Operations Research and Fuzziology 运筹与模糊学, 2024, 14(6), 332-342
Published Online December 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/orf
https://doi.org/10.12677/orf.2024.146535

Hans汉斯

空间自锚式悬索桥水平母线索鞍预偏量计算的改进方法

程　鹏，邓小康

武汉科技大学汽车与交通工程学院，湖北　武汉

收稿日期：2024年10月23日；录用日期：2024年12月2日；发布日期：2024年12月9日

摘　要

针对现有求解预偏量方法迭代复杂，收敛慢的问题，提出一种改进的空间悬索桥水平母线索鞍预偏量计算方法。作者在前期的研究过程中，建立了全新的空间主缆线形方程，在此基础上对索鞍成桥状态和空缆状态的力学与几何关系进行分析，推导出一个七阶非线性方程组，运用牛顿–拉弗森算法推导了雅可比矩阵，确定了初始值的选取方法，求解非线性方程组得到了水平母线索鞍预偏量。通过一个算例证明该计算方法能够满足空间悬索桥施工的精度要求，计算更加简便，迭代更加便捷，收敛较快，为空间悬索桥的建设提供有效的理论依据。

关键词

桥梁工程，空间悬索桥，索鞍预偏量，牛顿–拉弗森算法

Improved Method for Calculating the Pre Deflection of the Horizontal Busbar Saddle of a Space Self Anchored Suspension Bridge

Peng Cheng, Xiaokang Deng

School of Automobile and Traffic Engineering, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan Hubei

Received: Oct. 23rd, 2024; accepted: Dec. 2nd, 2024; published: Dec. 9th, 2024

Abstract

Aiming at the problems of complex iteration and slow convergence of existing methods for solving pre deflection, an improved method for calculating the pre deflection of the horizontal busbar saddle of a spatial suspension bridge is proposed. In the preliminary research process, the author

文章引用: 程鹏, 邓小康. 空间自锚式悬索桥水平母线索鞍预偏量计算的改进方法[J]. 运筹与模糊学, 2024, 14(6): 332-342. DOI: 10.12677/orf.2024.146535

established a new spatial main cable linear equation. A seven element nonlinear equation system was derived, and the Newton Raphson algorithm was used to provide the iterative format, solving steps, and Jacobian matrix for the solution. Through a numerical example, it is proven that this calculation method can meet the accuracy requirements of space suspension bridge construction, with simpler calculations, more convenient iterations, and faster convergence, providing effective theoretical basis for the construction of space suspension bridges.

Keywords

Bridge Engineering, Space Self Anchored Suspension Bridge, Pre Deviation of Cable Saddle, Newton Raphson Algorithm

1. 引言

空间自锚式悬索桥多采用“先梁后缆”的施工顺序，通过体系转换将主缆从空缆状态转变为成桥状态[1] [2]。在这一过程中，主索鞍两侧的主缆线形和受力会发生显著变化，如果空缆状态下的索鞍不进行预偏，塔顶将产生很大的不均衡力，导致塔底弯矩过大，严重威胁桥梁安全。同时，在体系转换过程中，索鞍两侧主缆拉力随着施工进度不断变化，通过逐步调整索鞍预偏量能够使索鞍在不同阶段较好地适应主缆拉力的变化。因此对主索鞍进行预偏是非常必要的。

文献[3]将空间自锚式悬索桥主索鞍分为水平母线索鞍和倾斜母线索鞍两种类型，本文主要研究水平母线索鞍预偏量的计算方法。目前，国内外已有很多研究人员给出了求解空间自锚式悬索桥索鞍预偏量的方法。文献[4]对如何确定水平母线鞍座的设计位置作了较深入的探讨，但是引入的变量较多。文献[5]假定索鞍预偏初值，并且以该初始值为基础，根据索鞍面滑动刚度与不平衡力之间的关系，推导出预偏量的调整量。文献[6]在文献[5]的基础上，提出索鞍面不平衡力系数的概念，通过调节预偏增量来调节不平衡力系数，实现对索鞍面预偏的控制。文献[7]采用一阶泰勒展开式来线性化拟合在索鞍切点处的主缆，并利用数值分析方法，推导出了主缆在切点位置的刚度矩阵，最后，基于主缆和索鞍的初始几何参数，确定索鞍预偏量。文献[5]-[7]都是先给定索鞍预偏量初值，通过对初始值的迭代修正，使得索鞍两端受力达到平衡，区别在于对初值调整以及迭代方式的不同。文献[8]根据不动点间无应力长度不变的原则，提出一种索鞍预偏量的牛顿－拉弗森算法，考虑索鞍处主缆弹性伸长和主缆与索鞍之间摩擦力影响，根据索鞍的平衡条件和主缆基本线形方程推导出 11 元非线性方程组。文献[9]根据平面主缆线形的基本方程和索鞍顶点与锚固点(索鞍顶点)之间高差闭合条件建立非线性方程组，并对其求解得出索鞍预偏量。以上大部分研究虽然都能得出索鞍预偏量，但是计算较为繁琐，收敛比较慢。

为此，本文提出了一种改进的空间自锚式悬索桥水平母线索鞍预偏量算法，算法基于对主索鞍成桥状态和空缆状态的力学和几何关系分析，推导出七元非线性方程组，用牛顿-拉弗森算法求解方程组可以得到空间悬索桥水平母线索鞍预偏量，该方法计算简便，迭代便捷，收敛较快。

2. 主缆线性方程推导

2.1. 基本假定

空间主缆分析计算过程中，遵循以下假定：1) 主缆索是一种理想的柔性索，只受拉，不考虑其弯曲

刚度和抗扭刚度；2) 主缆受力前后的横截面面积保持不变；3) 主缆受长度方向上的竖向均布荷载影响[3]。

索段划分见图 1，C 点为主缆最低点，C 点左侧的 m-1 根吊杆将主缆分成 m 段，C 点右侧 n-1 根吊杆将主缆分成 n 段。以 C 为原点建立坐标系，x 轴表示纵桥向，z 轴表示铅垂方向，y 轴表示横桥向。

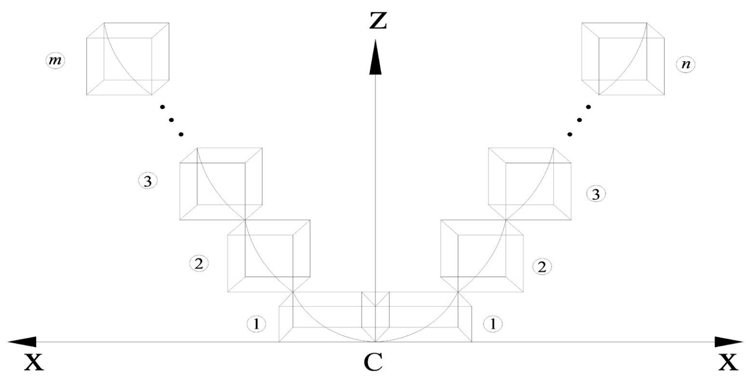

Figure 1. Schematic diagram of cable segment division
图 1. 空间主缆索段划分示意图

2.2. 建立主缆线性方程

空间主缆计算简图见图 2。

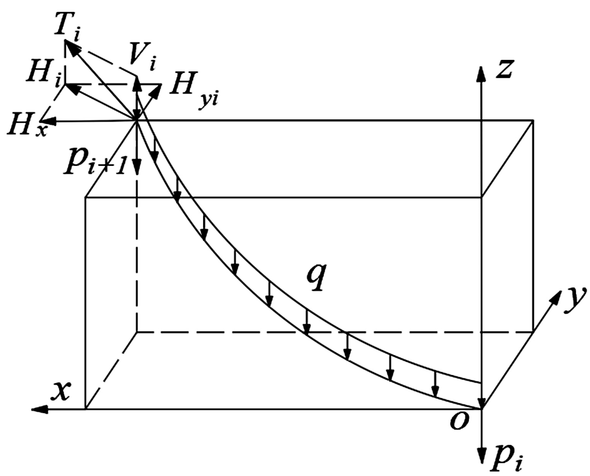

Figure 2. Calculation diagram of spatial main cable
图 2. 空间主缆计算简图

笔者在前期研究中已经推导出了全新的空间悬索桥主缆线形方程和无应力索长计算公式[10]，见式(1)~式(5)：

$$x = \frac{H_i H_x K}{EAq} + \frac{H_x}{q}\ln\left(K + \sqrt{1+K^2}\right) \tag{1}$$

$$y = \frac{H_i H_y K}{EAq} + \frac{H_y}{q}\ln\left(K + \sqrt{1+K^2}\right) \tag{2}$$

$$z = \frac{H_i^2 K^2}{2EAq} + \frac{H_i}{q}\left(\sqrt{1+K^2} - 1\right) \tag{3}$$

$$H_i = \sqrt{H_x^2 + H_y^2} \tag{4}$$

$$s_0(i) = \frac{H}{q}\left[z_H(i) - z_L(i)\right] \tag{5}$$

式中：x 为索段任一点在纵桥向的坐标；y 为索段任一点在横桥向的坐标；z 为索段任一点在铅锤方向的坐标；H_i 为索段 i 所受索力在水平面上的投影；H_x 为索段 i 纵桥向索力；H_y 为索段 i 横桥向索力；K 为索段任意点的空间斜率，A 表示有应力状态下主缆的横截面积，q 为沿索长方向的主缆自重荷载。E 为主缆弹性模量。索段 i 最高点和最低点的斜率分别用 $Z_H(i)$ 和 $Z_L(i)$ 表示。

3. 空间悬索桥水平母线鞍座定义及平衡条件的选取

3.1. 水平母线鞍座定义

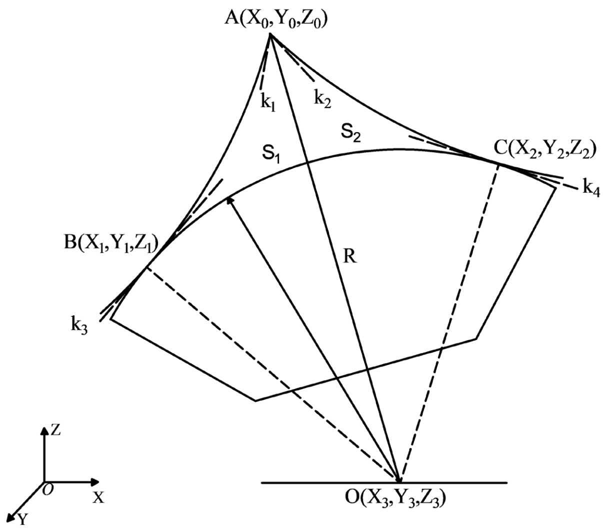

Figure 3. Calculation model for inclined busbar saddle position
图 3. 倾斜母线索鞍位置计算模型

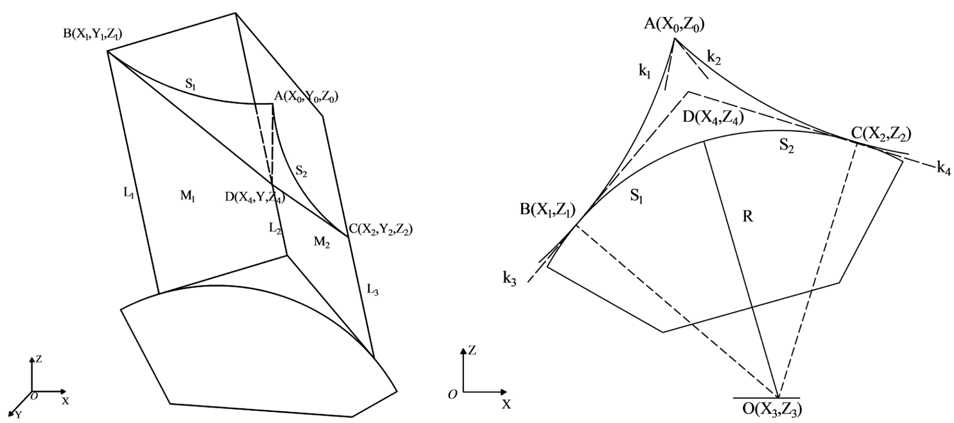

Figure 4. Calculation model for Horizontal Busbar Cable Saddle Position
图 4. 水平母线索鞍位置计算模型

水平母线是在悬索桥的设计中，连接主塔顶部和桥面之间的直线，通常在桥的平面内。空间悬索桥水平母线是指桥梁结构中，悬索和主梁的水平投影，它通常用于分析和设计悬索桥的力学性能。空间悬索桥的水平母线鞍座是用于支撑主缆并将其导向锚固位置的重要部件。空间悬索桥中的主缆需要通过鞍座转向，鞍座通过自身的结构设计使主缆受力均匀分布，同时减少局部应力集中，确保悬索桥的稳定性和安全性。倾斜母线索鞍位置模型见图 3，水平母线索鞍位置模型见图 4。

3.2. 平衡条件的选取

文献[11]认为空间自锚式悬索桥索鞍处理想力学平衡条件有三种情形：索鞍两侧主缆索力相等；索鞍主缆索力的水平分力相等；索鞍主缆索力沿鞍座滑移面的分力相等。本文选择第三种作为空间自锚式悬索桥主索鞍处的力学平衡条件。

4. 水平母线索鞍预偏量公式推导

悬索桥的理论顶点(IP 点)可分为两类：一种是成桥时，在设计温度下索鞍两侧主缆切点的切线交点；另一种是成桥时，在设计基准温度下索鞍两端主缆切点与顺延悬链线的交点处[12]。本文选用后一种定义。

主缆与索鞍鞍槽之间的摩擦力对索鞍预偏量的计算结果影响极小[13] [14] [15]。因此，本文在索鞍预偏分析过程中不考虑摩擦力的影响。

本文选取空间自锚式悬索桥左半侧边跨锚固点至中跨主缆最低点为研究对象，索鞍预偏量计算模型示意图见图 5，索鞍处关键点坐标位置信息见图 6。

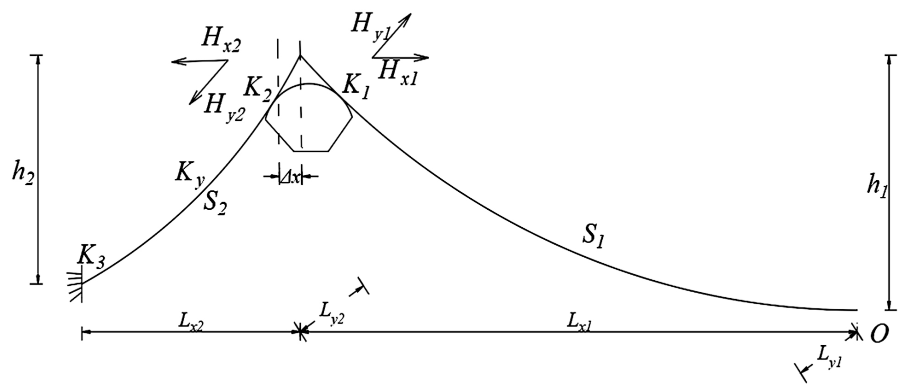

Figure 5. Schematic diagram of calculation parameters for pre offset of main cable saddle
图 5. 空间主索鞍预偏量计算参数示意图

计算过程的已知参数总结如下：

1) 材料参数：主缆弹性模量 E，横截面积 A，沿索长均匀分布的自重荷载 q。

2) 长度参数：索鞍设计半径 R_1，设计倾角β，过圆心的铅垂线与主索鞍不动点和圆心连线的夹角为 γ_1，成桥状态下主缆中跨最低点至索鞍不动点的无应力索长 S_1，该段主缆曲线段的纵桥向水平投影 L_{x1}，横桥向水平投影 L_{y1}；成桥状态下索鞍不动点至边跨锚固点的无应力索长为 S_2，该曲线段的纵桥向水平投影 L_{x2}，横桥向水平投影 L_{y2}，竖向投影 h_2。

3) 坐标参数：成桥状态下索鞍理论顶点坐标 $A(X_0, Y_0, Z_0)$，不动点右侧主缆与索鞍面的切点(右切点)坐标(X_2, Y_2, Z_2)，不动点左侧主缆与索鞍面的切点(左切点)坐标(X_1, Y_1, Z_1)，圆心坐标 $O(X_3, Y_3, Z_3)$。

需要求解的未知参数有：空缆状态下，主缆在主索鞍两侧的切点斜率 k_1、k_2，主缆在锚固点的斜率

k_3，主索鞍上的主缆张力在中跨段的纵桥向水平投影 Hx_1，主索鞍上的主缆张力在边跨段的纵桥向水平投影 Hx_2，主索鞍上的主缆张力在边跨段的横桥向水平投影 Hy_2，主索鞍的预偏量Δx。

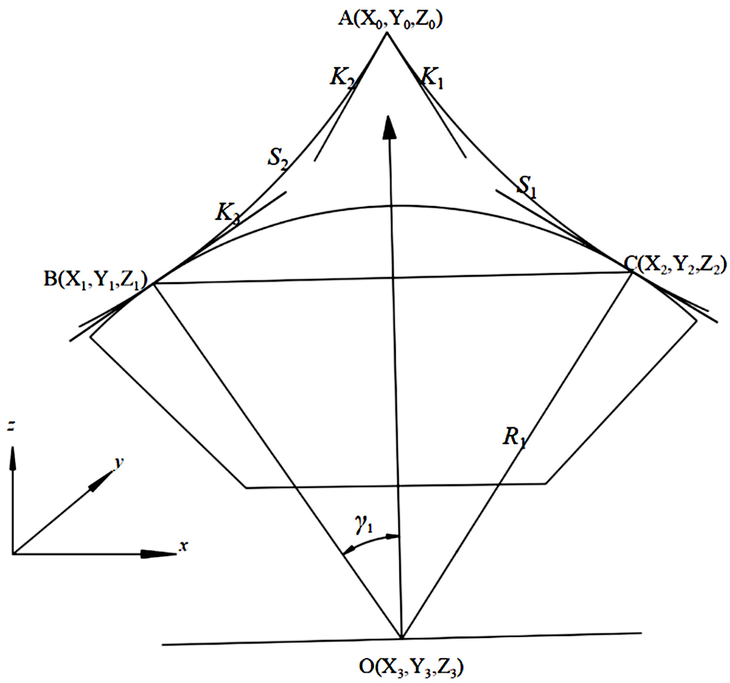

Figure 6. Detailed diagram of key point position of saddle
图 6. 主索鞍关键点位置详细图

文献[16]已经推导出主缆上任意一点的空间斜率 $k=\dfrac{V}{\sqrt{H_x^2+H_y^2}}$，其中 V 表示该点主缆张力的竖向分力。本文在计算不动点与切点相对位置和索鞍处主缆无应力长度时，将主缆在索鞍面上的切点斜率用竖直面斜率替换。即索鞍面上主缆斜率 $g=\dfrac{\sqrt{V^2+H_y^2}}{H_x}=\dfrac{\sqrt{k^2\left(H_x^2+H_y^2\right)+H_y^2}}{H_x}$。

对于中跨，从主索鞍不动点到中跨主缆最低点有：

$$\frac{H_{i1}}{q}k_1+R_1\left(\gamma_1+\arctan g_1\right)=S_1 \tag{6}$$

$$\frac{H_{i1}H_{x1}k_1}{EAq}+\frac{H_{x1}}{q}\ln\left(k_1+\sqrt{1+k_1^2}\right)+R_1\left(\sin\gamma_1+\sin\arctan g_1\right)=L_{x1}+\Delta x \tag{7}$$

对于边跨，从主索鞍不动点到锚固点有：

$$\frac{H_{i2}}{q}\left(k_2-k_3\right)+R_1\left(\arctan g_2-\gamma_1\right)=S_2 \tag{8}$$

$$\begin{aligned}&\frac{H_{i2}H_{x2}}{EAq}\left(k_2-k_3\right)+\frac{H_{x2}}{q}\left[\ln\left(k_2+\sqrt{1+k_2^2}\right)-\ln\left(k_3+\sqrt{1+k_3^2}\right)\right]\\&+R_1\left(\sin\arctan g_2-\sin\gamma_1\right)\cos\arctan\frac{H_{y2}}{H_{x2}}=L_{x2}-\Delta x\end{aligned} \tag{9}$$

$$\frac{H_{i2}H_{y2}}{EAq}(k_2-k_3)+\frac{H_{y2}}{q}\left[\ln\left(k_2+\sqrt{1+k_2^2}\right)-\ln\left(k_3+\sqrt{1+k_3^2}\right)\right]$$
$$+R_1(\cos\gamma_1-\cos\arctan g_2)\sin\arctan\frac{H_{y2}}{H_{x2}}=L_{y2} \tag{10}$$

$$\frac{H_{i2}^2}{2EAq}\left(k_2^2-k_3^2\right)+\frac{H_{i2}}{q}\left(\ln\sqrt{1+k_2^2}-\ln\sqrt{1+k_3^2}\right)$$
$$+R_1(\cos\gamma_1-\cos\arctan g_2)=h_2 \tag{11}$$

对于主索鞍处的平衡条件有：

$$H_{x1}=H_{x2} \tag{12}$$

上述式(6)~(12)共有 7 个方程，组成一个七元非线性方程组，7 个未知量 k_1、k_2、k_3、H_{x1}、H_{x2}、H_{y2}、Δx 由该方程组唯一确定。

5. 用牛顿–拉弗森算法求解索鞍预偏量方程组

5.1. 牛顿–拉弗森算法

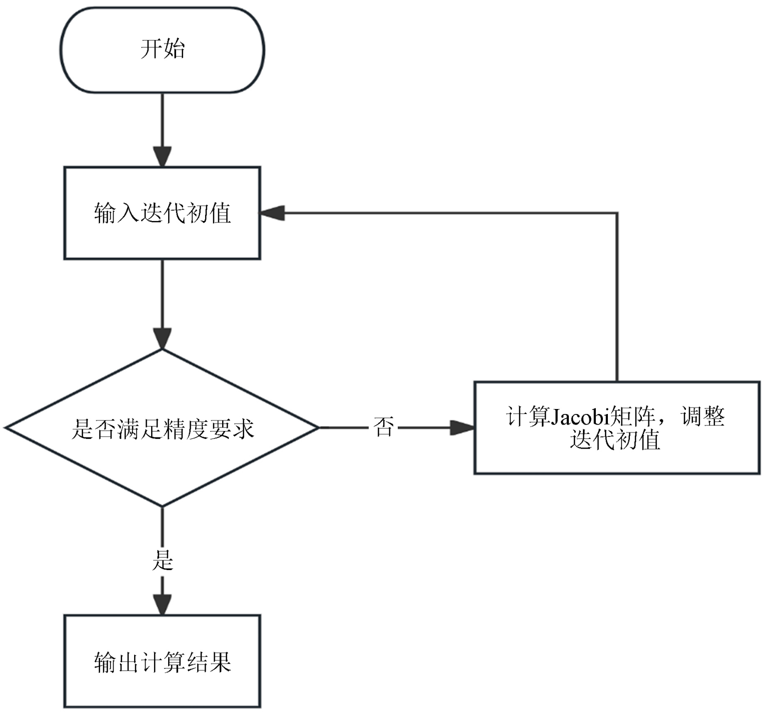

Figure 7. Newton Raphson method iteration flowchart
图 7. 牛顿–拉弗森算法迭代流程图

根据式(6)~式(12)，可以得到一个七元非线形方程组：

$$F_i(x_1,x_2,\cdots,x_7)=F_i\left(k_1,k_2,k_3,H_{x1},H_{x2},H_{y2},\Delta x\right)=0\left(i=1,2,\cdots,7\right) \tag{13}$$

将 F_i 对 x_i 求偏导，所求结果可组成 Jacobi 矩阵，有：

$$J_{ij}=\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \tag{14}$$

根据牛顿－拉弗森算法的迭代公式：

$$\delta X^n = \frac{-F^{n+1}}{J^n} \tag{15}$$

$$X^n = X^{n-1} + \delta X^n \tag{16}$$

本文编程计算过程如下：

Step1：选取合适的迭代初值 X^0，X^0 见下式：

$$X^0 = \left(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_7^0\right) = \left(k_1^0, k_2^0, k_3^0, H_{x1}^0, H_{x2}^0, H_{y2}^0, \Delta x^0\right) \tag{17}$$

令 $n = 1$，并设定计算结果精度 ε；

Step2：计算 $D_i = -F_i\left(X^{n-1}\right)(i = 1,2,\cdots,7)$，当 $\max\limits_{1\le i\le 7}\left|D_i\right| \le \varepsilon$ 时，则方程组的解为：

$$X^{n-1} = \left(x_1^{n-1}, x_2^{n-1}, \cdots, x_7^{n-1}\right) = \left(k_1^{n-1}, k_2^{n-1}, k_3^{n-1}, H_{x1}^{n-1}, H_{x2}^{n-1}, H_{y2}^{n-1}, \Delta x^{n-1}\right) \tag{18}$$

当 $\max\limits_{1\le i\le 7}\left|D_i\right| \ge \varepsilon$ 时，表明精度不满足要求，需继续进行 **Step3**。

Step3：利用公式(14)计算方程组的 Jacobi 矩阵。利用式(15)和式(16)对求解参数进行修正，将修正后的求解参数代入到 **Step2**，再判断结果能否满足 **Step1** 中设定的计算结果精度。若不满足，需重复 **Step3**，直到调整后的未知参数满足初始设定的精度要求为止。

本文关于牛顿－拉菲森算法求解方程组的具体程序迭代流程如图 7 所示。

5.2. 计算雅可比矩阵

将式(13)改写得到的矩阵函数 $\boldsymbol{F}$ 为：

$$F_1 = \frac{H_{i1}}{q}k_1 + R_1\left(\gamma_1 + \arctan g_1\right) - S_1 \tag{19}$$

$$F_2 = \frac{H_{i1}H_{x1}k_1}{EAq} + \frac{H_{x1}}{q}\ln\left(k_1 + \sqrt{1+k_1^2}\right) + R_1\left(\sin\gamma_1 + \sin\arctan g_1\right) - L_{x1} - \Delta x \tag{20}$$

$$F_3 = \frac{H_{i2}}{q}\left(k_2 - k_3\right) + R_1\left(\arctan g_2 - \gamma_1\right) - S_2 \tag{21}$$

$$\begin{aligned} F_4 = {} & \frac{H_{i2}H_{x2}}{EAq}\left(k_2 - k_3\right) + \frac{H_{x2}}{q}\left[\ln\left(k_2 + \sqrt{1+k_2^2}\right) - \ln\left(k_3 + \sqrt{1+k_3^2}\right)\right] \\ & + R_1\left(\sin\arctan g_2 - \sin\gamma_1\right)\cos\arctan\frac{H_{y2}}{H_{x2}} - L_{x2} + \Delta x \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} F_5 = {} & \frac{H_{i2}H_{y2}}{EAq}\left(k_2 - k_3\right) + \frac{H_{y2}}{q}\left[\ln\left(k_2 + \sqrt{1+k_2^2}\right) - \ln\left(k_3 + \sqrt{1+k_3^2}\right)\right] \\ & + R_1\left(\cos\gamma_1 - \cos\arctan g_2\right)\sin\arctan\frac{H_{y2}}{H_{x2}} - L_{y2} \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} F_6 = {} & \frac{H_{i2}^2}{2EAq}\left(k_2^2 - k_3^2\right) + \frac{H_{i2}}{q}\left(\ln\sqrt{1+k_2^2} - \ln\sqrt{1+k_3^2}\right) \\ & + R_1\left(\cos\gamma_1 - \cos\arctan g_2\right) - h_2 \end{aligned} \tag{24}$$

$$F_7 = H_{x1} - H_{x2} \tag{25}$$

对矩阵函数 $\boldsymbol{F}$ 求偏导，计算出雅可比矩阵 $J=\left[J_{ij}\right]_{7\times 7}$ 为：

$$\begin{aligned}J_{1j}=&\left[\frac{H_{i1}}{q}+\frac{R_1k_1H_{x1}^2}{H_{x1}\left(k_1^2+1\right)H_{i1}^2\sqrt{k_1^2H_{i1}^2+H_{y1}^2}},\right.\\&\left.0,0,\frac{k_1H_{x1}}{H_{i1}q}+\frac{R_1H_{x1}\left(k_1^2H_{x1}-k_1^2H_{i1}^2-H_{y1}^2\right)}{\left(k_1^2+1\right)H_{i1}^2\sqrt{k_1^2H_{i1}^2+H_{y1}^2}},0,0,0\right]\end{aligned}\tag{26}$$

$$\begin{aligned}J_{2j}=&\left[\frac{H_{i1}H_{x1}}{EAq}+\frac{H_{x1}}{q\sqrt{1+k_1^2}}+\frac{R_1k_1H_{x1}}{\left(k_1^2+1\right)\sqrt{k_1^2H_{i1}^2+H_{y1}^2}},0,0,\right.\\&\left.\frac{H_{i1}^2+H_{x1}^2}{EAqH_{i1}}k_1+\frac{R_1H_{x1}\left(k_1^2H_{x1}-k_1^2H_{i1}^2-H_{y1}^2\right)}{\left(k_1^2+1\right)H_{i1}^2\sqrt{k_1^2H_{i1}^2+H_{y1}^2}}\cos\arctan g_1,0,0,-1\right]\end{aligned}\tag{27}$$

$$\begin{aligned}J_{3j}=&\left[0,\frac{H_{i2}}{q}+\frac{R_1k_2H_{x2}^2}{H_{x2}\left(k_2^2+1\right)H_{i2}^2\sqrt{k_2^2H_{i2}^2+H_{y2}^2}},-\frac{H_{i2}}{q},0,\frac{H_{x1}}{H_{i1}q}\left(k_2-k_3\right)\right.\\&\left.+\frac{R_1H_{x2}\left(k_2^2H_{x2}-k_2^2H_{i2}^2-H_{y2}^2\right)}{\left(k_2^2+1\right)H_{i2}^2\sqrt{k_2^2H_{i2}^2+H_{y2}^2}},\frac{k_1H_{y1}}{H_{i1}q}+\frac{R_1H_{y2}}{H_{i2}^2\sqrt{k_2^2H_{i2}^2+H_{y2}^2}},0\right]\end{aligned}\tag{28}$$

$$\begin{aligned}J_{4j}=&\left[0,\frac{H_{i2}H_{x2}}{EAq}+\frac{H_{x2}}{q\sqrt{1+k_2^2}}+\frac{R_1k_2H_{x2}}{\left(k_2^2+1\right)\sqrt{k_2^2H_{i2}^2+H_{y2}^2}}\cos\arctan g_2\cos\arctan\frac{H_{y2}}{H_{x2}},\right.\\&-\frac{H_{i2}H_{x2}}{EAq}-\frac{H_{x2}}{q\sqrt{1+k_3^2}},0,\frac{H_{i2}^2+H_{x2}^2}{EAqH_{i2}}\left(k_2-k_3\right)\\&+\frac{R_1H_{x2}\left(k_2^2H_{x2}-k_2^2H_{i2}^2-H_{y2}^2\right)}{\left(k_2^2+1\right)H_{i2}^2\sqrt{k_2^2H_{i2}^2+H_{y2}^2}}\cos\arctan g_2\cos\arctan\frac{H_{y2}}{H_{x2}}\\&+R_1\left(\sin\arctan g_2-\sin\gamma_1\right)\frac{H_{y2}}{H_{i2}^2}\sin\arctan\frac{H_{y2}}{H_{X2}},\frac{H_{i2}^2+H_{y2}}{EAqH_{i2}}\left(k_2-k_3\right)\\&\left.+\frac{R_1H_{y2}}{H_{i2}^2\sqrt{k_2^2H_{i2}^2+H_{y2}^2}}\cos\arctan g_2\cos\arctan\frac{H_{y2}}{H_{x2}}-R_1\left(\sin\arctan g_2-\sin\gamma_1\right)\frac{H_{x2}}{H_{i2}^2}\sin\arctan\frac{H_{y2}}{H_{X2}},1\right]\end{aligned}\tag{29}$$

$$\begin{aligned}J_{5j}=&\left[0,\frac{H_{i2}H_{y2}}{EAq}+\frac{H_{y2}}{q\sqrt{1+k_2^2}}+\frac{R_1k_2H_{x2}}{\left(k_2^2+1\right)\sqrt{k_2^2H_{i2}^2+H_{y2}^2}}\sin\arctan g_2\sin\arctan\frac{H_{y2}}{H_{x2}},-\frac{H_{i2}H_{y2}}{EAq}-\frac{H_{y2}}{q\sqrt{1+k_3^2}},0,\right.\\&\frac{H_{x2}H_{y2}}{EAqH_{i2}}\left(k_2-k_3\right)+\frac{R_1H_{x2}\left(k_2^2H_{x2}-k_2^2H_{i2}^2-H_{y2}^2\right)}{(k_2^2+1)H_{i2}^2\sqrt{k_2^2H_{i2}^2+H_{y2}^2}}\sin\arctan g_2\sin\arctan\frac{H_{y2}}{H_{x2}}\\&-\frac{H_{y2}}{H_{i2}^2}R_1\left(\cos\gamma_1-\cos\arctan g_2\right)\cos\arctan\frac{H_{y2}}{H_{x2}},\frac{H_{i2}^2+H_{y2}}{EAqH_{i2}}\left(k_2-k_3\right)\\&\left.+\frac{R_1H_{y2}}{H_{i2}^2\sqrt{k_2^2H_{i2}^2+H_{y2}^2}}\sin\arctan g_2\sin\arctan\frac{H_{y2}}{H_{x2}}+R_1\left(\cos\gamma_1-\cos\arctan g_2\right)\frac{H_{x2}}{H_{i2}^2}\cos\arctan\frac{H_{y2}}{H_{x2}},0\right]\end{aligned}\tag{30}$$

$$J_{6j}=\left[0,\frac{H_{i2}^2k_2}{EAq}+\frac{H_{i2}k_2}{\left(1+k_2^2\right)q}+\frac{R_1k_2H_{x2}}{\left(k_2^2+1\right)\sqrt{k_2^2H_{i2}^2+H_{y2}^2}}\sin\arctan g_2,\right.$$
$$-\frac{H_{i2}^2k_3}{EAq}-\frac{H_{i2}k_3}{\left(1+k_3^2\right)q},0,\frac{H_{x2}}{EAq}\left(k_2^2-k_3^2\right)+\frac{H_{x2}}{H_{i2}q}\left(\ln\sqrt{1+k_2^2}-\ln\sqrt{1+k_3^2}\right)$$
$$+\frac{R_1H_{x2}\left(k_2^2H_{x2}-k_2^2H_{i2}^2-H_{y2}^2\right)}{\left(k_2^2+1\right)H_{i2}^2\sqrt{k_2^2H_{i2}^2+H_{y2}^2}}\sin\arctan g_2,\frac{H_{y2}}{EAq}\left(k_2^2-k_3^2\right) \tag{31}$$
$$\left.+\frac{H_{y2}}{H_{i2}q}\left(\ln\sqrt{1+k_2^2}-\ln\sqrt{1+k_3^2}\right)+\frac{R_1H_{y2}}{H_{i2}^2\sqrt{k_2^2H_{i2}^2+H_{y2}^2}}\sin\arctan g_2,0\right]$$

$$J_{7j}=\left[0,0,0,1,0,-1,0\right] \tag{32}$$

5.3. 初值 X0 的选取

在采用牛顿－拉斐森算法求解非线性方程组时，初值的选取是一个十分关键的问题，若初值与实际解之间存在较大差异，则会使算法不能收敛[17]。

本文用以下方法来确定初值：

1) 计算成桥状态下空间自锚式悬索桥索鞍的位置参数：k_1、k_2、k_3、Hx_1、Hx_2、Hy_2，以计算得到的位置参数为迭代初值；

2) 假定主索鞍的预偏量$\Delta x = 0.1$ m。

依据上述方法选取的初值，一般均可确保牛顿－拉斐森法的收敛性。

6. 算例

某空间索面悬索桥主缆弹性模量 $E = 198{,}000$ MPa，主缆横截面面积 $A = 1057.32$ cm^2。主索鞍为水平母线索鞍，设计半径 $R = 6.0$ m，主缆沿长度方向上的单位长度自重荷载 $q = 9.033$ kN/m。成桥状态下，主索鞍不动点与主跨跨中最低点之间的主缆无应力长度 $S_1 = 173.586$ m，纵桥向间距 $Lx_1 = 157.839$ m，主索鞍不动点和主索鞍圆心连线与铅垂线的夹角 $\gamma = 0.0$ rad；主索鞍不动点与锚固点之间的主缆无应力长度 $S_2 = 137.750$ m，横桥向间距 $Ly_2 = 23.720$ m，纵桥向间距 $Lx_2 = 116.328$ m，高差 $h_2 = 66.996$ m。

由成桥主缆线形计算，得到 $Hx_1 = 60143.332$ kN，$Hx_2 = 60143.332$ kN，$Hy_2 = 8867.875$ kN，$k_1 = 0.74079$，$k_2 = 0.7736$，$k_3 = 0.31223$。将上述值以及主索鞍预偏初值为 0.1 m 作为牛顿－拉菲森法迭代初值，代入计算程序中得到水平母线索鞍预偏量计算结果如表 1 所示。

Table 1. Calculation results of pre offset of horizontal busbar main cable saddle
表 1. 水平母线主索鞍预偏量的计算结果

计算项目	本文计算结果	设计院计算结果
主索鞍预偏量(m)	0.1601	0.1938
中跨侧主缆张力沿纵桥向水平分力(kN)	1832.0086	1832.0112
边跨侧主缆张力沿纵桥向水平分力(kN)	1832.0086	1832.0112
边跨侧主缆张力沿横桥向水平分力(kN)	374.0727	372.8673
右切点斜率 k_1	0.8353	/
左切点斜率 k_2	0.9101	/
锚固点斜率 k_3	0.2667	/

表 1 得出的结果说明采用本文计算方法得出的主索鞍预偏量与设计院给出的预偏量基本一致，预偏量偏差为 34 mm，并且二者计算出的空缆状态下的主缆张力也基本一致，最大偏差 1.2 kN。由此可知，本文算法计算出的索鞍预偏量可满足实际施工精度要求，并且计算项目更加丰富。

7. 结论

1) 本文作者在前期研究中推导了全新的空间主缆线形方程，本文在此基础上提出了一种空间自锚式悬索桥水平母线索鞍预偏量计算的改进方法。该方法以空间斜率作为主缆线形方程基础，对主索鞍成桥状态和空缆状态力学和几何关系进行分析，建立七元非线性方程组。

2) 本文运用牛顿－拉弗森算法计算非线性方程组，给出了预偏方程组迭代求解时初值的选择方法。将成桥时索鞍位置确定的斜率与横向分力作为初始值，主索鞍预偏量的迭代初值设置为 0.1 m。这样取值，一般可保证算法快速收敛。

3) 通过算例的计算结果表明，本文提出的计算方法满足精度要求，算法迭代较快，计算简便，可以算出的数据比较丰富，为空间悬索桥的建设提供有效的理论依据。

参考文献

[1] 梅银海. 考虑材料非线性的悬索桥主缆线形分析与程序开发[D]: [硕士学位论文]. 重庆: 重庆交通大学, 2018.

[2] 黄峰. 杨泗港长江大桥主桥全焊结构钢桁梁安装施工技术[J]. 世界桥梁, 2019, 47(2): 11-16.

[3] 刘海波. 空间主缆自锚式悬索桥成桥状态确定方法的研究[D]: [硕士学位论文]. 长沙: 长沙理工大学, 2010.

[4] 柯红军, 李传习, 张玉平, 等. 双塔大横向倾角空间主缆自锚式悬索桥体系转换方案与控制方法[J]. 土木工程学报, 2010, 43(11): 94-101.

[5] 唐茂林, 沈锐利, 强士中. 大跨度悬索桥丝股架设线形计算的精确方法[J]. 西南交通大学学报, 2001(6): 303-307.

[6] 李传习. 现代悬索桥静力非线性理论与实践[M]. 北京: 人民交通出版社, 2014.

[7] Chen, Z., Cao, H. and Zhu, H. (2013) An Iterative Calculation Method for Suspension Bridge's Cable System Based on Exact Catenary Theory. *The Baltic Journal of Road and Bridge Engineering*, **8**, 196-204. https://doi.org/10.3846/bjrbe.2013.25

[8] 王邵锐, 周志祥, 高燕梅, 等. 悬索桥索鞍预偏量的牛顿-拉斐森算法[J]. 中国公路学报, 2016, 29(1): 82-88.

[9] 唐茂林, 沈锐利, 强士中. 悬索桥索鞍位置设计[J]. 公路交通科技, 2001(8): 55-58.

[10] 邓小康, 徐恭义. 一种悬索桥主缆计算的新方法[J]. 铁道学报, 2019, 41(5): 133-141.

[11] 唐茂林. 大跨度悬索桥空间几何非线性分析与软件开发[D]: [博士学位论文]. 成都: 西南交通大学, 2003.

[12] 姚明. 自锚式悬索桥主缆线形计算与分析[D]: [硕士学位论文]. 长沙: 长沙理工大学, 2008.

[13] 王路, 沈锐利, 王昌将, 等. 悬索桥主缆与索鞍间侧向力理论计算方法与公式研究[J]. 土木工程学报, 2017, 50(12): 87-96.

[14] 王路. 悬索桥主缆与索鞍间滑移机理理论及试验研究[D]: [博士学位论文]. 成都: 西南交通大学, 2018.

[15] 邓小康, 张其. 考虑主、散索鞍耦合效应的索鞍预偏量改进算法[J]. 铁道学报, 2022, 44(1): 128-133.

[16] 邓小康, 李小贝. 空间缆索悬索桥倾斜母线鞍座设计位置计算的改进方法[J]. 重庆交通大学学报(自然科学版), 2023, 42(2): 8-12+36.

[17] 邓小康. 悬索桥缆索系统解析计算的新方法及其应用[D]: [博士学位论文]. 南宁: 广西大学, 2018.