Operations Research and Fuzziology 运筹与模糊学, 2025, 15(3), 279-292
Published Online June 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/orf
https://doi.org/10.12677/orf.2025.153160

基于不确定指数O-U模型的一篮子期权定价研究

程　铄

南京林业大学经济管理学院，江苏　南京

收稿日期：2025年4月5日；录用日期：2025年6月4日；发布日期：2025年6月11日

摘　要

一篮子期权是价值取决于一组资产平均价格或加权平均价格的新型期权。文章首先假设标的股票服从不确定指数O-U过程，利率服从不确定均值回归过程，提出一种新型不确定股票模型。其次，推导出该模型下一篮子看涨期权与看跌期权的定价公式，并设计一系列的数值算法计算期权价格。最后，开展数值实验研究期权价格关于参数的敏感度。本文的研究结果拓展了期权定价的理论范式，为衍生证券定价提供了一种新的研究视角。

关键词

不确定理论，不确定微分方程，指数O-U过程，一篮子期权

A Study of Basket Option Pricing Based on Uncertainty Index O-U Modeling

Shuo Cheng

School of Economics and Management, Nanjing Forestry University, Nanjing Jiangsu

Received: Apr. 5th, 2025; accepted: Jun. 4th, 2025; published: Jun. 11th, 2025

Abstract

Basket options are new types of options whose value depends on the average or weighted average price of a group of assets. The article first proposes a novel uncertain stock model by assuming that the underlying stock obeys an uncertain exponential O-U process and the interest rate obeys an uncertain mean reversion process. Second, the pricing formulas for a basket of call and put options under this model are derived, and a series of numerical algorithms are designed to calculate the option prices. Finally, numerical experiments are conducted to study the sensitivity of option prices

文章引用: 程铄. 基于不确定指数 O-U 模型的一篮子期权定价研究[J]. 运筹与模糊学, 2025, 15(3): 279-292.
DOI: 10.12677/orf.2025.153160

with respect to the parameters. The results of this paper expand the theoretical paradigm of option pricing and provide a new research perspective on the pricing of derivative securities.

Keywords

Uncertainty Theory, Uncertain Differential Equations, Exponential O-U Process, Basket of Options

1. 引言

衍生证券对风险管理和套期保值意义重大，是国际金融市场关键交易产品。随着经济发展，投资者需求多样，促使金融市场产生远期合约、互换等新型衍生产品。其中，金融期权是衍生证券的典型代表，其标的资产有股票、股票指数、外汇等。一篮子期权作为多资产期权，标的资产组合由跨资产类别的证券、商品及货币构成。相比单期权资产，它能分散化降低风险溢价，被广泛用于对冲组合风险、优化投资策略及结构化产品设计，其多因子风险分散特性在机构投资者的跨市场风险管理中地位重要。

期权在金融市场作用关键，其定价研究聚焦于模型选择与方法合理性。不同于单一资产期权，一篮子期权的定价面临更复杂的挑战，尤其在多资产相关性和高维度计算方面。目前，研究一篮子期权定价的常用方法有矩匹配法、两步骤分段逼近法、深度学习法、特征函数法和鞅定价法。Jarrow 和 Rudd [1]首次将 Edgeworth 展式方法引入金融领域，用低阶矩代替多维对数正态分布，得到一篮子期权定价的封闭解。邱红[2]引入 Lévy 过程，考虑金融市场跳跃特征，采用三阶矩匹配方法推导出一篮子期权定价公式。Li 和 Wu [3]对带均值回复价格的多资产一篮子期权定价，提出一种在精确度和计算时间上都很有效的简单方法，降低了维数。李方琦[4]假设标的资产价格服从 Heston 模型，运用深度学习法探索欧式一篮子期权定价。Lord [5]提出广义快速傅里叶变换(FFT)定价多资产期权，前提是特征函数需提前进行特定假设。杨芮等[6]基于双指数跳跃－扩散过程，利用鞅方法和 Ito 公式讨论欧式一篮子期权定价。

以往基于概率论开展的一篮子期权定价研究，存在一些局限性。现实世界中，概率分布不稳定，与理论分布有偏差。传统随机模型假定标的资产价格服从随机微分方程，但众多研究发现资产价格收益率分布与该方程中的正态性假设不符，且金融资产价格变化并非完全随机。2013 年，Liu [7]提出了若干悖论，从理论上证明了运用随机微分方程来模拟资产价格变化的不合理性。

行为金融学的发展凸显了信度在金融决策中的重要性。刘宝碇教授提出的不确定理论[8]，凭借规范性、对偶性等公理，为不确定性问题提供了数学基础，已应用于不确定控制[9]、规划[10]和统计[11]等领域。2009 年，Liu [12]首次将不确定理论引入金融领域，不同于传统的随机金融模型，Liu [12]假定标的股票价格服从不确定微分方程，首次提出不确定股票模型，并给出了相应的欧式期权定价公式。随后，大量的不确定股票模型被相继提出，如具有均值回复性质的不确定模型(Peng-Yao [13])、带跳的不确定模型(Yu [14])、具有浮动利率的不确定模型(Sun 等[15])、不确定指数 O-U 模型(周启航[16])等。有关不确定金融的最新研究，可见文献[17]-[20]。

根据上述文献可发现，不确定理论下的期权定价研究大多集中于单一资产模型，而对多资产期权的定价研究尚处于起步阶段。鉴于此，本文将基于不确定理论框架，聚焦不确定指数 O-U 模型下的欧式一篮子期权定价问题。文章结构如下：第二章介绍不确定理论核心概念及浮动利率不确定指数 O-U 模型；

第三章推导欧式一篮子看涨与看跌期权定价公式；第四章通过算法求解期权价格数值解并开展敏感性实验；第五章总结研究成果并展望未来方向。

2. 预备知识

2.1. 不确定变量

定义 2.1 (Liu [8]) 一个不确定变量 ξ 定义为一个从不确定空间 (Γ, L, M) 映射到实数集的可测函数，即对任意的 Borel 集 B，集合(1)是一个事件。

$$\{\xi \in B\} = \{\gamma \in \Gamma \mid \xi(\gamma) \in B\} \tag{1}$$

定义 2.2 (Liu [8]) 设 ξ 是一个不确定变量，那么它的期望值定义为

$$E[\xi] = \int_0^{+\infty} M\{\xi \ge x\} \mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{0} M\{\xi \le x\} \mathrm{d}x, \tag{2}$$

其中等式右边的两个积分至少一个是有限的。

定理 2.1 (Liu [21]) 如果不确定变量 ξ 具有正则不确定分布 $\Phi(x)$，那么

$$E[\xi] = \int_0^1 \Phi^{-1}(\alpha) \mathrm{d}\alpha. \tag{3}$$

定义 2.3 (Liu [22]) 假设 (Γ, L, M) 是不确定空间，T 是全序集。如果存在一个从 $T \times (\Gamma, L, M)$ 到实数集 $\Re$ 的集函数 $X_t(\gamma)$，使得在任何时刻 t 对于任意的 Borel 集 B，$\{X_t \in B\}$ 都是一个事件，那么我们称 X_t 是一个不确定过程。

2.2. 不确定微分方程

定义 2.4 (Liu [12]) 如果一个不确定过程 C_t 满足以下条件：

(i) $C_0 = 0$ 且几乎所有的样本轨道是 Lipschitz 连续的；

(ii) C_t 具有独立平稳增量；

(iii) 每一个增量 $C_{s+t} - C_s$ 是期望值为 0，方差为 t^2 的正态不确定变量，其不确定分布为

$$\Phi_t(x) = \left(1 + \exp\left(\frac{-\pi x}{\sqrt{3}t}\right)\right)^{-1}, \ x \in R \tag{4}$$

那么 C_t 则被称为一个典范 Liu 过程。

定义 2.5 (Liu [22]) 假设 C_t 是一个典范 Liu 过程，f 和 g 是两个给定函数，则称(5)为不确定微分方程

$$\mathrm{d}X_t = f(t, X_t)\mathrm{d}t + g(t, X_t)\mathrm{d}C_t \tag{5}$$

定义 2.6 (Yao 和 Chen [23]) 假设 α 是 0 和 1 之间的一个实数 $(0 < \alpha < 1)$，不确定微分方程(5)称作具有一条 α 轨道 X_t^α，如果 X_t^α 是对应常微分方程(6)的解，其中 $\Phi^{-1}(\alpha)$ 是逆标准正态不确定分布，即

$$\mathrm{d}X_t^\alpha = f(t, X_t^\alpha)\mathrm{d}t + \left|g(t, X_t^\alpha)\right| \Phi^{-1}(\alpha)\mathrm{d}t \tag{6}$$

$$\Phi^{-1}(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \frac{\alpha}{1-\alpha}. \tag{7}$$

定理 2.2 (Yao 和 Chen [23]) 假设 X_t 和 X_t^α 分别是不确定微分方程(5)的解和 α 轨道，那么有

$$M\{X_t \le X_t^\alpha, \forall t\} = \alpha, \tag{8}$$

$$M\left\{X_t > X_t^{\alpha}, \forall t\right\} = 1-\alpha. \tag{9}$$

此外，方程解 X_t 的逆不确定分布为

$$\Psi_t^{-1}(\alpha) = X_t^{\alpha}. \tag{10}$$

定理 2.3 (Yao [24]) 假设 $X_{1t}, X_{2t}, \cdots, X_{nt}$ 分别是多个不确定微分方程的解且相互独立。如果 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 关于 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 严格单调递增，且关于 $x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots, x_n$ 严格单调递减，那么不确定变量 $X_t = f(X_{1t}, X_{2t}, \cdots, X_{nt})$ 有逆不确定分布

$$X_t^{\alpha} = f\left(X_{1t}^{\alpha}, \cdots, X_{mt}^{\alpha}, X_{m+1,t}^{1-\alpha}, \cdots, X_{nt}^{1-\alpha}\right). \tag{11}$$

2.3. 不确定指数 O-U 模型

在实际金融市场中，股票价格通常呈现均值回归特性，围绕长期均衡水平波动。同时，利率受宏观经济、政策调控及市场预期等多重因素影响，表现出显著的时变特征。基于此，刘兆鹏等[25]假设标的股票价格服从不确定指数 O-U 过程，利率服从均值回归过程，提出了一种非线性的不确定指数 O-U 模型：

$$\begin{cases} \mathrm{d}r_t = (b - ar_t)\mathrm{d}t + \sigma_1 \mathrm{d}C_{1t} \\ \mathrm{d}S_t = \mu(1 - c\ln S_t)S_t\mathrm{d}t + \sigma_2 S_t \mathrm{d}C_{2t} \end{cases} \tag{12}$$

其中，r_t 和 S_t 分别表示 t 时刻的利率和股票价格，$a, b, c, \mu, \sigma_1, \sigma_2$ 均为非负常数，C_{1t} 和 C_{2t} 是相互独立的典范 Liu 过程。在模型(12)中，股票价格遵循指数 O-U 过程，避免了传统对数正态分布中股票价格随时间单向变化的限制，而利率服从均值回归模型，可以反映出利率围绕均值波动的特征，因此不确定模型(12)更符合实际金融市场。

3. 欧式一篮子期权定价

3.1. 多资产不确定指数 O-U 模型

基于上述模型(12)，本文假设一篮子内标的股票均服从不确定指数 O-U 过程，利率服从均值回归过程，提出一种多资产不确定指数 O-U 模型，具体如下：

$$\begin{cases} \mathrm{d}r_t = (b - ar_t)\mathrm{d}t + \sigma_1 \mathrm{d}C_{1t} \\ \mathrm{d}S_{it} = \mu(1 - c\ln S_{it})S_{it}\mathrm{d}t + \sigma_2 S_{it} \mathrm{d}C_{it} \end{cases} \tag{13}$$

其中，r_t 和 S_{it} 分别表示 t 时刻的利率和第 i 支股票价格，w_i 为第 i 支股票的权重，且满足 $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$，C_{1t} 和 C_{it} 是相互独立的典范 Liu 过程。

3.2. 一篮子看涨期权

不同于标准期权，一篮子看涨期权赋予持有者以执行价格购买一篮子股票的权利，但无义务。假定 i 支股票价格 $S_i(t)$ 均遵循不确定指数 O-U 过程，利率服从不确定均值回归过程，w_i 为第 i 支股票的权重，且具有固定执行价 K 和到期时间 T。投资者在初始时刻 $t=0$ 时以价格 f_c 购买这份期权，并在到期时间 T 时获得收益 $\left(\sum_{i=1}^{n} w_i S_i(T) - K\right)^+$。考虑到货币的时间价值，所获收益当前的价值为

$$\exp\left(-\int_0^T r_t \mathrm{d}t\right)\left(\sum_{i=1}^{n} w_i S_i(T) - K\right)^+.$$

因此，投资者在初始时刻$t=0$时的净收益为

$$-f_c+\exp\left(-\int_0^T r_t\mathrm{d}t\right)\left(\sum_{i=1}^n w_iS_i(T)-K\right)^+.$$

另一方面，银行在初始时刻$t=0$时以价格f_c售出这份期权，并在到期时间T时支付$\left(\sum_{i=1}^n w_iS_i(T)-K\right)^+$。因此，银行在初始时刻$t=0$时的净收益为

$$f_c-\exp\left(-\int_0^T r_t\mathrm{d}t\right)\left(\sum_{i=1}^n w_iS_i(T)-K\right)^+.$$

根据公平价格的原则，买卖双方应该具有相同的期望净收益，即

$$-f_c+E\left[\exp\left(-\int_0^T r_t\mathrm{d}t\right)\left(\sum_{i=1}^n w_iS_i(T)-K\right)^+\right]=f_c-E\left[\exp\left(-\int_0^T r_t\mathrm{d}t\right)\left(\sum_{i=1}^n w_iS_i(T)-K\right)^+\right].$$

定义 3.1 假定一份欧式一篮子看涨期权具有固定执行价K和到期时间T，那么这个一篮子看涨期权的价格是

$$f_c=E\left[\exp\left(-\int_0^T r_t\mathrm{d}t\right)\left(\sum_{i=1}^n w_iS_i(T)-K\right)^+\right]. \tag{14}$$

定理 3.1 假定一份欧式一篮子看涨期权在不确定指数 O-U 模型(13)下具有固定执行价K和到期时间T，那么这个一篮子看涨期权的价格是

$$f_c=\int_0^1\exp\left(-\int_0^T r_t^{1-\alpha}\mathrm{d}t\right)\left(\sum_{i=1}^n w_iS_{iT}^{\alpha}-K\right)^+\mathrm{d}\alpha, \tag{15}$$

其中，$r_t^{1-\alpha}=r_0\exp(-at)+\left(\frac{b}{a}+\frac{\sigma_1\sqrt{3}}{a\pi}\ln\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)(1-\exp(-at))$,

$$S_{iT}^{\alpha}=\exp\left(\exp(-\mu cT)\ln S_{i0}+(1-\exp(-\mu cT))\left(\frac{1}{c}+\frac{\sqrt{3}\sigma_2}{\mu c\pi}\ln\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\right).$$

证明：根据 Yao 和 Chen [23]，可得到不确定指数 O-U 过程的α-路径满足下列方程

$$\mathrm{d}S_t^{\alpha}=\mu\left(1-c\ln S_t^{\alpha}\right)S_t^{\alpha}\mathrm{d}t+\sigma_2S_t^{\alpha}\Phi^{-1}(t)\mathrm{d}t. \tag{16}$$

对微分方程(16)进行变换，得到

$$\mathrm{d}\ln S_t^{\alpha}=\left(\mu+\frac{\sigma\sqrt{3}}{\pi}\ln\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\mathrm{d}t-\mu c\ln S_t^{\alpha}\mathrm{d}t.$$

对上述方程进一步计算，能够得到

$$S_t^{\alpha}=\exp\left(\exp(-\mu ct)\ln S_0+(1-\exp(-\mu ct))\left(\frac{1}{c}+\frac{\sqrt{3}\sigma_2}{\mu c\pi}\ln\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\right).$$

从而，我们得知第i支股票价格$S_i(t)$的逆不确定分布为

$$\Psi_{it}^{-1}(\alpha)=S_{it}^{\alpha}=\exp\left(\exp(-\mu ct)\ln S_{i0}+(1-\exp(-\mu ct))\left(\frac{1}{c}+\frac{\sqrt{3}\sigma_2}{\mu c\pi}\ln\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\right). \tag{17}$$

基于定理 2.2，我们能够得到利率 r_t 的α-路径满足下列方程

$$\mathrm{d}r_t^\alpha = \left(b - ar_t^\alpha\right)\mathrm{d}t + \sigma_1\Phi^{-1}\left(t\right)\mathrm{d}t. \tag{18}$$

通过对上述方程(18)进一步计算，可得到

$$r_t^\alpha = r_0\exp\left(-at\right) + \left(\frac{b}{a} + \frac{\sigma_1\sqrt{3}}{a\pi}\ln\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\left(1-\exp\left(-at\right)\right).$$

从而，我们获得利率 r_t 的逆不确定分布为

$$\varphi^{-1}\left(\alpha\right) = r_t^\alpha = r_0\exp\left(-at\right) + \left(\frac{b}{a} + \frac{\sigma_1\sqrt{3}}{a\pi}\ln\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\left(1-\exp\left(-at\right)\right). \tag{19}$$

根据定义 3.1 和定理 2.3，我们最终得到欧式一篮子看涨期权的定价公式

$$\begin{aligned} f_c &= E\left[\exp\left(-\int_0^T r_t\mathrm{d}t\right)\left(\sum_{i=1}^n w_iS_i\left(T\right)-K\right)^+\right] = \int_0^1 \exp\left(-\int_0^T \varphi^{-1}\left(1-\alpha\right)\mathrm{d}t\right)\left(\sum_{i=1}^n w_i\Psi_{iT}^{-1}\left(\alpha\right)-K\right)^+\mathrm{d}\alpha \\ &= \int_0^1 \exp\left(-\int_0^T r_t^{1-\alpha}\mathrm{d}t\right)\left(\sum_{i=1}^n w_iS_{iT}^\alpha - K\right)^+\mathrm{d}\alpha. \end{aligned}$$

定理 3.1 得证。

3.3. 一篮子看跌期权

鉴于一篮子看跌期权的价格与看涨期权类似，为避免重复，此处直接给出看跌期权的价格定义。

定义 3.2 假定一份欧式一篮子看跌期权具有固定执行价 K 和到期时间 T，那么这个一篮子看跌期权的价格是

$$f_p = E\left[\exp\left(-\int_0^T r_t\mathrm{d}t\right)\left(K-\sum_{i=1}^n w_iS_i\left(T\right)\right)^+\right]. \tag{20}$$

定理 3.2 假定一份欧式一篮子看跌期权在不确定指数 O-U 模型(13)下具有固定执行价 K 和到期时间 T，那么这个一篮子看跌期权的价格是

$$f_p = \int_0^1 \exp\left(-\int_0^T r_t^\alpha\mathrm{d}t\right)\left(K-\sum_{i=1}^n w_iS_{iT}^\alpha\right)^+\mathrm{d}\alpha, \tag{21}$$

其中，$r_t^\alpha = r_0\exp\left(-at\right) + \left(\frac{b}{a} + \frac{\sigma_1\sqrt{3}}{a\pi}\ln\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\left(1-\exp\left(-at\right)\right)$,

$$S_{iT}^\alpha = \exp\left(\exp\left(-\mu cT\right)\ln S_{i0} + \left(1-\exp\left(-\mu cT\right)\right)\left(\frac{1}{c} + \frac{\sqrt{3}\sigma_2}{\mu c\pi}\ln\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\right).$$

证明：根据定理 3.1，可得到多资产标的股票价格 $S_i\left(t\right)$ 的逆不确定分布为

$$\Psi_{it}^{-1}\left(\alpha\right) = S_{it}^\alpha = \exp\left(\exp\left(-\mu ct\right)\ln S_{i0} + \left(1-\exp\left(-\mu ct\right)\right)\left(\frac{1}{c} + \frac{\sqrt{3}\sigma_2}{\mu c\pi}\ln\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\right). \tag{22}$$

同样，我们也能获得利率 r_t 的逆不确定分布为

$$\varphi^{-1}\left(\alpha\right) = r_t^\alpha = r_0\exp\left(-at\right) + \left(\frac{b}{a} + \frac{\sigma_1\sqrt{3}}{a\pi}\ln\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\left(1-\exp\left(-at\right)\right). \tag{23}$$

根据定义 3.2 和定理 2.3，我们最终得到欧式一篮子看跌期权的定价公式为

$$f_p = E\left[\exp\left(-\int_0^T r_t \mathrm{d}t\right)\left(K-\sum_{i=1}^n w_i S_i(T)\right)^+\right] = \int_0^1 \exp\left(-\int_0^T \varphi^{-1}(1-\alpha)\mathrm{d}t\right)\left(\sum_{i=1}^n w_i \Psi_{iT}^{-1}(1-\alpha)-K\right)^+ \mathrm{d}\alpha$$

$$= \int_0^1 \exp\left(-\int_0^T \varphi^{-1}(\alpha)\mathrm{d}t\right)\left(\sum_{i=1}^n w_i \Psi_{iT}^{-1}(\alpha)-K\right)^+ \mathrm{d}\alpha = \int_0^1 \exp\left(-\int_0^T r_t^{\alpha}\mathrm{d}t\right)\left(\sum_{i=1}^n w_i S_{iT}^{\alpha}-K\right)^+ \mathrm{d}\alpha.$$

定理 3.2 得证。

4. 数值算例

4.1. 欧式一篮子看涨期权

上文探讨了欧式一篮子看涨期权定价公式，后文将设计数值算法计算其数值解，并经由算例验证期权价格的有效性。

基于定理 3.1，不确定指数 O-U 模型(13)下的一篮子看涨期权数值算法被设计如下。

Step 1: 根据精确程度，设定相应的参数值 N 和 M 。假定 $\alpha_l = l/N$，$t_j = jT/M$， $l=1,\ 2,\cdots,N-1$，$j=1,2,\cdots,M$ 。

Step 2: $l=0.$

Step 3: $l \leftarrow l+1.$

Step 4: $j=0.$

Step 5: $j \leftarrow j+1.$

Step 6: 计算浮动利率

$$r_{t_j}^{1-\alpha_l} = r_0 \exp\left(-at_j\right) + \left(\frac{b}{a} + \frac{\sigma_1\sqrt{3}}{a\pi}\ln\frac{1-\alpha_l}{\alpha_l}\right)\left(1-\exp\left(-at_j\right)\right).$$

如果 $j<M$ ，那么返回 Step 5。

Step 7: 计算贴现率

$$\exp\left(-\int_0^T r_t^{1-\alpha_l}\mathrm{d}t\right) \leftarrow \exp\left(-\frac{T}{M}\sum_{j=1}^M r_{t_j}^{1-\alpha_l}\right).$$

Step 8: 计算在 T 时刻 n 支股票价格与执行价 K 的正偏差

$$\left(\sum_{i=1}^n w_i S_{iT}^{\alpha_l} - K\right)^+ = \max\left(0, \sum_{i=1}^n w_i\left[\exp\left(\exp\left(-\mu cT\right)\ln S_{i0} + \left(1-\exp\left(-\mu cT\right)\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{\sqrt{3}\sigma_2}{\mu c\pi}\ln\frac{\alpha_l}{1-\alpha_l}\right)\right] - K\right).$$

Step 9: 计算

$$\exp\left(-\int_0^T r_t^{1-\alpha_l}\mathrm{d}t\right)\left(\sum_{i=1}^n w_i S_{iT}^{\alpha_l} - K\right)^+.$$

如果 $l<N-1$，那么返回 Step 3。

Step 10：计算欧式一篮子看涨期权价格

$$f_c \leftarrow \frac{1}{N-1}\sum_{l=1}^{N-1}\exp\left(-\int_0^T r_t^{1-\alpha_l}\mathrm{d}t\right)\left(\sum_{i=1}^n w_i S_{iT}^{\alpha_l} - K\right)^+.$$

数值案例 4.1 假设有 10 只股票，初始价格 $S_{i0}=6$. 模型(13)中的参数值分别设定为 $r_0=0.03,$

$a = 0.05, b = 0.1, \sigma_1 = 0.04,\ \mu = \sqrt{3}, c = 1, \sigma_2 = \pi,\ K = 5, T = 1$。那么欧式一篮子看涨期权的价格为 $f_c = 1.5248$。

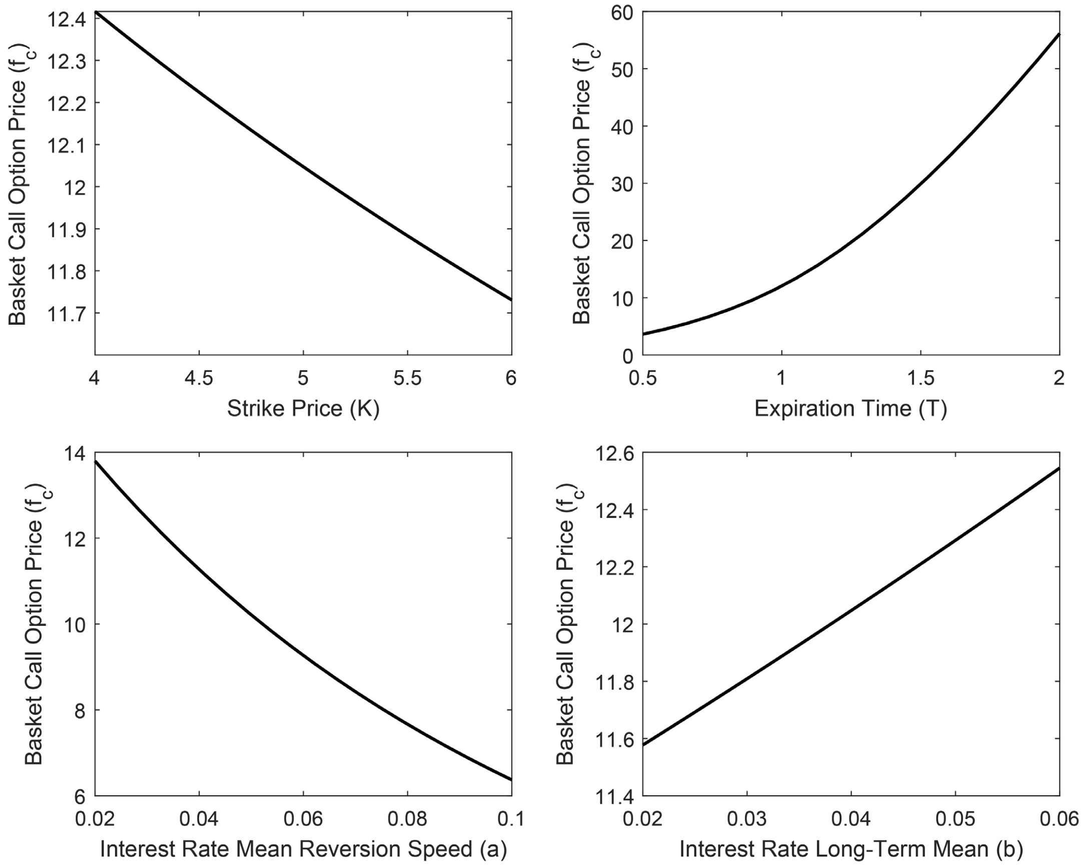

Figure 1. European basket call option prices f_c on parameters K、T、a、b

图 1. 欧式一篮子看涨期权价格 f_c 关于参数 K、T、a、b

基于多资产不确定指数 O-U 模型(13)，我们得到了一篮子看涨期权价格的解析解和数值解。接下来，我们将通过数值实验分别讨论执行价格 K、到期时间 T、利率均值回复速率 a 以及利率波动率 b 对看涨期权价格 f_c 的影响。实验中，研究某一参数时，其余参数保持不变。

结果见图 1，一篮子看涨期权价格 f_c 关于执行价格 K 单调递减。这样的实验结果与金融市场实际情况是一致的：对于一篮子看涨期权而言，执行价格 K 越高，期权持有者在到期时间 T 时获得的收益就越少，从而期权价格 f_c 就会越低； f_c 关于到期时间 T 单调递增。这是因为期权的有效期限越长，投资者获得收益的可能性也就越大，从而一篮子看涨期权的价格也就越高；f_c 关于利率均值回复速率 a 单调递减，这是因为 a 越大，利率波动性越低，贴现因子稳定性增强，从而降低期权价格对利率路径的敏感性；期权价格 f_c 关于利率波动率 b 单调递增，这是由于利率波动率 b 的增加会导致利率路径波动性增强，贴现因子不确定性上升，看涨期权价格略微下降，从而 f_c 关于利率波动率 b 单调递增。

4.2. 欧式一篮子看跌期权

上文探讨了欧式一篮子看跌期权定价公式，后文将设计数值算法求解，并通过算例验证其有效性。

基于定理 3.2，不确定指数 O-U 模型(13)下的一篮子看跌期权数值算法被设计如下。由于前 5 步和看涨期权的数值算法相同，故此处省去。

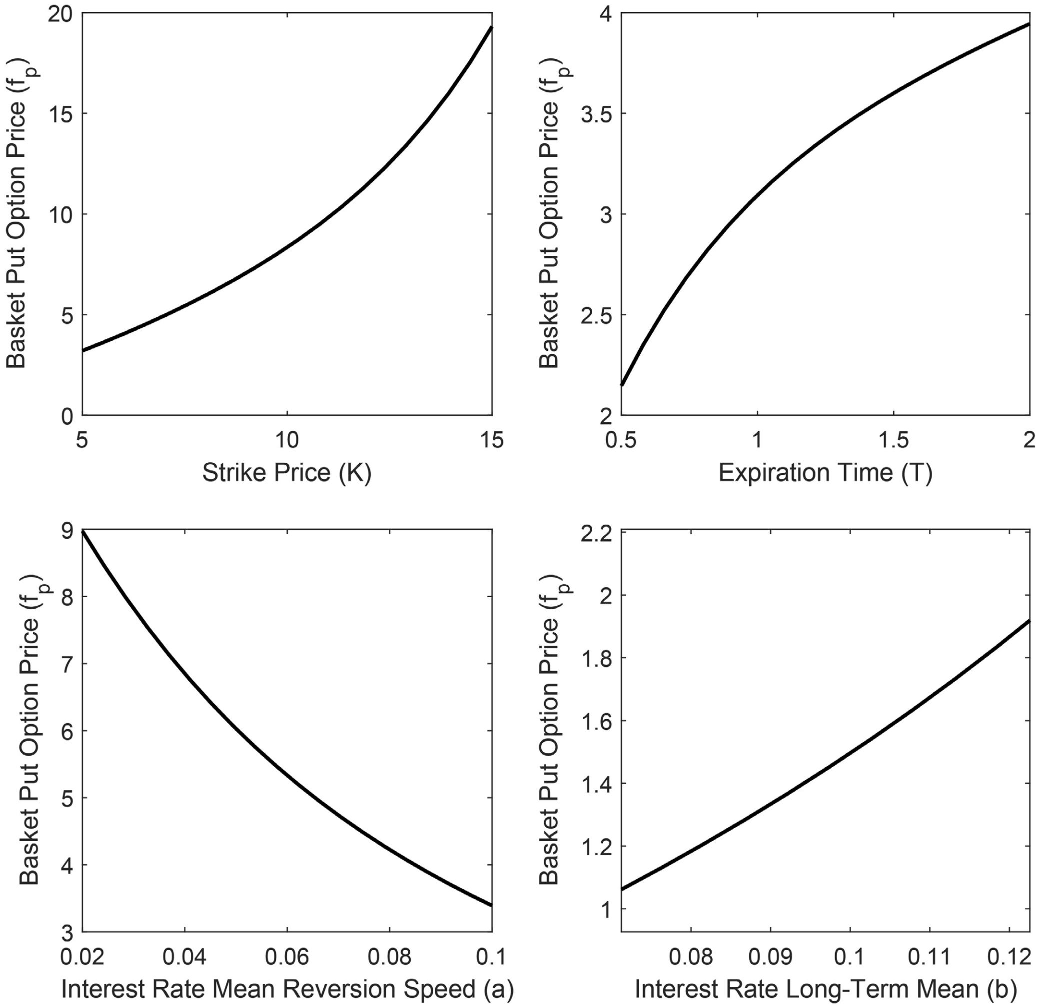

Figure 2. European basket put option prices f_p on parameters K、T、a、b

图 2. 欧式一篮子看跌期权价格 f_p 关于参数 K、T、a、b

Step 6: 计算浮动利率

$$r_{t_j}^{\alpha_l} = r_0 \exp\left(-at_j\right) + \left(\frac{b}{a} + \frac{\sigma_1\sqrt{3}}{a\pi}\ln\frac{\alpha_l}{1-\alpha_l}\right)\left(1-\exp\left(-at_j\right)\right).$$

如果 $j < M$，那么返回 Step 5。

Step 7: 计算贴现率

$$\exp\left(-\int_0^T r_t^{\alpha_l}\,\mathrm{d}t\right) \leftarrow \exp\left(-\frac{T}{M}\sum_{j=1}^{M} r_{t_j}^{\alpha_l}\right).$$

Step 8: 计算在 T 时刻 n 支股票价格与执行价 K 的正偏差

$$\left(K-\sum_{i=1}^{n} w_i S_{iT}^{\alpha_l}\right)^{+} = \max\left(0, K-\sum_{i=1}^{n} w_i\left[\exp\left(\exp\left(-\mu cT\right)\ln S_{i0} + \left(1-\exp\left(-\mu cT\right)\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{\sqrt{3}\sigma_2}{\mu c\pi}\ln\frac{\alpha_l}{1-\alpha_l}\right)\right)\right]\right)$$

Step 9: 计算

$$\exp\left(-\int_0^T r_t^{\alpha_l}\mathrm{d}t\right)\left(K-\sum_{i=1}^n w_i S_{iT}^{\alpha_l}\right)^+.$$

如果 $l<N-1$，那么返回 Step 3。

Step 10：计算欧式一篮子看跌期权价格

$$f_p \leftarrow \frac{1}{N-1}\sum_{l=1}^{N-1}\exp\left(-\int_0^T r_t^{\alpha_l}\mathrm{d}t\right)\left(K-\sum_{i=1}^n w_i S_{iT}^{\alpha_l}\right)^+.$$

数值案例 4.2 假设有 10 只股票，初始价格 $S_{i0}=6$。模型(13)中的参数值分别设定为 $r_0=0.03$, $a=0.05, b=0.1, \sigma_1=0.04$, $\mu=\sqrt{3}, c=1, \sigma_2=\pi$, $K=8, T=1$。那么欧式一篮子看跌期权的价格为 $f_p=0.2675$。

基于多资产不确定指数 O-U 模型(13)，我们得到了一篮子看跌期权价格的解析解和数值解。接下来，我们将通过数值实验分别讨论执行价格 K、到期时间 T、利率均值回复速率 a 以及利率波动率 b 对看跌期权价格 f_p 的影响。实验中，研究某一参数时，其余参数保持不变。

结果见图 2，一篮子看跌期权价格 f_p 关于执行价格 K 和到期时间 T 分别是单调递增的。这样的实验结果与金融市场中的实际情况是一致的：对于一篮子看跌期权而言，执行价格 K 越高，期权持有者在到期时间 T 时获得的收益就越多，从而看跌期权价格 f_p 就越高。此外，当期权有更长的有效期限时，这意味着投资者有更多的可能性去获利，从而一篮子看跌期权的价格也就越高。同时，我们也能发现 f_p 关于利率均值回复速率 a 是单调递减的。当 a 增加时，利率更快回归长期均值，贴现因子波动性降低，导致看跌期权价格下降。而利率波动率 b 的增加提升了一篮子看跌期权的价格，主要原因是贴现因子不确定性增加放大了下行风险，所以一篮子看跌期权价格 f_p 关于利率波动率 b 是单调递增的。

5. 实证分析

本节用残差分析法估算模型参数，检验不确定指数 O-U 模型和传统随机模型对标的资产的拟合优度。因多资产价格服从同一不确定模型，避免重复，仅分析一种资产价格的拟合效果。以 2023 年 1 月 1 日至 12 月 31 日美的股票周平均价(人民币计)为例，数据见表 1。

Table 1. Midea stock price from January 1, 2023 to December 31, 2023 (weekly average)
表 1. 2023 年 1 月 1 日至 2023 年 12 月 31 日的美的股票价格(周平均值)

53.6375	54.5660	57.5520	54.7240	51.3820	51.7320	53.1940	53.9060
52.5660	50.8080	51.6300	52.5240	54.5050	54.8360	56.4340	57.0840
55.9550	55.2960	55.5520	54.9060	51.5600	55.2800	57.4780	57.5567
59.1180	58.6400	57.1280	57.3320	58.5100	58.3540	56.7940	55.2920
54.5560	56.6940	57.1660	56.5960	56.4820	56.0750	55.1140	54.7680
53.0200	53.2820	52.8480	51.4600	52.4540	51.7460	49.8100	50.7860
51.5320	53.5500						

令 $i=1,2,\cdots,50$ 代表 2023 年 1 月 1 日至 2023 年 12 月 31 日期间的周次，股票价格用 $s_1, s_2, \cdots, s_{50}$ 来表示。假定股票价格 S_t 服从以下方程

$$\mathrm{d}S_t=\mu\left(1-c\ln S_t\right)S_t\mathrm{d}t+\sigma S_t\mathrm{d}C_t \tag{24}$$

其中，μ, c, σ 均为未知参数。根据 Liu 和 Liu [26]提出的残差矩估计方法，可得到上述参数值满足下列方程组：

$$\begin{cases} \dfrac{1}{49}\sum_{i=2}^{50}\varepsilon_i(\mu,c,\sigma)=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{49}\sum_{i=2}^{50}\varepsilon_i^2(\mu,c,\sigma)=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{49}\sum_{i=2}^{50}\varepsilon_i^3(\mu,c,\sigma)=\dfrac{1}{4} \end{cases} \tag{25}$$

其中，$\varepsilon_i(\mu,c,\sigma)=\left(1+\exp\left(\dfrac{\mu\pi\left(\left(1-\exp(-\mu c)\right)-c\left(\ln x_i-\ln x_{i-1}\exp(-\mu c)\right)\right)}{\sqrt{3}\sigma\left(1-\exp(-\mu c)\right)}\right)\right)^{-1}$。

通过计算上述方程组(25)，得到参数估计值为 $\mu=0.2334,\ c=0.1466,\ \sigma=0.1657$。

从而，我们得到不确定指数 O-U 模型为

$$\mathrm{d}S_t=0.2334(1-0.1466\ln S_t)S_t\mathrm{d}t+0.1657S_t\mathrm{d}C_t. \tag{26}$$

下面运用不确定假设检验法评估模型(26)能否有效拟合美的股票价格，即检验线性不确定分布 $L(0,1)$ 能否拟合方程(26)的 49 个残差，见图 3。

$$\varepsilon_i(0.2334,\ 0.1466,\ 0.1657),\quad i=2,\cdots,50.$$

假定置信水平 $\alpha=0.05$，那么根据 Ye and Liu [27]提出的不确定假设检验法，其检验为：

$$W=\left\{(\varepsilon_2,\varepsilon_3,\cdots,\varepsilon_{50}):\text{至少存在3个残差}2\le i\le 50\text{满足}\varepsilon_i<0.025\text{或}\varepsilon_i>0.975\right\}.$$

见图 3，所有残差值均落在[0.025, 0.975]范围内，故不确定股票模型(26)能够有效拟合美的股票价格。

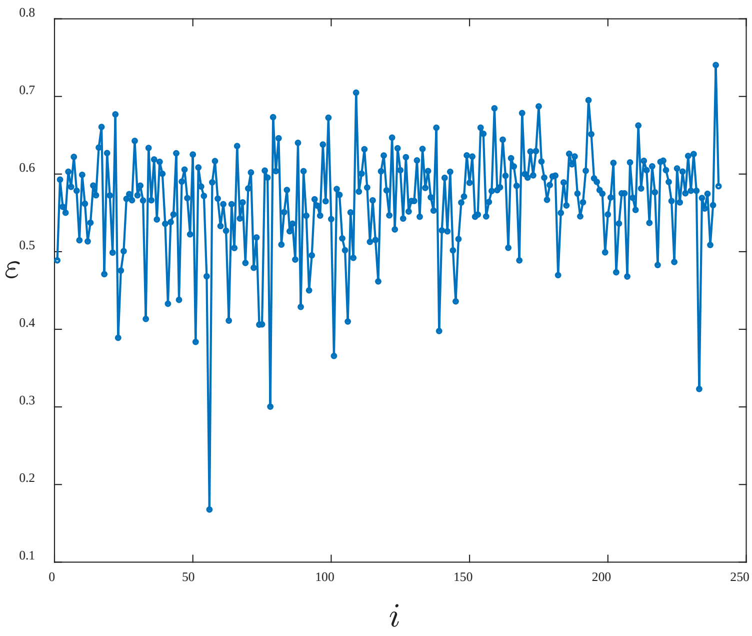

Figure 3. Residuals of the uncertainty index O-U model (26)
图 3. 不确定指数 O-U 模型(26)的残差

为进一步比较不确定模型和传统随机模型的拟合效果，假设股票价格 S_t 服从以下方程

$$\mathrm{d}S_t=\mu S_t\mathrm{d}t+\sigma S_t\mathrm{d}W_t \tag{27}$$

其中，μ 和 σ 均为未知参数，W_t 是维纳过程。对于任意给定的参数 μ,σ，解决更新的随机微分方程

$$\begin{cases} \mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t \\ S_{i-1} = s_{i-1}, \end{cases}$$

并得到正态随机变量 S_i 的概率分布函数为

$$F_i(x) = \frac{1}{n\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{1}{y} \exp\left[-\frac{(\ln y - m_i)^2}{2n^2}\right] \mathrm{d}y, \tag{28}$$

其中，m_i 是期望值，即 $m_i = \ln S_{i-1} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)$，且 n^2 为方差，即 $n^2 = \sigma^2$。

定义随机微分方程(27)的第 i 个残差 $\varepsilon_i(\mu,\sigma) := F_i(y_i)$。

那么 $\varepsilon_i(\mu,\sigma)$ 可被视为均匀概率分布 $U(0,1)$ 的样本。由于未知参数的个数是 2 个，且均匀分布的前两阶矩分别为 $1/2$ 和 $1/3$，我们得到下列方程

$$\begin{cases} \frac{1}{49}\sum_{i=2}^{50} \varepsilon_i(\mu,\sigma) = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{49}\sum_{i=2}^{50} \varepsilon_i^2(\mu,\sigma) = \frac{1}{3} \end{cases}, \tag{29}$$

通过求解上述方程组(29)，可得到参数值为 $\mu = 40.2337,\ \sigma = 7.6214$。

从而，我们得到随机股票模型为

$$\mathrm{d}S_t = 40.2337 S_t \mathrm{d}t + 7.6214 S_t \mathrm{d}W_t. \tag{30}$$

下面评估随机模型(30)能否有效拟合美的股票价格，即检验均匀概率分布 $U(0,1)$ 能否拟合方程(30)的 49 个残差，见图 4。

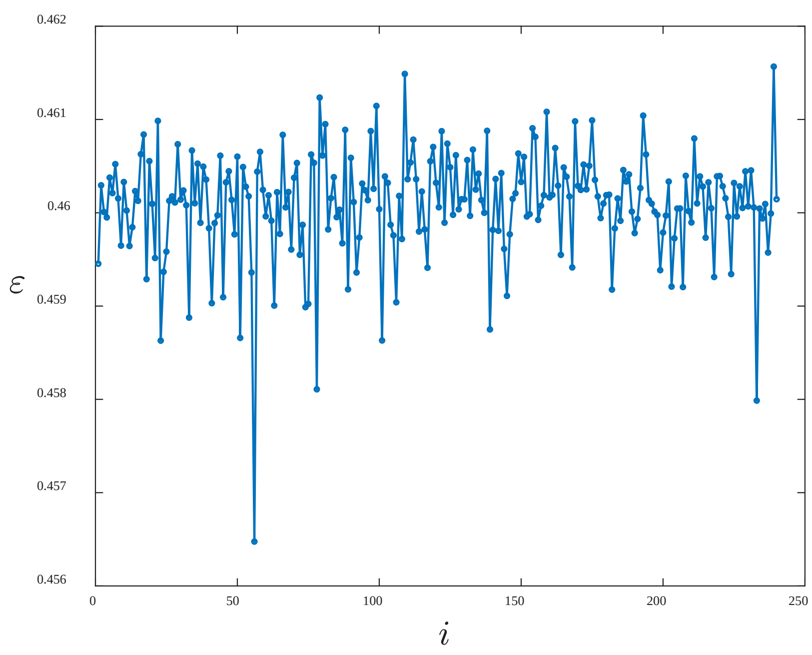

Figure 4. Residuals of the stochastic stock model (30)
图 4. 随机股票模型(30)的残差

$$\varepsilon_i\left(40.2337, 7.6214\right),\ i = 2, \cdots, 50.$$

假定置信水平 $\alpha = 0.05$，通过运用卡方拟合优度检验法，得到 $p = 6.73\mathrm{e}-31 < 0.05$.

这表明随机方程(30)的 49 个残差并不全部服从相同的分布 $U(0,1)$。因此，模型(30)不能有效拟合美的股票价格。基于上述分析，我们能够得到不确定指数 O-U 模型比传统随机模型具有更好的拟合效果。

6. 结论

本研究在不确定理论下针对欧式一篮子期权定价问题，假设股票价格服从不确定指数 O-U 过程，利率遵循不确定均值回归过程，提出多资产不确定模型，推导出欧式一篮子看涨和看跌期权的定价公式与数值算法，并通过算例验证其有效性。实证分析表明，不确定指数 O-U 模型在标的资产拟合方面优于传统随机模型，具有更高的预测精度，该研究成果为金融市场风险管理和投资决策提供了理论和实践指导。

致　谢

本研究受到省级大学生创新创业训练计划项目(项目编号：202310298095Y)的资助，谨此致谢。

基金项目

江苏省省级大学生创新创业训练计划项目(项目编号：202310298095Y)。

参考文献

[1] Jarrow, R. and Rudd, A. (1982) Approximate Option Valuation for Arbitrary Stochastic Processes. *Journal of Financial Economics*, **10**, 347-369. https://doi.org/10.1016/0304-405x(82)90007-1

[2] 邱虹. 基于 Lévy 过程的一篮子期权定价研究[J]. 南华大学学报(社会科学版), 2017, 18(1): 69-73.

[3] Li, X. and Wu, Z. (2008) On an Approximation Method for Pricing a High-Dimensional Basket Option on Assets with Mean-Reverting Prices. *Computers & Operations Research*, **35**, 76-89. https://doi.org/10.1016/j.cor.2006.02.020

[4] 李方琦. 基于深度学习的篮子期权定价数值算法[J]. 山东理工大学学报(自然科学版), 2021, 35(2): 38-42.

[5] Lord, R., Fang, F., Bervoets, F. and Oosterlee, C.W. (2008) A Fast and Accurate FFT-Based Method for Pricing Early-Exercise Options under Lévy Processes. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **30**, 1678-1705. https://doi.org/10.1137/070683878

[6] 杨芮，张艳慧，温伟. 基于双指数跳跃-扩散过程的欧式一篮子期权定价[J]. 江西师范大学学报(自然科学版), 2022, 46(1): 12-17.

[7] Liu, B. (2013) Toward Uncertain Finance Theory. *Journal of Uncertainty Analysis and Applications*, **1**, Article No. 1. https://doi.org/10.1186/2195-5468-1-1

[8] Liu, B. (2007) Uncertainty Theory. 2nd Edition, Springer.

[9] Wang, Z. and Zhu, Y. (2024) LQ Optimal Control of Uncertain Fractional Differential Systems. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, **23**, 577-597. https://doi.org/10.1007/s10700-024-09434-w

[10] Liu, B. and Chen, X. (2015) Uncertain Multiobjective Programming and Uncertain Goal Programming. *Journal of Uncertainty Analysis and Applications*, **3**, Article No. 10. https://doi.org/10.1186/s40467-015-0036-6

[11] Ye, T. and Zheng, H. (2023) Analysis of Birth Rates in China with Uncertain Statistics. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, **44**, 10621-10632. https://doi.org/10.3233/jifs-230179

[12] Liu, B. (2009) Some Research Problems in Uncertainty Theory. *Journal of Uncertain Systems*, **3**, 3-10.

[13] Peng, J. and Yao, K. (2011) A New Option Pricing Model for Stocks in Uncertainty Markets. *International Journal of Operations Research*, **8**, 18-26.

[14] Yu, X. (2012) A Stock Model with Jumps for Uncertain Markets. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, **20**, 421-432. https://doi.org/10.1142/s0218488512500213

[15] Sun, Y., Yao, K. and Dong, J. (2017) Asian Option Pricing Problems of Uncertain Mean-Reverting Stock Model. *Soft Computing*, **22**, 5583-5592. https://doi.org/10.1007/s00500-017-2524-8

[16] 周启航. 基于不确定浮动利率模型的回望期权定价[J]. 时代经贸(自然科学版), 2025, 22(3): 49-51.

[17] Zhao, H., Xin, Y., Gao, J. and Gao, Y. (2023) Power-Barrier Option Pricing Formulas in Uncertain Financial Market with Floating Interest Rate. *AIMS Mathematics*, **8**, 20395-20414. https://doi.org/10.3934/math.20231040

[18] Yang, M. and Gao, Y. (2023) Pricing Formulas of Binary Options in Uncertain Financial Markets. *AIMS Mathematics*, **8**, 23336-23351. https://doi.org/10.3934/math.20231186

[19] Wang, W., Ralescu, D.A. and Zhang, P. (2024) Valuation of Convertible Bond Based on Uncertain Fractional Differential Equation. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, **23**, 513-538. https://doi.org/10.1007/s10700-024-09431-z

[20] Wang, W., Ralescu, D.A. and Xue, X. (2024) Valuation of Currency Option Based on Uncertain Fractional Differential Equation. *Fractal and Fractional*, **8**, Article No. 478. https://doi.org/10.3390/fractalfract8080478

[21] Liu, B. (2010) Uncertainty Theory: A Branch of Mathematics for Modeling Human Uncertainty. Springer.

[22] Liu, B. (2008) Fuzzy Process, Hybrid Process and Uncertain Process. *Journal of Uncertain Systems*, **2**, 3-16.

[23] Yao, K. and Chen, X. (2013) A Numerical Method for Solving Uncertain Differential Equations. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, **25**, 825-832. https://doi.org/10.3233/ifs-120688

[24] Yao, K. (2015) Uncertain Contour Process and Its Application in Stock Model with Floating Interest Rate. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, **14**, 399-424. https://doi.org/10.1007/s10700-015-9211-y

[25] 刘兆鹏. 基于不确定指数 O-U 过程带有浮动利率模型的亚式期权定价[J]. 运筹与管理, 2022, 31(2): 205-208.

[26] Liu, Y. and Liu, B. (2022) Residual Analysis and Parameter Estimation of Uncertain Differential Equations. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, **21**, 513-530. https://doi.org/10.1007/s10700-021-09379-4

[27] Ye, T. and Liu, B. (2022) Uncertain Hypothesis Test for Uncertain Differential Equations. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, **22**, 195-211. https://doi.org/10.1007/s10700-022-09389-w