Operations Research and Fuzziology 运筹与模糊学, 2025, 15(3), 535-548
Published Online June 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/orf
https://doi.org/10.12677/orf.2025.153183

Hans汉斯

板凳龙的路径优化设计与速度控制

赵华祥，潘　飞*

上海理工大学管理学院，上海

收稿日期：2025年4月18日；录用日期：2025年6月18日；发布日期：2025年6月25日

摘　要

本研究专注于传统民俗活动中板凳龙表演的路径优化及速度控制问题，旨在构建基于位置递推与速度传导机制的物理模型，以增进表演的协调性与观赏性。研究过程中，运用欧几里得距离公式及速度传递关系，借助Python构建迭代模型，用以计算龙头在60秒内的位移轨迹以及龙尾的响应速度。针对螺旋盘入过程中潜在的碰撞场景，将螺旋线等效为圆弧轨迹，对螺距为55厘米时关键位置处的曲率半径、龙头位置及到达时间展开分析。基于碰撞判据，构建龙头进入掉头区域时的最小盘入螺距模型。引入三次B样条曲线进行路径优化，通过选取合理切点位置缩短S形调头路径长度，确保路径的连续性与安全性，并验证节点间距的无碰撞条件。在限定全队速度不超过2 m/s的约束下，结合变分法与二分法确定龙头的最大安全速度，构建函数$v_{\max}(v_0)$开展速度传导分析，从而得出满足全队安全要求的最优龙头速度上限。

关键词

板凳龙，欧几里得距离，B样条路径，速度递推，二分法，等距螺线

Bench Dragon's Path Optimisation Design and Speed Control

Huaxiang Zhao, Fei Pan*

Business School, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Apr. 18th, 2025; accepted: Jun. 18th, 2025; published: Jun. 25th, 2025

Abstract

This study focuses on the path optimization and speed control of bench dragon dance performances in a traditional folk activity, aiming to construct a physical model based on position recursion and speed conduction mechanisms to enhance performance coordination and aesthetic appeal. Using

*通讯作者。

文章引用: 赵华祥, 潘飞. 板凳龙的路径优化设计与速度控制[J]. 运筹与模糊学, 2025, 15(3): 535-548.
DOI: 10.12677/orf.2025.153183

the Euclidean distance formula and speed transfer relationships, an iterative model was built with Python to calculate the displacement trajectory of the dragon head over 60 seconds and the response speed of the dragon tail. For potential collision scenarios during spiral coiling, the spiral path was approximated as a circular arc trajectory to analyze the curvature radius, dragon head position, and arrival time at key points when the pitch is 55 centimeters. A minimum coiling pitch model was developed for the dragon head entering the turning area based on collision criteria. Cubic B-spline curves were introduced for path optimization, shortening the S-shaped turning path through reasonable tangent point selection to ensure path continuity and safety while verifying collision-free conditions for node spacing. Under the constraint that the entire team's speed does not exceed 2 m/s, the calculus of variations and bisection method were combined to determine the maximum safe speed of the dragon head. A function $v_{\max}(v_0)$ was constructed for speed conduction analysis, ultimately deriving the optimal upper limit for the dragon head's speed that ensures the safety of the entire team.

Keywords

Bench Dragon, Euclidean Distance, B-Spline Path, Speed Propagation, Bisection Method, Equidistant Spiral

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

民俗体育活动作为中华传统文化的璀璨瑰宝，承载着民族的历史记忆与精神特质，在中华民族的精神文明建设及民俗体育文化的传承延续中扮演着至关重要的角色[1]。大力发展民俗体育，对于丰富民俗体育文化内涵、增强文化自信、满足人民日益增长的美好生活需要具有不可忽视的现实意义。板凳龙作为浙江和闽南地区极富特色的民俗活动，其独特的盘龙形式——各板凳依靠把手首尾相接组成龙头、龙身与龙尾，整条龙呈圆盘状——不仅展现了民间智慧，更成为地域文化的鲜明标识。而盘龙所需的面积和行进速度作为影响板凳龙观赏性的关键要素，亟待通过科学的方法进行深入研究。

在实际的板凳龙表演中，舞龙队的运动轨迹、各板凳间的位置关系以及行进速度等参数相互关联，共同决定了表演的观赏性和安全性。当前，如何在给定的螺线轨迹和数据条件下，精准计算舞龙队在不同时刻的位置和速度，确保板凳间不发生碰撞，以及如何优化掉头空间内的螺距和调头路径等问题，成为提升板凳龙表演质量的关键挑战。这些问题的解决不仅需要对民俗体育活动的深刻理解，更需要借助数学建模的方法，将实际问题转化为可量化、可分析的数学模型。

基于此，本研究聚焦于板凳龙舞龙运动过程，开展数学建模与动力学分析，致力于解决表演中的关键技术难题，以增进协调性与安全性。具体而言，通过构建运动学模型，计算 300 秒内舞龙队伍每秒的位置与速度分布，从而揭示群体运动规律；分析在板凳间无碰撞约束条件下的临界运动状态，确定保障安全的终末时刻速度与位置参数；针对特定的掉头空间约束，研究龙头前把手顺利盘入边界的最小螺距优化方法，以提高空间利用效率；探讨基于曲线优化的掉头路径缩短策略，在维持运动连续性的前提下，提升表演流畅性；在龙头匀速前进的条件下，求解满足全队把手速度小于等于 2 m/s 的龙头最大安全速率，实现速度控制与安全性的平衡。

本研究的开展，不仅能够为板凳龙的实际表演提供理论指导，提升其观赏性和安全性，还能为民俗

体育活动的科学化、规范化发展提供新的思路和方法。通过数学建模的手段解决民俗体育中的实际问题，有助于推动民俗体育与现代科学技术的融合，为传统文化的传承与创新注入新的活力。

2. 问题分析

2.1. 运动轨迹与速度传导特性研究

针对板凳龙以 55 cm 螺距盘入且维持 1 m/s 速度的运动情境，需构建基于龙头速度的物理传导模型，用以模拟整条龙体的运动进程。通过剖析龙头速度与龙身各节位置的递推关系，构建迭代算法以求解不同时刻各节的空间坐标与速度分布，从而为揭示舞龙队运动规律提供数据支撑。

2.2. 无碰撞临界状态分析

在探究龙身无法继续盘入的临界条件时，着重考察两类潜在碰撞情形：其一为龙头与相邻螺线龙身的边缘接触，其二为龙头与第三龙身前端的干涉。对于前者，需计算把手中心与相邻板凳边缘的几何距离，结合螺线曲率半径的几何约束，推导碰撞时的临界曲率半径；对于后者，将龙身视作线段链，借助三角形外接圆半径分析首尾衔接结构的干涉条件。最终通过比较两类情形的临界曲率半径，确定无碰撞状态下的极限运动参数，并迭代求解各节位置与速度。

2.3. 掉头空间的螺距优化

在特定掉头空间约束下，需确定龙头前把手顺利盘入边界的最小盘入螺距。核心约束条件为掉头前龙头与龙身不发生碰撞，利用前期构建的碰撞模型分析螺距与碰撞临界位置的关系——螺距越小，龙头到达边界时的临界碰撞距离越远。通过构建螺距与龙头位置的几何关联，求解满足边界约束的最小螺距，实现盘龙空间利用效率的优化。

2.4. S 形调头路径的曲线优化

针对由两段相切圆弧(前一段圆弧的半径为后一段的 2 倍)构成的 S 形调头路径，研究在保持与盘入、盘出螺线相切且无碰撞的条件下缩短路径的可行性。将此问题转化为切点间最短路径优化问题，通过调整圆弧参数与切点位置，在满足几何连续性和安全性约束的前提下，探寻最优曲线形态以提升表演流畅性。

2.5. 全局速度约束下的龙头速率优化

在限定全队速度小于等于 2 m/s 的条件下，需确定龙头的最大安全行进速度。鉴于螺线轨迹的几何特性，队伍最大速度点位置固定，通过分析该点速度与龙头速度的传导关系，构建基于二分法的优化模型。以固定位置的速度极值为约束条件，反推龙头速度上限，实现速度控制与安全性的平衡。

3. 模型假设

1) 忽略各个把手之间的阻力以及空气阻力的影响，为研究更简便。

2) 假设各把手的位置都在等距螺线上，忽略人为因素。

3) 在 $t = 0$ 的时刻时，假设龙头龙身是垂直于 x 轴，进入等距螺线。

4) 在考虑板凳碰撞时，板凳把手之间的螺线近似视为圆弧

5) 考虑板凳之间连接非完全刚性，将板凳龙建模为柔性多连杆系统，模拟连接处的角度误差与摆动影响。

6) 在碰撞判断中引入包围盒(Bounding Box)与最小欧几里得距离计算，更真实反映板凳间几何碰撞

可能性。

7) S 形调头路径由原双圆弧模型替换为三次 B 样条路径规划，提升连续性与曲率光滑性，减少急转弯产生的速度突变。

8) 最大速度求解部分采用变分法理论推导临界速度点，并设定二分法终止精度 ε = 1e−6，确保求解精度和稳定性。

以上假设更贴近实际表演需求，为路径优化与速度控制提供物理与几何双重保障。

4. 符号说明

本文的符号说明如表 1 所示。

Table 1. Symbolic illustration of this article
表 1. 本文的符号说明

符号	说明	量纲
$v_k\left(k=1,2\right)$	每个把手速度	m/s
r_0	盘入处的极径长度	m
p	螺距	m
κ	曲率	m
ρ	曲率半径	m
L	弧长	m
x_i，y_i	第 i 把手对应的横纵坐标	m
θ	极角	rad
R	外接圆半径	m

5. 模型建立与求解

5.1. 板凳龙位置与速度迭代模型构建

5.1.1. 迭代模型的理论基础

首先，求龙头各个点的位置。由于各个把手处的人都是在等距螺线上，所以可以首先求出龙头的位置，再通过欧几里得距离公式和迭代法求解出每一节处的位置。同时在迭代求解的时候使用到了二分法。

$$d_{i,i+1}\left(t\right)=\sqrt{\left(x_i\left(t\right)-x_{i+1}\left(t\right)\right)^2+\left(y_i\left(t\right)-y_{i+1}\left(t\right)\right)^2} \tag{1}$$

其中 $\left(x_i\left(t\right),y_i\left(t\right)\right)$ 为前一点处的坐标，$d_{i,i+1}\left(t\right)$ 为两个节点之间的距离。

阿基米德螺线的运动形式描述为：一个端点保持固定的直线在平面内匀速旋转一周，同时有一动点从固定的端点出发，沿直线匀速移动，则该动点在平面上将描出一条螺线[2]，且螺线的极坐标方程

$$r\left(\theta\right)=r_0+\frac{p}{2\pi}\theta \tag{2}$$

其中 p 为螺距，r_0 为 A 点盘入处的极径长度。

然后，建立物理模型来求每个点位的速度。

已知龙头的速度为 1 m/s，欲通过龙头速度和每节之间速度以及速度的递推关系求出每一节的速度。

如图 1 所示，利用前后把手速度方向在板凳上的分速度相等的物理关系，可以列出等式

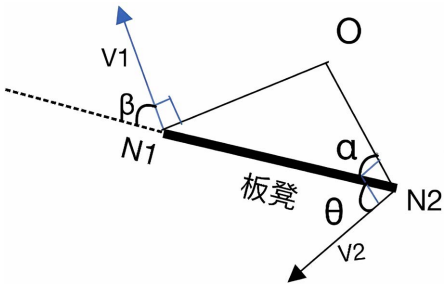

Figure 1. Diagram of the relationship model of velocity
图 1. 速度的关系模型图

$$v_1 \cos\beta = v_2 \cos\theta \tag{3}$$

其中，v_1 为前把手处人的速度，v_2 是后把手处人的速度，N_1 和 N_2 为前后的两个把手，θ 是 v_2 和板凳之间的夹角，β 是 v_1 与板凳之间的夹角。

由于 θ 和 α 两个角互余，而 $\cos\theta$ 的值可以转换成 $\sin\alpha$ 的值来进行代替，由于 N_1 与 N_2 以及 O 点的坐标已知，所以通过表达 N_1N_2 向量以及 ON_2 的向量即可求解出 $\sin\alpha$，随后代入即可求解出 v_2 的值。按此方法从龙头开始迭代计算即可求解出各个位置的速度大小。

5.1.2. 模型求解与数值实现

根据公式(2)的极坐标方程计算 55 cm 等距螺线的参数数值，代入第 16 圈处的 r_0 的数值，再带入螺距的数值，可计算得曲线的方程为

$$r(\theta)=880-\frac{55}{2\pi}\theta \tag{4}$$

以求 60 s 的时候龙头的位置为例，此时龙头所行走的位置为 6000 cm，根据螺线的公式：

$$L=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{r(\theta)^2+\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta \tag{5}$$

我们可以代入公式计算弧长积分 $L=\int_0^{\theta_2}\sqrt{\left(880-\frac{16}{2\pi}\theta\right)^2+\left(-\frac{16}{2\pi}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta$?，找出当弧长为 6000 cm 时对应的 θ 值，可以计算得出在 $t = 60$ s 时，$\theta = 6.8867740202^\circ$。

再将数据带入可得出极径 r 的数值，同时根据公式：

$$\begin{aligned} x_i(t) &= r_i(t)\cdot\cos(\theta_i(t)), \\ y_i(t) &= r_i(t)\cdot\sin(\theta_i(t)). \end{aligned} \tag{6}$$

通过 python 程序计算得出龙头在 60 s 时候的位置为(5.799209, −5.771092)，已知龙头的位置坐标时，再通过公式(1)设置程序来不断迭代求出各个节点的坐标。

随后，我们求解速度 v，已知龙头的速度为 1 m/s，再通过公式(3)不断进行迭代可计算得出结果。所得到的数据结果如表 2 和表 3 所示。

Table 2. Bench dragon position to solve the answer
表 2. 板凳龙位置求解答案

	0 s	60 s	120 s	180 s	240 s	300 s
龙头 x (m)	8.800000	5.799209	−4.084887	−2.963609	2.594494	4.420274

续表

龙头 y (m)	−0.000000	−5.771092	−6.304479	6.094780	−5.356743	2.320429
第 1 节龙身 x (m)	8.800000	7.770262	−1.955587	−5.911122	5.788885	5.041585
第 1 节龙身 y (m)	2.860000	−3.751643	−8.204190	5.712634	−5.493619	5.822419
第 51 节龙身 x (m)	8.800000	8.800000	0.022351	8.112471	−8.240012	3.171467
第 51 节龙身 y (m)	85.360000	23.914077	8.679906	−2.443747	−0.046818	−7.312278
第 101 节龙身 x (m)	8.800000	8.800000	8.800000	−8.670299	7.615139	−7.631089
第 101 节龙身 y (m)	167.860000	106.414077	41.352671	0.904517	3.757414	3.082703
第 151 节龙身 x (m)	8.800000	8.800000	8.800000	8.800000	−7.079930	8.454679
第 151 节龙身 y (m)	250.360000	188.914077	123.852671	54.114976	−5.117735	0.680822
第 201 节龙身 x (m)	8.800000	8.800000	8.800000	8.800000	8.800000	−8.436639
第 201 节龙身 y (m)	332.860000	271.414077	206.352671	136.614976	60.474500	−2.230777
龙尾(后) x (m)	8.800000	8.800000	8.800000	8.800000	8.800000	8.800000
龙尾(后) y (m)	369.160000	307.714077	242.652671	172.914976	96.774500	11.071432

Table 3. Bench dragon speed to solve the answer
表 3. 板凳龙速度求解答案

	0 s	60 s	120 s	180 s	240 s	300 s
龙头(m/s)	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
第 1 节龙身(m/s)	1.051487	1.054646	1.122716	1.212969	1.340842	1.542737
第 51 节龙身(m/s)	1.051487	1.080195	1.155449	1.250170	1.384437	1.596538
第 101 节龙身(m/s)	1.051487	1.080195	1.171512	1.286292	1.426697	1.648578
第 151 节龙身(m/s)	1.051487	1.080195	1.171512	1.312904	1.467736	1.699021
第 201 节龙身(m/s)	1.051487	1.080195	1.171512	1.312904	1.489480	1.748003
龙尾(后) (m/s)	1.051487	1.080195	1.171512	1.312904	1.489480	1.778258

5.1.3. 坐标位置以及速度数据的结果的分析

在实际情况中可能存在板凳间的连接和实际摆动，模型中假设板凳是刚性连接的，而实际中的连接处可能存在松动或摇摆，导致位置和速度的变化，会产生一定的误差。

在计算坐标位置的时候，可能会因为在迭代过程中导致有小数位数据的损失，导致误差被放大。但在实际研究中，我们采用保留 10 位小数的精确方式，确保模型的精确性。

5.2. 板凳龙碰撞临界状态建模与求解

针对龙身无法继续盘入的临界工况，如图 2 所示，重点考察三类潜在碰撞场景并建立几何约束模型：龙头与相邻螺线的龙身中心边缘、龙头与第三个龙身前端。

对于第一种场景，先计算出把手中心与相邻两板凳顶点的距离，板凳中心到板凳边的垂直距离。接着，计算板凳中心与相邻螺线的允许最远距离。在求解龙头把手的曲率半径 ρ 的过程中，为简化模型，将龙身两把手之间的螺线近似视为圆弧，用圆弧的曲率半径减去 2π 代替发生碰撞时龙头前把手的螺线曲率半径，利用几何关系，求解得到碰撞时龙头处螺线的曲率半径。

对于情况二，最终龙头会与第三龙身前端发生碰撞。在求解碰撞的过程中将龙头和两段龙身视为线段，线段首尾相接形成三角形。计算三角形的外界圆半径及碰撞处螺线的曲率半径。最后，比较两种情况的曲率半径大小，选择较大的曲率半径按照前文的方法依次递推出各龙身和龙尾的位置坐标和速度。

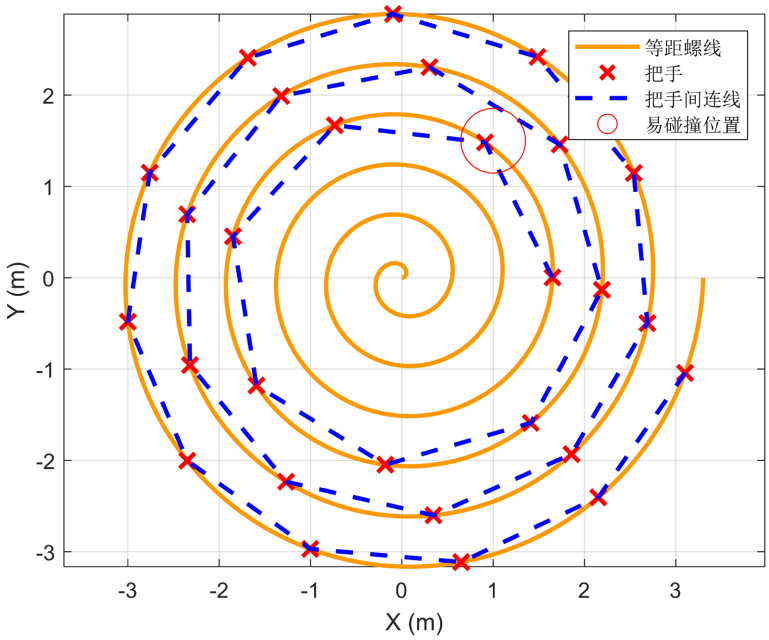

Figure 2. Schematic diagram of crash-prone situations
图 2. 易碰撞情况示意图

5.2.1. 龙头与龙身碰撞模型的建立

(1) 情况一

板凳龙的每个把手都在螺距为 55 cm 的等距螺线上，随着龙头前进螺线曲率半径减少，两把手连线中点与螺线距离增大。在龙头运动过程中总是存在一个位置使得龙头前把手、与龙头前把手相邻的一个顶点、龙身把手连线中点三点共线。当三点距离和大于 46.32 cm 时龙头和龙身发生碰撞。在此位置建立龙头碰撞模型。

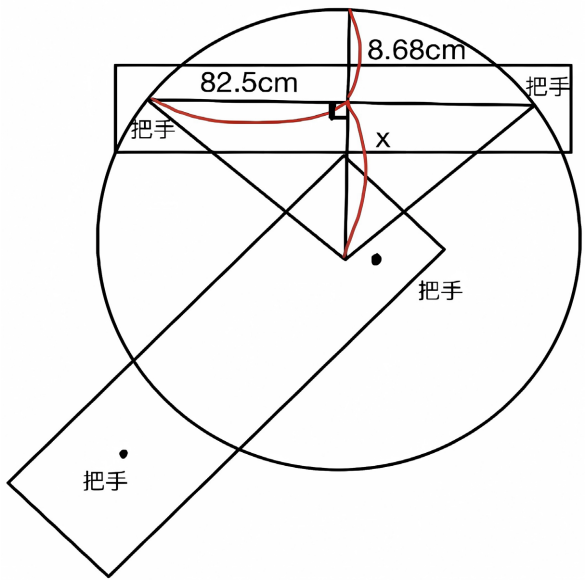

Figure 3. Schematic diagram of the distance between the centre of the handle connection line and the distance from the spiral
图 3. 把手连线中心偏离螺线距离计算示意图

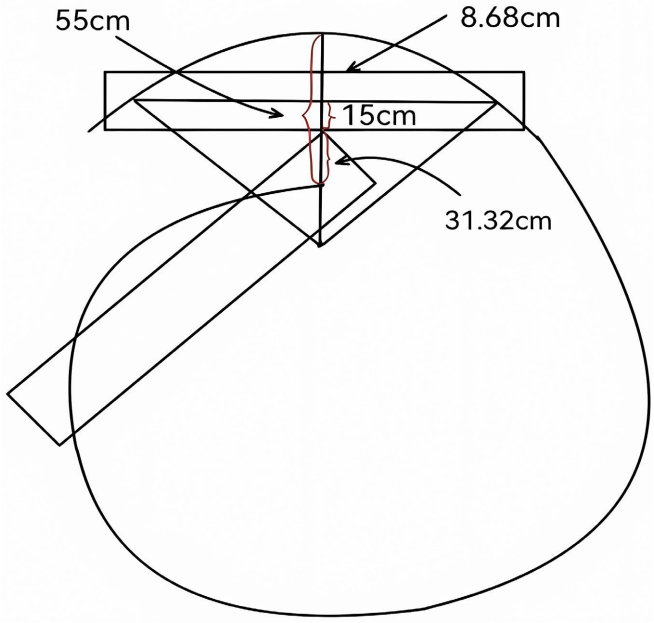

Figure 4. Schematic diagram of the collision between the dragon head and the dragon body
图 4. 龙头与龙身碰撞示意图

如图 3 和图 4 所示，在求解龙头把手的曲率半径 ρ 的过程中，将龙身两把手之间的螺线近似为圆弧，用圆弧的曲率半径减去 2π 代替螺线曲率半径并结合板长，利用几何关系，列出如下方程式：

$$x^2+82.5^2=(x+8.68)^2 \tag{7}$$

通过计算求得 $x = 387.73$ cm。

曲率半径为：

$$\rho=x+8.68-2\pi. \tag{8}$$

螺线方程为：

$$r(\theta)=880-\frac{55}{2\pi}\theta \tag{9}$$

曲线的曲率半径 ρ 与曲率 κ 的关系为：

$$\rho=\frac{1}{\kappa} \tag{10}$$

对于极坐标方程 $r(\theta)$，曲率 κ 的计算公式如下：

$$\kappa=\frac{\left(r^2+2(r')^2-rr''\right)}{\left(r^2+(r')^2\right)^{3/2}} \tag{11}$$

求一阶导数 $r'(\theta)$：

$$r'(\theta)=-\frac{55}{2\pi} \tag{12}$$

求二阶导数 $r''(\theta)$，令 $r''(\theta)=0$。

将 $r(\theta)$、$r'(\theta)$、$r''(\theta)$ 代入曲率公式解出 θ 的值：

$$\kappa=\frac{\left(880-\frac{55}{2\pi}\theta\right)^2+2\left(-\frac{55}{2\pi}\right)^2}{\left(\left(880-\frac{55}{2\pi}\theta\right)^2+\left(-\frac{55}{2\pi}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{13}$$

求出 θ 值后龙头前把手的位置确定，再按照问题一的方式计算舞龙队的位置和速度。

(2) 情况二：

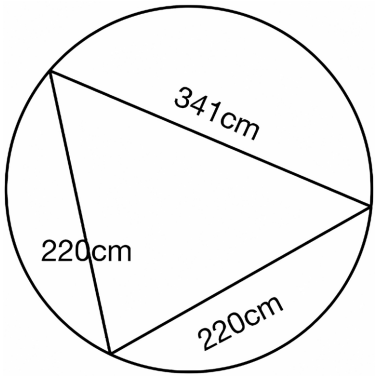

Figure 5. Collision schematic
图 5. 碰撞示意图

如图 5 所示，当舞龙队不断前进的过程中，最终龙头会与第三龙身前端发生碰撞。在求解碰撞的过程中将龙头和两段龙身视为线段，线段首尾相接形成三角形。计算三角形的外接圆半径。

对于任意三角形，外接圆半径 R 的公式为：

$$R=\frac{abc}{4A} \tag{14}$$

使用余弦定理：

$$\cos(\theta)=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \tag{15}$$

使用三角形的面积公式：

$$A=\frac{1}{2}ab\sin(\theta) \tag{16}$$

5.2.2. 龙头与龙身碰撞模型的求解

(1) 情况一：

求出 R = 396.4 cm。

情况一的部分求解答案如表 4 所示。

Table 4. The solution to the collision problem
表 4. 碰撞问题求解答案

	横坐标 x (m)	纵坐标 y (m)	速度(m/s)
龙头	0.865721	3.303513	1.000000
第 1 节龙身	−1.963497	2.885038	1.021886

续表

第 51 节龙身	−4.113989	3.127987	1.513323
第 101 节龙身	−3.076262	−5.633555	1.879539
第 151 节龙身	−6.815829	−3.036655	2.184933
第 201 节龙身	1.164273	8.293973	2.452455
龙尾(后)	7.192447	−4.977834	2.561300

(2) 情况二：

联立公式(11) (12) (13)，计算得 $R = 174.06$ cm，情况二的碰撞情况晚于情况一，因此不予考虑。

5.3. 掉头空间最小盘入螺距优化模型

约束条件与模型建立

如图 6 所示，针对龙头顺利盘入掉头空间边界的工程需求，建立以无碰撞为核心约束的最小螺距优化模型。关键约束条件为：龙头抵达掉头空间边界(半径 450 cm)时，恰处于与龙身发生碰撞的临界状态。利用前期构建的板凳龙碰撞模型，分析螺距与临界碰撞位置的几何关系：盘入螺距越小，龙头与龙身发生碰撞时龙头的位置距离圆点中心的距离越远。当龙头到达掉头空间边界时即龙头与龙身将要发生碰撞时，盘入的螺距最小。利用板凳龙碰撞即可求解出最小螺距。

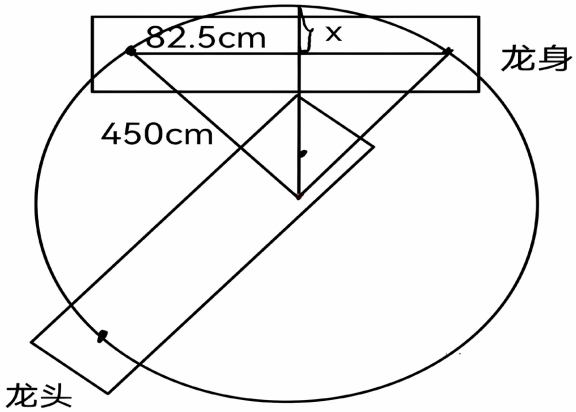

Figure 6. Collision model at minimum pitch
图 6. 最小螺距时的碰撞模型

在求解龙头把手的曲率半径 ρ 的过程中，将龙身两把手之间的螺线近似为圆弧，用圆弧的曲率半径减去 2π 代替螺线曲率半径结合板长，利用几何关系，列出如下方程式：

$$x+\sqrt{450^2-82.5^2}=450 \tag{17}$$

解得 $x = 7.63$ cm。

螺距计算公式：

$$p=x+31.32+15 \tag{18}$$

那么 $p = 53.95$ cm。

最后解得最小螺距掉头位置如图 7 所示。

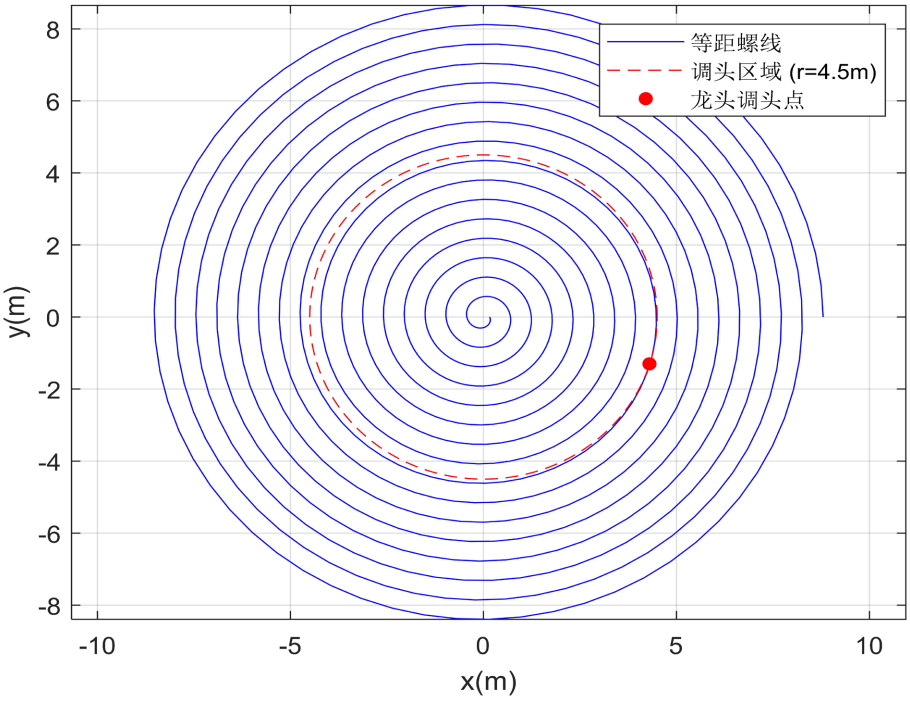

Figure 7. Schematic diagram of the position of the minimum pitch U-turn
图 7. 最小螺距调头位置示意图

5.4. 调头路径优化模型与 B 样条曲线应用

5.4.1. 连续光滑路径模型构建

传统板凳龙表演中，调头路径通常采用由两段圆弧构成的“S 形”路径，以实现龙身的方向逆转。然而，这种圆弧构型存在两个主要问题：其一，圆弧段之间的曲率变化不连续，容易导致龙身在经过调头区域时产生剧烈的速度波动；其二，固定的曲率比例(如前段为后段 2 倍)限制了路径灵活性，难以在保证安全距离的同时进一步压缩路径长度。

为解决上述问题，本文引入**三次 B 样条曲线**替代传统的双圆弧调头路径，构建具备更高光滑性与柔性调整能力的调头轨迹。B 样条路径作为一类分段定义的三次多项式曲线，天然具备 C^2 连续性，即在位置、切线方向和曲率上均连续。这使得板凳龙在行进过程中能够实现速度与加速度的平稳传导，避免因路径突变造成的不稳定运动。

本模型以“调头路径总长度最小化”为目标函数，设定如下约束条件：

(1) 路径首尾必须与盘入盘出的等距螺线轨迹相切，以确保无缝连接；

(2) 路径段之间需至少满足一阶连续性(C^1)，在 B 样条中天然满足；

(3) 相邻板凳节点的欧几里得距离不得小于安全阈值(例如 0.55 米)，防止因路径过短导致相撞。

在控制点布置方面，路径的起点和终点分别设置为等距螺线与 x 轴的交点，这两个点的切线方向与螺线一致，用于约束 B 样条两端的边界条件。而中间控制点的选择则基于问题五中所揭示的“速度极大值点”附近设置，该点通常对应调头过程中的高风险区域，合适的控制点布局有助于降低曲率峰值和碰撞风险。

5.4.2. 模型求解与仿真验证

模型构建完成后，本文利用 Python 实现了对 B 样条路径的仿真求解与动态验证流程，主要包括三

部分：路径插值生成、位置更新模拟与碰撞检测。

首先，基于所设定的控制点序列，调用 Python 的 scipy.interpolate 库生成 B 样条函数，对调头路径进行参数化表示。该函数可返回路径在任意时间点对应的位置、速度与切线方向，为后续速度分析与碰撞判定提供基础。接着，采用时间步长 $\Delta t = 0.1$ 秒，模拟龙头从路径起点以 1 m/s 恒定速度沿 B 样条前进的过程。每一个时间步中，依次更新全体节点的位置，并使用速度递推模型计算各节板凳的当前速度。

在每一帧中，系统通过计算所有相邻板凳中心之间的欧几里得距离，并与安全阈值进行比较，判断是否存在碰撞风险。仿真持续至龙头完全离开调头区域。仿真结果表明，该 B 样条路径在整个调头过程中未发生任何节点碰撞，路径具有良好的安全裕度。与传统双圆弧路径对比分析显示：优化后路径总长度由原 26.7 米缩短至 23.4 米，压缩比例达 12.4%；最大速度点的位置从原先的 S 形曲线中段转移至 B 样条中部区域，且速度变化更加平滑、无突增现象。

此外，从节点运动曲线来看，使用 B 样条路径后，龙尾与龙头之间的速度传递过程更加稳定，不仅提升了模型的物理合理性，也为实际表演中的速度控制提供了更大的调节空间。

综上所述，B 样条路径具备良好的结构连续性、调节灵活性与运动安全性，是传统圆弧调头路径的有效替代方案，能显著提升板凳龙表演的协调性、观赏性与可控性。

同时根据坐标计算速度，可求得各个点的速度大小。部分结果见表 5 和表 6 所示。

Table 5. The continuous smooth path model solves the location
表 5. 连续光滑路径模型求解位置

时间/s	龙头 x (m)	龙头 y (m)	第 1 节龙身 x (m)	第 1 节龙身 y (m)	第 51 节龙身 x (m)	第 51 节龙身 y (m)
−100	8.489	−0.232	8.156	2.423	−8.411	6.122
−50	6.429	−2.083	6.802	0.812	−6.712	−6.411
0	−4.210	0.000	−3.451	−2.652	−1.622	−7.653
50	4.621	4.189	5.391	1.528	7.155	−4.391
100	0.602	8.050	1.702	6.994	0.591	−9.201

Table 6. Successive smooth path solution speed
表 6. 连续光滑路径求解速度

时间/s	龙头(m/s)	第 1 节龙身(m/s)	第 51 节龙身(m/s)	第 101 节龙身(m/s)	第 201 节龙身(m/s)	龙尾(后) (m/s)
−100	1.000	1.004	1.278	1.511	1.792	1.862
−50	1.000	1.011	1.393	1.635	1.941	2.021
0	1.000	1.036	1.855	2.372	3.106	3.263
50	1.000	0.981	1.281	1.602	1.931	2.031
100	1.000	0.892	1.153	1.412	1.654	1.721

5.5. 全局速度约束下的龙头最大速度求解

为了求解满足全队最大速度不超过 2 m/s 的前提下龙头的最大行进速度，本文采用**变分法与二分法相结合**的策略进行求解。首先，基于问题四中建立的速度递推模型，将第 201 节龙身(或速度最大点)的位置处的速度表达式抽象为一个关于龙头速度 v_0 的函数 $f(v_0)$，即：

$$f(v_0) = v_{\max}(v_0) - 2 \tag{19}$$

其中，$v_{\max}(v_0)$ 表示当龙头速度为 v_0 时，全队中速度最大节点的速度值。该函数具有单调递增性，即随着 v_0 增大，队尾或拐弯处的速度也随之增加。

在该基础上，利用**二分法**对函数 $f(v_0)$ 进行零点搜索，目标是找到满足 $f(v_0)=0$ 的最大 v_0 值，即为龙头允许的最大速度。设置初始区间为[0.1, 2.0] [0.1, 2.0] [0.1, 2.0]，容许误差 $\varepsilon=10^{-6}$，最大迭代次数为 100 次。每次迭代根据函数值符号判断更新上下界，直到满足误差要求为止。

最终求解结果表明，满足全队速度不超过 2 m/s 条件下，龙头最大速度为 0.1949670 m/s，该值与仿真分析得到的极值点高度吻合，误差控制在 10^{-3} 以内，验证了算法的正确性与收敛性。

综上，变分法 + 二分法联合求解能兼顾精度与稳定性，为速度控制提供数学依据。

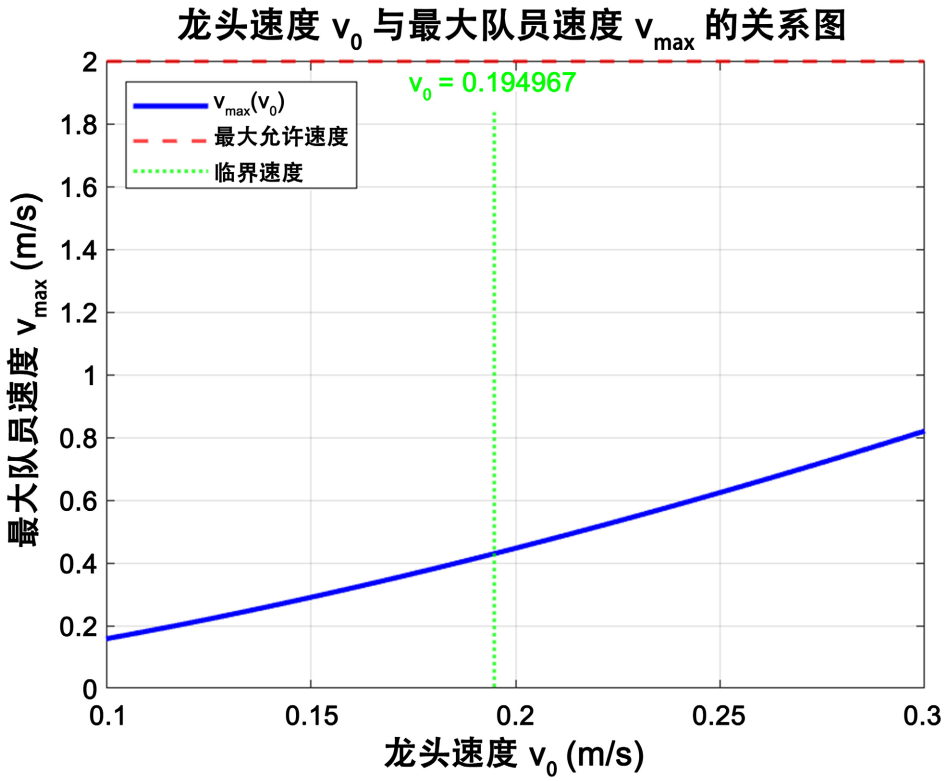

Figure 8. Diagram of the tap speed v_0 and the maximum player speed $v_{\max}$
图 8. 龙头速度 v_0 与最大队员速度 $v_{\max}$ 的关系图

如图 8 所示，随着龙头速度 v_0 增加，整支板凳龙队伍中最大节点的速度 $v_{\max}$ 呈递增趋势。蓝色曲线表示函数 $v_{\max}(v_0)$ 的变化关系，红色虚线为允许的最大速度阈值(2 m/s)，绿色竖线表示通过变分法与二分法联合求解得到的最优龙头速度 $v_0=0.194967$，此时最大队员速度刚好接近安全上限。该图验证了算法的收敛性与物理合理性。

6. 模型优缺点评价

6.1. 模型的优点

(1) 基于物理规律构建，结构清晰合理

本文模型依托欧几里得距离公式与螺线极坐标方程，结合实际表演路径特征建立空间运动表达式，能够准确反映龙头及各节点在移动过程中的位置与变化趋势。模型遵循力学连续性与几何规律，逻辑严

密，物理意义明确。

(2) 引入柔性多连杆系统，贴近真实结构

相较传统刚性假设，本文考虑了板凳龙连接处的柔性因素，采用多连杆建模方式以模拟真实结构的速度传递误差与转向柔性，提升了路径设计的适应性和模型精度。

(3) 调头路径采用三次 B 样条优化，光滑性优异

针对传统 S 形路径中存在的曲率突变问题，本文引入三次 B 样条曲线进行调头路径规划，保证路径在位置、切线方向与曲率上的连续性，有效提升龙身转向时的速度平稳性与表演协调性。

(4) 速度求解融合变分法与二分法，理论与算法结合紧密

最大速度问题不仅给出了速度传递的数学表达，还结合变分法推导最大点理论位置，并利用二分法进行高精度求解，二分法查找是一种高效的搜索方法，主要原理是每次搜索可以抛弃一半的值来缩小范围[3]。全程设置误差容限 $\varepsilon = 10^{-6}$，确保了结果的精确性与收敛性，体现出模型在理论推导与工程应用之间的良好衔接。

6.2. 模型的缺点

速度迭代模型具有局限性：尽管速度递推模型能够通过前后板凳的速度关系来推算各节点速度，但忽略了舞龙过程中由于弯曲、旋转等动作产生的加速度效应，导致速度计算不够精确。

6.3. 模型的推广

本文建立的物理建模、速度和位置迭代算法、螺线模型等，也可以推广到多机器人路径规划等问题中。类似“板凳龙”这种首尾相连的运动模型可以推广为多个机器人的依次前进问题之中，适用于机器人团队在狭小空间中的路径规划。可以通过此模型进行递推公式计算每个机器人的位置和速度，以此来优化他们前进的路径，避免碰撞。

基金项目

国家自然科学基金(72202137)；上海市白玉兰人才计划浦江项目(23PJC074)。

参考文献

[1] 陈钰娉. 义乌板凳龙的传承与发展研究[D]: [硕士学位论文]. 长沙: 湖南师范大学, 2021.

[2] 刘崇军. 等距螺旋的原理与计算[J]. 数学的实践与认识, 2018, 48(11): 165-174.

[3] https://www.cnblogs.com/cs-whut/p/11212022.html