chaos, Solitons & Fractals*, **140**, Article ID: 110178. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110178

[6] Liu, B. (2009) Some Research Problems in Uncertainty Theory. *Journal of Uncertain Systems*, **3**, 3-10.

[7] Liu, B. (2008) Fuzzy Process, Hybrid Process and Uncertain Process. *Journal of Uncertain Systems*, **2**, 3-16.

[8] Yao, K. and Chen, X. (2013) A Numerical Method for Solving Uncertain Differential Equations. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, **25**, 825-832. https://doi.org/10.3233/ifs-120688

[9] Yao, K. (2013) Extreme Values and Integral of Solution of Uncertain Differential Equation. *Journal of Uncertainty Analysis and Applications*, **1**, Article No. 2. https://doi.org/10.1186/2195-5468-1-2

[10] 刘兆鹏. 基于不确定指数 O-U 过程带有浮动利率模型的亚式期权定价[J]. 运筹与管理, 2022, 31(2): 205-208.

[11] Wang, W. and Chen, P. (2018) Pricing Asian Options in an Uncertain Stock Model with Floating Interest Rate. *International Journal for Uncertainty Quantification*, **8**, 543-557. https://doi.org/10.1615/int.j.uncertaintyquantification.2018025270

[12] Yao, K. and Liu, B. (2019) Parameter Estimation in Uncertain Differential Equations. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, **19**, 1-12. https://doi.org/10.1007/s10700-019-09310-y