Operations Research and Fuzziology 运筹与模糊学, 2025, 15(2), 198-205
Published Online April 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/orf
https://doi.org/10.12677/orf.2025.152076

交换环的局部化及其模的局部化

陈洪楠

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2025年2月13日；录用日期：2025年3月26日；发布日期：2025年4月3日

摘　要

本论文对于交换环及其模，给出了局部化的定义，讨论了在该定义下局部化的若干性质，同时根据交换环的局部化研究了交换半环的局部化的相关性质，得到了一些有趣的新结果。对于开阔读者的视野，以及进一步研究交换环性质有一定的启发作用，相信在一些领域会有一定的应用。

关键词

交换环，交换模，局部化，交换半环，半模

The Localization of Commutative Rings and Localization of Their Modules

Hongnan Chen

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Feb. 13th, 2025; accepted: Mar. 26th, 2025; published: Apr. 3rd, 2025

Abstract

This paper gives the definition of localization for commutative rings and their modules, discusses several properties of localization under this definition, and at the same time, studies the related properties of the localization of commutative semirings based on the localization of commutative rings, and obtains some interesting new results. It has a certain inspiring effect on broadening the readers' horizons and further studying the properties of commutative rings, and it is believed that it will have certain applications in some fields.

Keywords

Commutative Ring, Commutative Module, Localization, Commutative Semiring, Semimodule

文章引用：陈洪楠. 交换环的局部化及其模的局部化[J]. 运筹与模糊学, 2025, 15(2): 198-205.
DOI: 10.12677/orf.2025.152076

1. 绪论

1.1. 引言

本文中的环是指有单位元的结合环，符号 $C(R)$ 表示 R 的中心， $N(R)$ 表示 R 的幂零元集， $J(R)$ 表示 R 的 Jacobson 根。对于 $x\in R$ ， $r(x)$ 和 $l(x)$ 分别表示 x 的右零化子和左零化子。设 K 是 R 的非零右理想，如果对 R 的任何非零右理想 K' 均有 $K\cap K'\neq 0$ ，则称 K 为 R 的本质右理想。令 $Z_r(R)=\{x\in R \mid r(x)\text{为}R\text{的本质右理想}\}$ ，那么 $Z_r(R)$ 是 R 的理想，称它为 R 的右奇异理想，类似地可定义左奇异理想(以上概念参见[1])。

设 I 是 R 的一个非空子集，如果对于任意 $x\in I$ ，均有 $1-x\notin I$ 并且 $r(1-x)=0$ ，则称 I 为 R 的补右零化子集[2]。类似地可定义补左零化子集。易知， $N(R)$ ， $J(R)$ ， $Z_r(R)$ 是 R 的补右零化子集； $N(R)$ ， $J(R)$ ， $Z_r(R)$ 是 R 的补左零化子集。

环的交换性的研究是经典环论的重要课题。自 1945 年以来，许多学者对此做了深入的研究，获得了丰富的研究成果。Pinter-Lucke 在文献[3]中介绍了这一领域 1950 年至 2005 年期间的研究成果，其后的主要工作可参见[4]-[6]及其参考文献。众所周知，对任意乘法群 G ，如果存在正整数 m ，使得所有 $x,y\in G$ 均满足 $(xy)^{m+k}=x^{m+k}y^{m+k}$ ，其中 $k=0,1,2$ ，那么 G 是交换群。Ligh 和 Richoux 在文献[7]中证明了这一结论对于环也成立；魏俊潮等在文献[8] [9]推广了这一结论，证明了对于环 R ，如果存在正整数 m ，使得所有 $x\in R\setminus N(R)$ 均满足 $(xy)^{m+k}=x^{m+k}y^{m+k}$ ，其中 $k=0,1,2$ ，那么 R 是交换环；杨倩等在文献[10]证明如果用 Jacobson 根 $J(R)$ 代替 $N(R)$ ，那么 R 也是交换环；杜巧利和孙建华在文献[11]中证明了如果用右奇异理想 $Z_r(R)$ 代替 $N(R)$ ，那么 R 仍是交换环，他们还证明了对于环 R ，如果存在正整数 m ，使得所有 $x\in R, y\in R\setminus Z_t(R)$ 均满足 $(xy)^{m+k}=x^{m+k}y^{m+k}$ ，其中 $k=0,1,2$ ，那么 R 是交换环。Bell 在文献[12]中进一步推广了[8] [9]的结论，证明了对于环 R ，如果存在正整数 m ，使得所有 $x,y\in R\setminus N(R)$ 均满足 $(xy)^{m+k}=x^{m+k}y^{m+k}$ 或者对于所有 $x,y\in R\setminus J(R)$ 均满足 $(xy)^{m+k}=x^{m+k}y^{m+k}$ ，其中 $k=0,1,2$ ，那么 R 是交换环。

1.2. 定义和引理

定义 1.2.1 设 R 为交换环， S 为 R 中的乘法闭子集，即 $\forall a,b\in S$ ，有 $ab\in S$ ，在 $R\times S$ 上定义二元关系： $(a,s)\sim(a',s')\Leftrightarrow\exists t\in S$ ，使得 $t(sa'-s'a)=0$ ，其中～是等价关系，等价类集合记为 $S^{-1}R$ 。 $S^{-1}R$ 关于分式的加法和乘法形成环，称为 R 关于乘法闭子集 S 的分式环。更多交换环的研究工作可参考文献[13]。

引理 1.2.2 映射 $i_s:R\to S^{-1}R, x\to\frac{sx}{s}(s\in S)$ 为标准环同态，且对 $\forall s\in S$ ， $i_s(s)$ 是 $S^{-1}R$ 的可逆元。

引理 1.2.2 对于环 R' 和环同态 $f:R\to R'$ ，如果对于所有的 $s\in S$ ， $f(x)$ 是 R' 中的可逆元，则存在唯一的环同态 $g:S^{-1}R\to R'$ ，使得 $gi_s=f$ 。

定义 1.2.2 设 R 为交换环， M 是 $R-$ 模， S 为 R 中的乘法闭子集，即 $\forall a,b\in S$ ，有 $ab\in S$ 且 $1\in S$ ，在 $R\times S$ 上定义二元等价关系：

$(a,s):(a',s')\Leftrightarrow\exists t\in S$ ，使得 $t(sa'-s'a)=0$ ，等价类集合记为 $S^{-1}M$ 。 $S^{-1}M$ 关于分式的加法和乘法形成 $S^{-1}R-$ 模，称为 $R-$ 模 M 对于 R 乘法闭子集 S 的分式模。

引理 1.2.3 若映射 $f:M\to N$ 是 $R-$ 模同态，则存在唯一的 $S^{-1}R-$ 模同态： $g:S^{-1}M\to S^{-1}N$ 使得

$g(x/1)=f(x)/1$，对任意的 $x\in M$ 都成立。

引理 1.2.4 若 M 是 N 的子模，则由同态 $M\to N$ 诱导的同态 $S^{-1}M\to S^{-1}N$ 是单射的，且 $S^{-1}R-$ 模 $S^{-1}(N/M)$ 与 $S^{-1}N/S^{-1}M$ 同构。

引理 1.2.5 若映射 $f:M\to N$ 是 $R-$ 模同态，S 为 R 中的乘法闭子集，则映射 $S^{-1}f:S^{-1}M\to S^{-1}N,\ m/s\to f(m)/s$ 是 $S^{-1}R-$ 模同态，且如果 $g:N\to P$ 也是 $R-$ 模同态，则 $S^{-1}(gf)=S^{-1}(g)S^{-1}(f)$。

2. 交换环的局部化

2.1. 交换环的局部化的基本性质

定义 2.1.1 设 R 是环，S 是 R 的非空子集，约定 $1\in S$ 而 $0\notin S$。若 $\forall a,b\in S$，有 $ab\in S$，则称 S 是 R 的乘法集。

定义 2.1.2 设 S 是 R 的乘法集，则可以定义剩余类 $\frac{R\times S}{\sim}$，其中 $(a_1,s_1)\sim(a_2,s_2)\Leftrightarrow\exists s\in S$，使得 $s(s_2a_1-s_1a_2)=0$。我们把等价类 $[(a,s)]$ 记为 $\frac{a}{s}$，于是 $\frac{R\times S}{\sim}=\left\{\frac{a}{s}\middle| a\in A,s\in S\right\}$，其中的形式分数满足约分原理。然后可以在 $\frac{R\times S}{\sim}$ 上定义加法和乘法：

$$\frac{a_1}{s_1}+\frac{a_2}{s_2}=\frac{a_1s_2+a_2s_1}{s_1s_2}$$

$$\frac{a_1}{s_1}\cdot\frac{a_2}{s_2}=\frac{a_1a_2}{s_1s_2}$$

于是 $\left(\frac{R\times S}{\sim},+,\cdot\right)$ 构成一个环，称为 R 对 S 的局部化环，记为 $S^{-1}R$。

2.2. 交换整环的局部化性质

定理 2.2.1 **(嵌入定理)**设 A 是整环，S 是 A 的乘法集，则映射 $i:\begin{matrix}A\to S^{-1}A\\ a\mapsto\frac{a}{1}\end{matrix}$ 是单射。

证明：设 $\frac{a}{s}=0=\frac{0}{1}$，则存在 $t\in S$，使得 $ta=t(a\cdot1-s\cdot0)=0$。而 $0\notin S$，所以 $t\neq0$，只能是 $a=0$，所以 $\ker(i)=0$，即 i 是单射。证毕。

设 S 是 A 的非零因子集合，即 $S=\{a\in A|b\neq0\Rightarrow ab=0\}$，则称局部化 $S^{-1}A$ 是 A 的分数环。当 A 是整环时，这就是我们熟知的分数域。

命题 2.2.1 设 A 是整环，F 是 A 的分数环，则 F 是域。

证明：设 $\frac{a}{s}\in F-0$，由嵌入定理可知 $a\neq0$，所以 a 不是零因子，即 $a\in S$，而 $\frac{s}{a}\cdot\frac{a}{s}=\frac{a}{s}\cdot\frac{s}{a}=1$，所以 $\frac{a}{s}$ 可逆，即 F 是域。证毕。

定理 2.2.2 设 A,B 是环，S 是 A 的乘法集，$f:A\to B$ 是环同态，且满足 $f(S)\subset B$。则存在唯一的环同态 $g:S^{-1}A\to B$，使得 $g\left(\frac{a}{1}\right)=f(a)$。

证明：对 $\frac{a}{s}\in S^{-1}A$，取 $g\left(\frac{a}{s}\right)=\frac{f(a)}{f(s)}$，容易验证取法唯一，且 $g\left(\frac{a}{1}\right)=\frac{f(a)}{f(1)}=f(a)$。又

$g\left(\frac{a}{s}\cdot\frac{b}{t}\right)=\frac{f(ab)}{f(st)}=\frac{f(a)f(b)}{f(s)f(t)}=g\left(\frac{a}{s}\right)\cdot g\left(\frac{b}{t}\right)$，

所以 g 是同态。唯一性是显然的。证毕。

2.3. 交换整环的局部化例子

推论 2.3.1 设 A 是环，S 是非零因子集合，$K=S^{-1}A$ 是分数环。如果 $T\subset S$ 也是乘法集，则 $T^{-1}A$ 同构于 K 的子环 $L=\left\{\frac{a}{t}\middle|a\in A,t\in T\right\}$。

例 2.3.1 **设** $A=Z,S=Z^{\times}$，则 $S^{-1}A=Q$。又设 $T=\{2k+1|k\in Z\}\subset S$，则 $T^{-1}A=\left\{\frac{n}{m}\middle|m\text{是奇数，}n\in Z\right\}$ 是 Q 的子环。

推论 2.3.2 **设** D 是整环，环 $A\subset D$，K，L 分别是 A,D 的分数域，则 $K\subset L$。

例 2.3.2 **设** $A=C\left[t^2,t^3\right]$，$D=C[t]$，于是 $A\subset D$ 都是整环。取 A,D 的分数域 K,L，则 $C\subset K\subset L\subset C(t)$。而 $t=\frac{t^3}{t^2}\in K$，所以 $(C,t)=C(t)\subset K$，故 $K=L=C(t)$。

2.4. 交换半环的局部化

设 R 为有 1 的交换半环，以下简称半环，R 的乘法封闭子集总假定是包含 1 的。设 S 是一乘法封闭子集，在 $R\times S$ 上按如下方式定义一个二元关系：

$$(x,s)\equiv(y,t)\Leftrightarrow xtu=ysu$$

对某个 $u\in S$ 成立，$\equiv$ 是 $R\times S$ 上的等价关系。用 $S^{-1}R$ 表示 $R\times S$ 按等价关系 $\equiv$ 所作的划分，$x\cdot s$ 表示 (x,s) 所在的等价类[14]。

可按如下方式在 $S^{-1}R$ 上定义加法和乘法

$$a/s+b/t=(at+bs)/st$$
$$(a/s)(b/t)=ab/st$$

则可证明，加法定义合理，即

$$\left.\begin{aligned}a/s=a'/s'\\ b/t=b'/t'\end{aligned}\right\}\Rightarrow(at+bs)/st=(a't'+b's')/s't'$$

由

$$as'u=a'su,\text{对某个}u\in S$$
$$bt'v=b'tv,\ \text{对某个}v\in S$$

对第一个式子两边乘以 $tt'v$，第二个式子两边乘以 $ss'u$，再两式相加即得。类似可证明乘法定义合理，且 $S^{-1}R$ 按上述加法和乘法成一个有单位元的交换半环，称 R 为对于 S 的分式半环。

对于半环也可定义同态。并假定同态保持单位元。可以证明 $f(x)=x/1$ 定义了 R 到 $S^{-1}R$ 的半环同态。则这个同态具有如下性质：

命题 2.4.1 设 $g:R\to R'$ 是半环同态，且对任一的 $s\in S$，$g(s)$ 都是 R' 的可逆元，那么存在唯一的一

DOI: 10.12677/orf.2025.152076

个半环同态 $h: S^{-1} \to R'$ 使得 $g = h \cdot f$ 。

3. 交换模的局部化

3.1. 模的局部化定义及性质

与环的局部化类似，设 S 是 A 的乘法集，我们可以讨论 A 上模 V 的局部化：$S^{-1}V \coloneqq S^{-1}A \otimes_A V$，我们有更具体的构造方式[15] [16]。

定义 3.1.1 设 A 是环，S 是 A 的乘法集，V 是 A 的模。定义剩余类 $\frac{V \times S}{\sim}$，其中 $(v_1, s_1) \sim (v_2, s_2) \Leftrightarrow \exists s \in S$，使得 $s(s_2 v_1 - s_1 v_2) = 0$。我们把等价类 $[(v,s)]$ 记为 $\frac{v}{s}$，于是 $\frac{V \times S}{\sim} = \left\{ \frac{v}{s} \middle| v \in V, s \in S \right\}$，其中的形式分数满足约分原理。然后可以在 $\frac{V \times S}{\sim}$ 上定义加法和乘法：

$$\frac{v_1}{s_1} + \frac{v_2}{s_2} = \frac{v_1 s_2 + v_2 s_1}{s_1 s_2}$$

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{v}{t} = \frac{av}{st}$$

于是 $\left(\frac{V \times S}{\sim}, +, \cdot \right)$ 构成一个环，称为 V 对 S 的局部化环，记为 $S^{-1}V$。

性质 3.1.1 设 V 是 A 模，则 $S^{-1}V$ 是 $S^{-1}A$ 模；
性质 3.1.2 **设** $f: U \to V$ 是 A 模的线性变换，则 $S^{-1}f: S^{-1}U \to S^{-1}V$ 是 $S^{-1}A$ 的线性变换；
性质 3.1.3 **设** $f: U \to V$ 和 $g: V \to W$ 都是 A 模的线性变换，则有 $S^{-1}(g \circ f) = S^{-1}g \circ S^{-1}f$；
性质 3.1.4 **设** $U \to V \to W$ 是 A 模的正合列，则 $S^{-1}U \to S^{-1}V \to S^{-1}W$ 也是 $S^{-1}A$ 模的正合列。

3.2. 半模及其同态，商半模

设 R 为半环，M 为一有 0 的加法半群。M 称为半模，若在 R 和 M 之间定义了数乘，满足对 $\forall a, b \in R, m, n \in M$，则

(1) $a \cdot (m + n) = a \cdot m + a \cdot n$；

(2) $(a + b) \cdot m = a \cdot m + a \cdot n$；

(3) $a \cdot (b \cdot m) = (ab) \cdot m$；

(4) $1 \cdot m = m$；

(5) $0 \cdot m = 0$；

(6) $a \cdot 0 = 0$。

设 M, N 是两个半模，可以按明显方式定义半模的同态($R-$线性映射)。特别要求 $f(0) = 0$，半环上的半模范畴的说法自然是成立的。

下面考虑半模如何作商。

M 上的一个二元关系 Λ 称为一个共轭，如果 Λ 是一个等价关系且

$x \Lambda y, x' \wedge y' \Rightarrow x + x' \wedge y + y', \ \forall x, y, x', y' \in M$，

$x \wedge y \Rightarrow ax \wedge ay, \ \forall x, y \in M, a \in R$

记 M/Λ 为由 Λ 所划分的等价类的集合。$\overline{x}$ 记 $x \in M$ 所在的等价类，则易证 M/Λ 按如下的加法和数乘而成为一半模：

$\overline{x}+\overline{y}=\overline{x+y}, a\overline{x}=\overline{ax},$

且 $f: x \mapsto \overline{x}$ 确定 $M \to M/\Lambda$ 的 R 半模同态，称为 M/Λ 为 M 对共轭 Λ 的商模。

命题 3.2.1 设 $f': M \to n$ 为一 R 半模同态，如果 $\forall x, y, x \wedge y \Rightarrow f'(x) \wedge f'(y)$，则存在唯一的 R 半模同态 h 使 $f' = h \cdot f$ 。

证明：唯一性：$\forall \overline{x} \in M/\Lambda, h(\overline{x}) = h(f(x)) = f'(x)$，由已知，$\forall y \in \overline{x}$ 即 $y \wedge x$，有 $f'(x) = f'(y)$ 故 $f'(x)$ 由 $\overline{x}$ 唯一确定，从而唯一确定 h 。

存在性：按 h 的定义，只需要验证 h 为半模同态。

$$h(a\overline{x}+b\overline{y}) = h(\overline{ax+by}) = f'(ax+by) = af'(x)+bf'(y) = ah(\overline{x})+bh(\overline{y})$$

证毕。

设 $f: M \to N$ 为一 R 半模同态，则由 f 可确定 M 上的如下二元关系 Ξ：

$$x \Xi y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

可以证明，Ξ 为 M 上的一个共轭，记为 $\ker f$ 。注意，这里 $\ker f$ 是定义的一个二元关系，即 $M \times N$ 的一个子集，而不是像模那样的情形是 M 的一个子半模。

命题 3.2.2 设 $f: M \to N$ 为一 R 半模同态，则按 $f: \overline{x} \to f(x)$ 确定的 $f: M/\ker f \to N$ 是 R 半模同构；反之，设 Δ 为 M 上的一个共轭，$g: M \to M/\Delta$ 为自然商映射，则 $\ker f = \Delta$ 。

证明：按照命题 3.2.1，只需证对 (N, f) 关于 $\ker f$ 具有命题 3.2.1 中的性质，这可根据 f 为满映射以及 $\ker f$ 的定义直接验证。根据 M/Δ 定义，显然可证明 $\ker f = \Delta$ 。

4. 局部化的一些推广

4.1. 理想的局部化

定理 4.1.1 (1)设 S 是 A 的乘法集，则

$$\Phi: \{I \mid I\text{是}A\text{ 的理想，} I \cap S = \varnothing\} \underset{J \cap A \leftarrow J}{\overset{I \mapsto IS^{-1}A}{\longrightarrow}} \{J \mid J\text{是}S^{-1}A\text{ 的理想}\}$$

给出了 A 与 $S^{-1}A$ 的理想之间的一一对应。

(2)特别地，Φ 给出了 A 与 $S^{-1}A$ 的素理想之间的一一对应。

同余和局部化都是简化环的重要方法，并且它们都保持理想和素理想的对应关系。不仅如此，它们的作用正好互补。同余相当于挖掉了理想中的信息，保留理想以外的信息；而局部化则是挖掉理想以外的信息，只保留这个理想局部的信息[17]。

下面的命题说明，局部化和同余操作可以交换顺序：

命题 4.1.2 设 S 是 A 的乘法集，I是A 的理想，$\pi: A \to \dfrac{A}{I}$ 是分类映射，则有 $\pi(S)^{-1}\left(\dfrac{A}{I}\right) = \dfrac{S^{-1}A}{S^{-1}I}$

证明：设

$$\varphi: \begin{array}{l} \pi(S)^{-1}\left(\dfrac{A}{I}\right) \to \dfrac{S^{-1}A}{S^{-1}I} \\ \dfrac{\pi(a)}{\pi(s)} \mapsto \dfrac{a}{s} + S^{-1}I \end{array}$$

则 φ 是唯一确定的满射。又因为

$$\begin{aligned}
&\varphi\left(\frac{\pi(a)}{\pi(s)}\right)\varphi\left(\frac{\pi(b)}{\pi(t)}\right)\\
&=\left(\frac{a}{s}+S^{-1}I\right)\left(\frac{b}{t}+S^{-1}I\right)\\
&=\frac{ab}{st}+S^{-1}I \qquad ,\\
&=\varphi\left(\frac{\pi(a)\pi(b)}{\pi(s)\pi(t)}\right)
\end{aligned}$$

所以 π 是满同态。最后，注意到

$$\begin{aligned}
\ker(\varphi)&=\left\{\frac{a+I}{s+I}\middle|\frac{a}{s}\in S^{-1}I\right\}\\
&=\left\{\frac{a+I}{s+I}\middle|\exists b\in I,t\in S:\frac{a}{s}=\frac{b}{t}\right\}\\
&=\left\{\frac{a+I}{s+I}\middle|\exists t\in S:ta\in I\right\}\\
&=\frac{0+I}{1+I}=0
\end{aligned}$$

所以 φ 是同构，即 $\pi(S)^{-1}\left(\frac{A}{I}\right)\cong\frac{S^{-1}A}{S^{-1}I}$。证毕。

4.2. 乘法封闭集的伪局部化

本部分总设 R 是具有单位元的交换环，$T=T(R)$ 是 R 的完全商环，即 R 关于所有非零因子的局部化或分式环。于是 $T(R)$ 中的元素可以表示为 $\frac{r}{s},r\in R$，s 是 R 的非零因子，R 的非零因子我们也叫做正则元。总假设 $T(R)\neq R$，从而存在非平凡的正则元，即存在不是单位的正则元素。

定义 4.2.1 设 R 只有一个极大的正则真理想，则 R 称为伪局部环[18]。

命题 4.2.2 设 R 是伪局部环，m 是 R 的唯一极大的正则真理想，则 m 是 R 的极大理想，且不在 m 中的非零因子是单位。

证明：设 p 是包含 m 的极大理想，则 p 是正则理想。故 $p=m$，即 m 是 R 的极大理想。若 $s\in R-m$，其中 s 不是零因子。若 s 不是单位，则 (s) 是 R 的真理想，于是存在 R 的极大理想 p，使得 $s\in p$，于是 $p\neq m$。矛盾，即得证。

命题 4.2.3 设 R 是伪局部环，m 是 R 的唯一极大的正则真理想，则对任何 $s\in R-m$ 及任何 $a\in m$，a 是非零因子，有 $(a,s)=R$。

证明：由 (a,s) 是正则理想，且 $(a,s)\not\subset m$，即得证。

定理 4.2.4 设 R 是伪局部环，m 是 R 的唯一极大的正则真理想，则 $R=R_{[m]}$。

证明：任意的 $u=\frac{a}{b}\in R_{[m]}$，其中 $a,b\in R$，b 是 R 的非零因子。若 $b\notin m$，则 b 是单位，故 $u\in R$；若 $b\in m$，取 $s\in R-m$，使得 $s\cdot u\in R$，又 $b\cdot u=a\in R$，我们有 $(b,s)\cdot u\subseteq R$。由上述命题，有 $u\in R$，故 $R=R_{[m]}$。

参考文献

[1] Anderson, F.W. and Fuller, K.R. (1992) Rings and Categories of Modules. 2nd Edition, Graduate Texts in Mathematics,

Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4418-9

[2] Pan, Y. and Wei, J.C. (2015) Several Equivalent Characterizations of CN Rings. *The College Mathematics Journal*, **31**, 99-104.

[3] Pinter-Lucke, J. (2007) Commutativity Conditions for Rings: 1950-2005. *Expositiones Mathematicae*, **25**, 165-174. https://doi.org/10.1016/j.exmath.2006.07.001

[4] Abdollahi, A., Bell, H.E. and Klein, A.A. (2007) On Commutativity and Centrality in Infinite Rings. *Communications in Algebra*, **35**, 1323-1332. https://doi.org/10.1080/00927870601142397

[5] Andima, S. and Pajoohesh, H. (2010) Commutativity of Rings with Derivations. *Acta Mathematica Hungarica*, **128**, 1-14. https://doi.org/10.1007/s10474-010-9092-z

[6] Ashraf, M. and Wani, B.A. (2019) On Commutativity of Rings and Banach Algebras with Generalized Derivations. *Advances in Pure and Applied Mathematics*, **10**, 155-163. https://doi.org/10.1515/apam-2017-0024

[7] Ligh, S. and Richoux, A. (1977) A Commutativity Theorem for Rings. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **16**, 75-77. https://doi.org/10.1017/s0004972700023029

[8] Wei, J. (2014) Some Notes on *CN* Rings. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **38**, 1589-1599. https://doi.org/10.1007/s40840-014-0086-9

[9] Wei, J. and Fan, Z. (2015) A Generalization of Commutativity Theorem for Rings. *Annals of the Alexandru Ioan Cuza University-Mathematics*, **61**, 97-100. https://doi.org/10.2478/aicu-2013-0048

[10] Yang, Q., Chu, M.Q. and Lu, E.W. (2015) A Note of Commutativity Theorem of Rings. *Journal of Nantong University* (*Natural Science Edition*), **14**, 69-70, 90.

[11] Du, Q.L. and Sun, J.H. (2014) Right Singular Ideals and Commutativity Theorems for Rings. *Journal of Yangzhou University* (*Natural Science Edition*), **17**, 5-7.

[12] Bell, H.E. (2017) Commutativity of Rings with Identities on Subsets. *Asian-European Journal of Mathematics*, **10**, Article 1750018. https://doi.org/10.1142/s1793557117500188

[13] 冯克勤. 交换代数基础[M]. 北京: 高等教育出版社, 1986.

[14] 严质彬, 游宏. 交换半环的局部化[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2001, 33(6): 732-735.

[15] 王秋丽, 苏业芹. 交换模的广义局部化[J]. 商丘师范学院学报, 2012, 28(12): 19-22.

[16] 苏业芹, 王秋丽. 模的广义局部化及其性质[J]. 商丘师范学院学报, 2013, 29(9): 22-24.

[17] 刘树芳, 唐高华. 交换环的拟准素理想和理想的拟准素分解[J]. 广西师范学院学报(自然科学版), 2007, 24(2): 19-24.

[18] 庞佳. 乘法封闭集的伪局部化与 PVMR 的刻画[D]: [硕士学位论文]. 成都: 四川师范大学, 2009.