

# 基于不确定风险偏好系数与不确定效用函数的投资决策方法及应用

王钧传, 扶庆阳, 张 鸿\*, 高林庆

河北工程大学数理科学与工程学院, 河北 邯郸

收稿日期: 2025年7月1日; 录用日期: 2025年8月4日; 发布日期: 2025年8月12日

## 摘 要

在投资决策中, 风险偏好是影响投资者行为的关键因素, 决定了资产配置和风险管理策略的选择, 直接影响投资者决策。风险偏好一般可以分为风险厌恶、风险中性和风险爱好三类, 风险偏好系数是衡量风险偏好的重要指标。效用函数可以量化投资者对不同投资组合的偏好, 可通过效用函数将投资者目标和风险偏好参数化, 从而建立可量化的决策模型, 为投资决策提供基于效用最大化的结构化框架。不确定风险偏好系数引入了不确定变量, 以量化投资者在不确定环境下的风险偏好变化, 不确定效用函数将效用函数与不确定变量相结合, 可用于不确定环境下投资决策方法的构建。但已有基于不确定效用函数的投资决策方法很少涉及投资者的风险偏好, 也未考虑如何确定不确定风险偏好系数。基于此, 本文给出了两类不确定风险偏好系数的确定方法, 通过不确定效用函数期望、不确定效用函数方差与两类不确定风险偏好系数相结合, 构建了两种基于不确定风险偏好系数与不确定效用函数的投资决策方法。本文通过多个数值算例验证了所提出的两种不确定投资决策方法的有效性与可行性。最后通过河北工程大学合同节水管理的实际案例进一步验证了所构建的两种基于不确定风险偏好系数与不确定效用函数的投资决策方法的实用性与应用价值。

## 关键词

风险偏好, 不确定风险偏好系数, 不确定效用函数, 投资决策方法

## Investment Decision-Making Methods and Applications Based on Uncertain Risk Preference Coefficient and Uncertain Utility Function

\*通讯作者。

文章引用: 王钧传, 扶庆阳, 张鸿, 高林庆. 基于不确定风险偏好系数与不确定效用函数的投资决策方法及应用[J]. 运筹与模糊学, 2025, 15(4): 368-381. DOI: 10.12677/orf.2025.154221

**Junchuan Wang, Qingyang Fu, Hong Zhang\*, Linqing Gao**

School of Mathematics and Physics, Hebei University of Engineering, Handan Hebei

Received: Jul. 1<sup>st</sup>, 2025; accepted: Aug. 4<sup>th</sup>, 2025; published: Aug. 12<sup>th</sup>, 2025**Abstract**

In investment decision-making, risk preference is a key factor influencing investors' behavior, determining the choice of asset allocation and risk management strategies, and directly affecting investors' decisions. Risk preference can generally be classified into three categories: risk-aversion, risk-neutral, and risk-seeking. The risk preference coefficient serves as an important indicator for measuring risk preference. The utility function can quantify investors' preferences for different investment portfolios. By parameterizing investors' objectives and risk preferences through the utility function, quantifiable decision-making models can be established, providing a structured framework for investment decisions based on utility maximization. The uncertain utility function, which combines the utility function with uncertain variables, can be used to construct methods for investment decisions under an uncertain environment. However, existing investment decision-making methods based on the uncertain utility function rarely involve investors' risk preferences. Moreover, the methods involving risk preferences do not consider how to determine the uncertain risk preference coefficients. Based on this, this paper proposes two types of uncertain risk preference coefficient determination methods. By combining the expectation and the variance of the uncertain utility function and two types of uncertain risk preference coefficient, two investment decision-making methods based on the uncertain risk preference coefficient and the uncertain utility function are constructed. The effectiveness and feasibility of the two proposed uncertain investment decision-making methods are validated through multiple numerical examples. Finally, their practicality and applicability are further demonstrated via a practical application of a water saving management contract in Hebei University of Engineering.

**Keywords****Risk Preference, Uncertain Risk Preference Coefficient, Uncertain Utility Function, Investment Decision-Making Method**

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>**Open Access****1. 引言**

风险偏好是指个体或组织在决策过程中愿意接受风险的程度,反映了其对风险的容忍度。Rabin 等[1]基于预期效用理论对风险偏好进行了系统阐释:风险中性表现为追求预期价值最大化;风险厌恶表现为愿意接受较低预期价值以换取风险降低;风险爱好则表现为愿意承担更高风险以获得较低预期价值。在投资决策领域,风险偏好是影响投资者决策行为的关键因素,直接决定了投资者对风险的态度和承受能力。现有研究从多个维度探讨了风险偏好对投资决策的影响。李慧云等[2]基于决策者对风险的不同态度以及决策会受到复杂心理机制的影响,提出两种区间数排序方法分析决策者风险态度。朱少英等[3]建立了风险投资的多目标决策模型,对不同风险偏好下的备选方案进行排序。杨明淼[4]则在投资者感知市场

状态的决策过程中引入风险偏好系数,深入探讨了不同风险偏好投资者的决策过程差异。马佳欢等[5]建立了在证券组合投资中的多目标规划模型,引入风险偏好系数,将其优化为更便于计算的单目标规划模型。

效用函数可以量化投资者对不同投资组合的偏好,可通过效用函数将投资者目标和风险偏好参数化。现有研究使用效用函数对投资决策进行了分析。赵全华[6]基于效用函数和资产组合理论,将投资者划分为风险规避型、风险中立型和风险追求型三类,系统分析了不同类型投资者在股市中的决策行为特征。周少波等[7]用数值分析的方法探讨了在非期望效用函数下的投资决策问题,比较了风险投资在非期望效用函数和期望效用函数下的投资策略。周庆健等[8]研究了使用双指数效用函数解决风险厌恶型投资者的最优投资组合决策问题。Liesio 等[9]提出了非加性多属性效用函数,为解决传统效用函数在处理复杂投资决策问题时的局限性提供了新方法。但上述研究大多基于随机因素,而在决策过程中存在的不确定性不仅仅表现为随机性,还有模糊性。1970年,Bellman 等[10]假设投资选择序列是模糊的,用模糊集对其建模,基于这一假设,提出了模糊决策方法。目前基于模糊决策的方法在不同领域得到了广泛研究[11]-[13],但模糊的理论基础——可能性理论不满足自对偶性,与人们认知不符[14]。

为了改进可能性理论,Liu [15]在2007年提出了不确定理论,并在2010年进一步完善[16],目前已广泛应用于风险分析、投资决策等领域[17]-[19]。李圣国[20]用不确定变量刻画风险,对不确定环境下的风险与保险进行研究,建立了一个以不确定风险的在险价值为目标函数、期望值保费为约束条件的不确定最优再保险模型。张晓斌等[21]考虑带有风险指标约束的投资组合模型,建立了不确定收益下的个人风险投资组合优化模型。Yao 等[14]用不确定效用函数解决投资组合优化问题,通过计算不确定效用函数的期望确定最佳投资方案。上述研究基于不确定理论对风险偏好进行了分析,但未结合不确定效用函数衡量风险偏好程度,也未给出不确定风险偏好系数的计算方法。

本文研究了基于不确定风险偏好系数与不确定效用函数的投资决策方法,给出了两类用以衡量风险偏好程度的不确定风险偏好系数的确定方法,将不确定风险偏好系数与不确定效用函数的期望与方差相结合,进而分析不同风险偏好类型的投资者决策差异。本文其余部分结构如下:第二节回顾了本文所涉及的基本理论知识。第三节基于不确定效用函数给出了两类不确定风险偏好系数的确定方法。第四节通过将不确定效用函数的期望和方差与不确定风险偏好系数相结合,构建了两类基于不确定风险偏好系数与不确定效用函数的投资决策方法,即基于不确定风险厌恶系数的投资决策方法、基于不确定风险爱好系数的投资决策方法,并对部分参数进行了敏感性分析,通过数值例子分析投资者的风险偏好对投资决策的影响。第五节将所提方法应用于河北工程大学合同节水管理实践。第六节对全文内容进行总结,并提出了未来的研究方向。

## 2. 准备知识

### 2.1. 效用函数与风险偏好

#### 2.1.1. 效用函数

在金融领域,效用函数通常用来表示消费者在消费中所获得的效用与所消费的商品组合之间数量关系的函数。而在投资组合中效用函数可以量化投资者对不同投资组合的偏好,通过将投资者的目标和风险偏好参数化,以衡量投资者的满意程度[22],一般用 $U$ 表示。

#### 2.1.2. 风险偏好

风险偏好是投资者对风险的态度,可以分为风险厌恶、风险中性和风险爱好三种类型[23]。假定投资者的初始财富为 $a$ 元,正在考虑是否参加一项投资,假设这项投资为 $x$ ,获得收益 $X_1$ 元的概率为 $p$ ,但

损失  $X_2$  元的概率为  $1-p$ ，则这项投资的期望值为

$$E[X] = p \times (a + X_1) + (1-p) \times (a - X_2)$$

期望值的效用为

$$U[E(X)] = U[p \times (a + X_1) + (1-p) \times (a - X_2)]$$

而函数的期望值为

$$E[U(X)] = pU(a + X_1) + (1-p)U(a - X_2)$$

若投资选择的期望值的效用大于效用的期望，即  $U[E(X)] > E[U(X)]$ ，该不等式说明确定性收益能带来更高的效用。此时，该投资者的风险偏好称为风险厌恶，函数图形为凹函数。

假如投资选择保持不变，当效用的期望值高于期望值的效用，即  $U[E(X)] < E[U(X)]$ ，该不等式说明风险收益比确定性收益能带来的效用更高，此时该投资者的风险偏好称为风险爱好，函数图形为凸函数。

假设投资选择仍然不变，此时期望值的效用等于效用值的期望，即  $U[E(X)] = E[U(X)]$ ，该不等式说明确定性收益与风险收益能带来的效用相同，不存在收益波动。此时该投资者的风险偏好称为风险中性，函数图形为线性函数。

## 2.2. 不确定效用函数

效用函数用于投资决策中量化不同投资方案的效用，为了在不确定环境下衡量投资者的满意程度，将不确定变量与效用函数相结合形成不确定效用函数。如文献[14]给定对数函数  $U(x) = \ln x$ 、指数函数  $U(x) = a - e^{-bx}$  等作为效用函数，与不确定变量  $\xi$  相结合形成不确定对数效用函数、不确定指数效用函数；都将所提出的不确定效用函数用于不确定投资决策方法。

## 2.3. 不确定效用函数的期望

在投资决策过程中，期望是衡量投资收益的重要指标。Yao 等[14]将效用函数与不确定理论相结合，提出了不确定效用函数的期望的定义，以不确定效用函数的期望作为投资选择排序的标准并应用于投资决策。

定理 1 [14] 设  $\xi$  是一个具有不确定分布  $\phi$  的选择， $U$  是一个不确定效用函数。如果  $U$  是严格递增的，那么不确定效用函数  $U$  的期望为

$$E[U(\xi)] = \int_0^{+\infty} 1 - \phi(U^{-1}(\alpha)) d\alpha - \int_{-\infty}^0 \phi(U^{-1}(\alpha)) d\alpha$$

此外，如果不确定分布  $\phi$  是正则的，那么期望为

$$E[U(\xi)] = \int_0^1 U(\phi^{-1}(\alpha)) d\alpha$$

其中， $\phi^{-1}(\alpha)$  是不确定选择  $\xi$  的逆不确定分布。设  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  是独立的不确定选择，其不确定分布分别为  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ ，由于效用函数  $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$  随  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的增大而增大，根据 Liu 等[24]证明的定理可知

$$E[U(\xi)] = \int_0^1 U(\phi_1^{-1}(\alpha), \phi_2^{-1}(\alpha), \dots, \phi_n^{-1}(\alpha)) d\alpha$$

## 2.4. 不确定效用函数的方差

方差是衡量投资风险的重要指标, 基于不确定效用函数的方差的不确定规划模型可用于投资决策, 作为投资选择排序的另一个标准。不确定效用函数的方差定义如下:

定义 1 设  $\xi$  是一个具有不确定分布  $\phi$  的不确定变量,  $U$  是一个不确定效用函数。如果  $U$  严格递增, 不确定效用函数  $U(\xi)$  的期望  $E[U(\xi)]$  存在, 则  $U(\xi)$  的方差为

$$V[U(\xi)] = E\{U(\xi) - E[U(\xi)]\}^2$$

文献[25]给出了利用逆不确定分布计算不确定变量方差的公式, 由于  $U(\xi)$  仍然是不确定变量, 因此可以得到不确定效用函数的方差的计算公式如下:

$$V[U(\xi)] = \int_0^1 \{U(\phi^{-1}(\alpha)) - E[U(\xi)]\}^2 d\alpha$$

## 2.5. 不确定投资决策方法

在本小节将介绍一种不确定投资决策方法, 可以应用于基于不确定股票模型的投资决策问题。在金融市场中, 人的因素导致的不确定存在于股票交易中, 并显著影响股票价格, Yao 等[14]在 Black 等[26]提出的随机股票模型的基础上给出了不确定股票模型, 该模型设定股票价格在人的不确定影响下是一个不确定过程, 且仅受不确定因素影响, 如下所示

$$\begin{cases} dX_t = rX_t dt \\ dY_t = \mu Y_t + \sigma Y_t dC_t \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $r$  为无风险利率,  $\mu$  为漂移参数(股票收益率),  $\sigma$  为扩散参数(股票收益波动率) ( $r, \mu, \sigma$  通常假定为常数),  $X_t$  为债券的价格,  $Y_t$  为股票的价格,  $C_t$  为 Canonical 过程, 服从不确定正态分布  $N(0, t^2)$ , 其不确定分布函数为:

$$\phi_t(x) = \left(1 + \exp\left(-\frac{\pi x}{\sqrt{3}t}\right)\right)^{-1} \quad (2)$$

在不确定市场中, 投资者面临的一个基本问题是应该将多少资金投入债券以及投入股票, 从而实现收益最大化。设  $\xi_1 = W_0 e^{rT}$  表示投资债券的资金,  $\xi_2 = W_0 e^{\mu T + \sigma C_T}$  表示投资股票的资金,  $W_0$  表示投资者的初始资金。设定投资者的投资组合选择  $\xi = p_1 \xi_1 + p_2 \xi_2$ , 其中  $p_1$  和  $p_2$  分别表示债券和股票的投资比例。那末在  $T$  时刻的最终财富  $\xi$  如下式

$$\xi = p_1 W_0 e^{rT} + p_2 W_0 e^{\mu T + \sigma C_T} \quad (3)$$

## 3. 不确定风险偏好系数的确定

由于大多数投资者都会表现出一定程度的风险厌恶或风险爱好, 因此风险中性型投资者在实际投资决策中的应用相对较少, 本文主要考虑了风险厌恶型投资者、风险爱好型投资者。当已知投资者风险偏好类型时, 为衡量投资者的风险厌恶程度或风险爱好程度, 需要通过计算确定风险厌恶系数或风险爱好系数的值。

本文使用不确定风险偏好系数以平衡投资者对投资收益与风险, 进而对不确定投资决策模型进行优化, 为了量化不确定环境下投资者对收益与风险的偏好程度, 通过不确定期望给出两种不确定风险偏好系数的计算方法。

### 3.1. 不确定风险厌恶系数的确定

为衡量经济个体的风险厌恶程度,若已知效用函数 $U(x)$ ,可以通过该效用函数计算风险厌恶系数 $A(x)=-U''(x)/U'(x)$ 分析投资者的风险倾向, $A(x)$ 是效用函数 $U(x)$ 的 Arrow-Pratt 测度,也称为风险厌恶系数, $A(x)$ 的值越大,风险厌恶程度越高。但在不确定环境下投资者的风险偏好也具有不确定性,投资者的最终财富 $\xi$ 是一个不确定变量,将此不确定变量 $\xi$ 与 $A(x)$ 相结合形成一个新的不确定变量 $A(\xi)$ 。根据不确定期望的性质,我们定义不确定风险厌恶系数 $\lambda_R$  ( $p_1, p_2$  最优比例)为如下不确定规划问题的解。

$$\begin{cases} \max f(p_1, p_2) = E \left[ -\frac{U''(p_1 W_0 e^{rT} + p_2 W_0 e^{\mu T + \sigma C_T})}{U'(p_1 W_0 e^{rT} + p_2 W_0 e^{\mu T + \sigma C_T})} \right] \\ \text{subject to:} \\ p_1 + p_2 = 1 \\ p_1 \geq 0, p_2 \geq 0 \end{cases} \quad (4)$$

由上述定义可以看出,  $\lambda_R$  是风险厌恶系数 $A(x)$ 的推广。

### 3.2. 不确定风险爱好系数的确定

当经济个体为风险爱好型时,为衡量其风险爱好程度,若已知效用函数 $U(x)$ ,可以通过该效用函数计算风险爱好系数 $B(x)=U''(x)/U'(x)$ 分析投资者的风险倾向, $B(x)$ 是效用函数 $U(x)$ 的 Arrow-Pratt 测度的推广。 $B(x)$ 的值越大,风险爱好程度越高。但在不确定环境下投资者的风险偏好也具有不确定性,当投资者最终财富 $\xi$ 是一个不确定变量,为了衡量其风险爱好程度,将不确定变量 $\xi$ 与 $B(x)$ 相结合,将此不确定变量 $\xi$ 与 $B(x)$ 相结合形成一个新的不确定变量 $B(\xi)$ 。根据不确定期望的性质,我们定义不确定风险爱好系数 $\lambda_p$  ( $p_1, p_2$  最优比例)为如下不确定规划问题的解。

$$\begin{cases} \max g(p_1, p_2) = E \left[ \frac{U''(p_1 W_0 e^{rT} + p_2 W_0 e^{\mu T + \sigma C_T})}{U'(p_1 W_0 e^{rT} + p_2 W_0 e^{\mu T + \sigma C_T})} \right] \\ \text{subject to:} \\ p_1 + p_2 = 1 \\ p_1 \geq 0, p_2 \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

由上述定义可以看出,  $\lambda_p$  是风险爱好系数 $B(x)$ 的推广。

## 4. 基于不确定风险偏好系数与不确定效用函数的投资决策方法

理性投资者一般以实现自身满意度最大为决策出发点,为了衡量满意度,用效用作为衡量标准,将不同的选择映射到不同的效用,因此理性投资者总是以效用最大化作为决策依据。如果仅依赖不确定效用函数期望或方差的决策方法从收益和风险两个不同的角度进行决策,可能会导致决策方案不一致。

本文将不确定效用函数的期望、方差与两种不确定风险偏好系数相结合,给出了基于不确定风险厌恶系数的投资决策方法与基于不确定风险爱好系数的投资决策方法。

### 4.1. 基于不确定风险厌恶系数的投资决策方法

为了解决风险厌恶型投资者的投资决策问题,将 3.1 节提出的不确定风险厌恶系数与不确定效用函

数的期望、方差相结合, 构建基于不确定风险厌恶系数的投资决策方法, 应用于股票和债券的投资决策中, 分析当已知投资者为风险厌恶型时, 不确定风险厌恶系数  $\lambda_R$  对投资决策的影响, 所建立的模型为:

$$\begin{cases} \max f(p_1, p_2) = E \left[ U \left( p_1 W_0 e^{rT} + p_2 W_0 e^{\mu T + \sigma C_T} \right) \right] \\ \quad - \lambda_R \cdot V \left[ U \left( p_1 W_0 e^{rT} + p_2 W_0 e^{\mu T + \sigma C_T} \right) \right] \\ \text{subject to:} \\ \quad p_1 + p_2 = 1 \\ \quad p_1 \geq 0, p_2 \geq 0 \end{cases} \quad (6)$$

所提出的方法通过两个阶段算法进行求解, 求解过程如下所示:

#### 不确定风险厌恶系数的投资决策方法算法过程

阶段一: 求解不确定风险厌恶系数  $\lambda_R$

输入:

无风险利率  $r$   
股票收益率  $\mu$   
股票收益波动率  $\sigma$   
投资期限  $T$   
初始财富  $W_0$   
效用函数  $U(x)$

输出:

最优投资比例  $p_1, p_2$ , 目标函数值

步骤:

步骤1. 根据效用函数  $U(x)$ , 求出其一阶导数  $U'(x)$ 、二阶导数  $U''(x)$

步骤2. 构建求  $\lambda_R$  的模型, 目标函数为  $\max f(p_1, p_2) = E \left[ -\frac{U''(x)}{U'(x)} \right]$ , 条件为  $p_1 + p_2 = 1$ ,  $p_1 \geq 0$ ,  $p_2 \geq 0$ , 与不

确定变量  $\xi$  相结合形成新的不确定变量, 并求不确定期望。  $p_1$  和  $p_2$  的初始比例设为  $[0.5, 0.5]$ , 再根据  $p_1$  和  $p_2$  的比例遍历进行循环运算, 对于不同  $p_1$  和  $p_2$  及  $f(p_1, p_2)$  进行更新, 直至得到  $\max f(p_1, p_2)$ , 确定  $\lambda_R$  的值

阶段二: 基于  $\lambda_R$  进行投资决策分析

输入:

无风险利率  $r$   
股票收益率  $\mu$   
股票收益波动率  $\sigma$   
投资期限  $T$   
初始财富  $W_0$   
效用函数  $U(x)$   
不确定风险厌恶系数  $\lambda_R$

续表

输出:

基于  $\lambda_R$  的最优投资比例  $p_1$ ,  $p_2$  和目标函数值  $\max f(p_1, p_2)$ 

步骤:

步骤3. 构建基于  $\lambda_R$  的投资决策模型  $\max f(p_1, p_2) = E[U(\xi)] - \lambda_R \cdot V[U(\xi)]$ , 模型中设定的约束条件为  $p_1 + p_2 = 1$ ,  $p_1 \geq 0$ ,  $p_2 \geq 0$ , 其中  $\xi = p_1 W_0 e^{rT} + p_2 W_0 e^{\mu T + \sigma C_T}$ ,  $C_T$  服从不确定正态分布  $N(0, T^2)$ , 同时选择阶段1所涉及的效用函数  $U(x)$

步骤4. 求解基于  $\lambda_R$  的投资决策模型,  $p_1$  和  $p_2$  的初始比例设为  $[0.5, 0.5]$ , 再对  $p_1$  和  $p_2$  的值进行遍历循环, 对于不同  $p_1$  和  $p_2$  及  $f(p_1, p_2)$  进行更新, 令  $f(p_1, p_2)$  最大的比例  $p_1$  和  $p_2$  进行保存, 并得到  $\max f(p_1, p_2)$ , 最终能够得到在  $\lambda_R$  值下的最优投资比例及目标函数值

步骤5. 返回结果

当投资者的风险偏好为风险厌恶型, 选择的效用函数为  $U_1(x) = \sqrt{x}$  与  $U_2(x) = \ln x$ , 设定  $W_0 = 1$ ,  $r = 8\%$ ,  $\mu = 0.06$ ,  $\sigma = 0.2$ ,  $T = 5$ . 在本文后续分析中, 各参数均按照上述设定取值。

对于效用函数  $U_1(x) = \sqrt{x}$ , 根据式(4)计算不确定风险厌恶系数, 有

$$\begin{cases} \max f(p_1, p_2) = \int_0^1 \frac{1}{2} \left[ p_1 e^{0.4} + p_2 e^{0.3} \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{\sqrt{3} \times 0.2 \times 5}{\pi}} \right]^{-1} d\alpha \\ \text{subject to:} \\ p_1 + p_2 = 1 \\ p_1 \geq 0, p_2 \geq 0 \end{cases} \quad (7)$$

求解得到  $\lambda_R = 0.335$ , 将效用函数  $U_1(x) = \sqrt{x}$  与  $\lambda_R = 0.335$  代入模型(6)中, 有

$$\begin{cases} \max f(p_1, p_2) = E \left[ U(p_1 W_0 e^{rT} + p_2 W_0 e^{\mu T + \sigma C_T}) \right] \\ \quad - 0.335 \cdot V \left[ U(p_1 W_0 e^{rT} + p_2 W_0 e^{\mu T + \sigma C_T}) \right] \\ \text{subject to:} \\ p_1 + p_2 = 1 \\ p_1 \geq 0, p_2 \geq 0 \end{cases} \quad (8)$$

计算得到  $p_1 = 0.742$ ,  $p_2 = 0.258$ ,  $f_{\max} = 1.252$ 。当投资者的风险偏好为风险厌恶型, 效用函数为  $U_1(x) = \sqrt{x}$  时, 按照  $p_1 = 0.742$ ,  $p_2 = 0.258$  的比例进行投资, 可实现收益最大化。

同理, 当效用函数为  $U_2(x) = \ln x$  时, 通过式(4)计算不确定风险厌恶系数

$$\begin{cases} \max f(p_1, p_2) = \int_0^1 \left[ p_1 e^{0.4} + p_2 e^{0.3} \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{\sqrt{3} \times 0.2 \times 5}{\pi}} \right]^{-1} d\alpha \\ \text{subject to:} \\ p_1 + p_2 = 1 \\ p_1 \geq 0, p_2 \geq 0 \end{cases} \quad (9)$$

得到  $\lambda_R = 0.670$ 。将效用函数  $U_2(x) = \ln x$  与  $\lambda_R$  代入模型(6)中, 有

$$\begin{cases} \max f(p_1, p_2) = E[U(p_1 W_0 e^{rT} + p_2 W_0 e^{\mu T + \sigma C_T})] \\ \quad - 0.670 \cdot V[U(p_1 W_0 e^{rT} + p_2 W_0 e^{\mu T + \sigma C_T})] \\ \text{subject to:} \\ \quad p_1 + p_2 = 1 \\ \quad p_1 \geq 0, p_2 \geq 0 \end{cases} \quad (10)$$

得到  $p_1 = 0.902$ ,  $p_2 = 0.098$ ,  $f_{\max} = 0.418$ 。当投资者的风险偏好为风险厌恶型, 效用函数为  $U_2(x) = \ln x$  时, 按照  $p_1 = 0.902$ ,  $p_2 = 0.098$  的比例进行投资, 可实现收益最大化。

通过分析在基于不确定风险厌恶系数的投资决策方法在股票和债券两种投资产品上的投资比例可知, 风险厌恶型投资者主要投资收益波动小、风险低的债券。

#### 4.2. 基于不确定风险爱好系数的投资决策方法

若投资者为风险爱好型, 根据 3.2 节提出的不确定风险爱好系数与不确定效用函数的期望、方差相结合, 构建基于不确定风险爱好系数的投资决策方法, 应用于股票和债券的投资决策中, 分析当已知投资者为风险爱好型时, 不确定风险爱好系数  $\lambda_p$  对投资决策的影响, 所建立的模型为:

$$\begin{cases} \max g(p_1, p_2) = E[U(p_1 W_0 e^{rT} + p_2 W_0 e^{\mu T + \sigma C_T})] \\ \quad - \lambda_p \cdot V[U(p_1 W_0 e^{rT} + p_2 W_0 e^{\mu T + \sigma C_T})] \\ \text{subject to:} \\ \quad p_1 + p_2 = 1 \\ \quad p_1 \geq 0, p_2 \geq 0 \end{cases} \quad (11)$$

基于不确定风险爱好系数的投资决策方法求解过程与基于不确定风险偏好系数的投资决策方法相类似, 其算法过程参考 4.1 节。

当投资者选择的效用函数为  $U_3(x) = 1 + e^{-x}$ , 根据 4.1 节中的参数设定计算得到  $B(\xi)$  的不确定期望的最大值  $E[B(\xi)]_{\max} = -1$ , 即  $\lambda_p = -1$ , 代入模型(11), 有

$$\begin{cases} \max g(p_1, p_2) = E[U(p_1 W_0 e^{rT} + p_2 W_0 e^{\mu T + \sigma C_T})] \\ \quad - (-1) \cdot V[U(p_1 W_0 e^{rT} + p_2 W_0 e^{\mu T + \sigma C_T})] \\ \text{subject to:} \\ \quad p_1 + p_2 = 1 \\ \quad p_1 \geq 0, p_2 \geq 0 \end{cases} \quad (12)$$

得到  $p_1 = 0.747$ ,  $p_2 = 0.253$ ,  $f_{\max} = 0.790$ 。当投资者的风险偏好为风险爱好型, 效用函数为  $U_3(x) = 1 + e^{-x}$  时, 按照  $p_1 = 0.747$ ,  $p_2 = 0.253$  的比例进行投资, 可实现收益最大化。

通过分析基于不确定风险爱好系数的投资决策方法在股票和债券两种投资产品上的投资结果可知, 对于风险爱好型投资者来说, 该类投资者有一定的风险倾向, 对收益高、风险也大的股票投资比例较高。

#### 4.3. 参数敏感性分析

对于上述参数无风险利率  $r$ 、股票收益率  $\mu$ 、股票收益波动率  $\sigma$  和投资期限  $T$ ,  $r$  和  $T$  是由历史数据

或预期投资期限决定的，其取值一般保持不变，而 $\mu$ 和 $\sigma$ 取值存在一定变化。在本节中，通过调整部分参数 $\mu$ 和 $\sigma$ 来测试它们对投资决策的影响，将参数 $\mu$ 和 $\sigma$ 相结合进行多参数敏感性分析。4.1节和4.2节中的基于不确定风险偏好系数与不确定效用函数的三个投资决策方法数例的敏感性分析结果分别如表1~3所示。

**Table 1.** Sensitivity analysis of parameters  $\mu$  and  $\sigma$  when the utility function is  $U_1(x) = \sqrt{x}$

**表 1.** 效用函数为 $U_1(x) = \sqrt{x}$ 时，参数 $\mu$ 和 $\sigma$ 的敏感性分析

| $\sigma$ | $\mu = 0.058$ |       | $\mu = 0.059$ |       | $\mu = 0.060$ |       | $\mu = 0.061$ |       | $\mu = 0.062$ |       |
|----------|---------------|-------|---------------|-------|---------------|-------|---------------|-------|---------------|-------|
|          | $p_1$         | $f$   | $p_1$         | $f$   | $p_1$         | $f$   | $p_1$         | $f$   | $p_1$         | $f$   |
| 0.190    | 0.741         | 1.247 | 0.735         | 1.248 | 0.730         | 1.249 | 0.725         | 1.250 | 0.719         | 1.251 |
| 0.195    | 0.745         | 1.249 | 0.740         | 1.250 | 0.735         | 1.251 | 0.730         | 1.252 | 0.725         | 1.253 |
| 0.200    | 0.751         | 1.250 | 0.746         | 1.251 | 0.742         | 1.252 | 0.737         | 1.253 | 0.733         | 1.254 |
| 0.205    | 0.757         | 1.251 | 0.753         | 1.252 | 0.749         | 1.253 | 0.745         | 1.254 | 0.741         | 1.255 |
| 0.210    | 0.764         | 1.252 | 0.761         | 1.253 | 0.757         | 1.254 | 0.753         | 1.254 | 0.750         | 1.255 |

首先在效用函数为 $U_1(x) = \sqrt{x}$ 时对投资决策方法中的参数进行敏感性分析。由表1可知，在效用函数为 $U_1(x) = \sqrt{x}$ 时建立的模型中，当固定 $\sigma$ 时，债券的投资比例 $p_1$ 会随着 $\mu$ 的增加而减少，显然股票的投资比例 $p_2$ 会随着 $\mu$ 的增加而增加，目标函数值也相应变大，这说明股票的预期收益率 $\mu$ 会影响投资者对股票和债券的投资比例；当固定 $\mu$ 时，债券投资比例 $p_1$ 会随着 $\sigma$ 的增大而增大，即当股票收益波动较大时，作为风险厌恶型投资者，会选择增加债券的投资比例，投资比例的变化，使得目标函数值也会增大。可见，不同参数取值对投资决策有着不同程度的影响，投资者在决策中可以加强对相关参数的控制，根据实际情况对不同投资产品的比例进行调整。

**Table 2.** Sensitivity analysis of parameters  $\mu$  and  $\sigma$  when the utility function is  $U_2(x) = \ln x$

**表 2.** 效用函数为 $U_2(x) = \ln x$ 时，参数 $\mu$ 和 $\sigma$ 的敏感性分析

| $\sigma$ | $\mu = 0.058$ |       | $\mu = 0.059$ |       | $\mu = 0.060$ |       | $\mu = 0.061$ |       | $\mu = 0.062$ |       |
|----------|---------------|-------|---------------|-------|---------------|-------|---------------|-------|---------------|-------|
|          | $p_1$         | $f$   | $p_1$         | $f$   | $p_1$         | $f$   | $p_1$         | $f$   | $p_1$         | $f$   |
| 0.190    | 0.905         | 0.415 | 0.903         | 0.416 | 0.901         | 0.417 | 0.899         | 0.417 | 0.900         | 0.418 |
| 0.195    | 0.905         | 0.416 | 0.903         | 0.417 | 0.901         | 0.417 | 0.899         | 0.418 | 0.898         | 0.419 |
| 0.200    | 0.906         | 0.417 | 0.904         | 0.418 | 0.902         | 0.418 | 0.900         | 0.419 | 0.899         | 0.420 |
| 0.205    | 0.907         | 0.418 | 0.905         | 0.419 | 0.903         | 0.419 | 0.902         | 0.420 | 0.900         | 0.420 |
| 0.210    | 0.908         | 0.419 | 0.906         | 0.419 | 0.905         | 0.420 | 0.903         | 0.421 | 0.901         | 0.421 |

其次在效用函数为 $U_2(x) = \ln x$ 时对投资决策方法中的参数进行敏感性分析。由表2可知，在效用函数 $U_2(x) = \ln x$ 时建立的模型中进行敏感性分析的结果与表1相类似，说明风险厌恶型投资者受股票的收益率 $\mu$ 及波动 $\sigma$ 的影响，和 $\sigma$ 呈负相关、 $\mu$ 呈正相关。

**Table 3.** Sensitivity analysis of parameters  $\mu$  and  $\sigma$  when the utility function is  $U_3(x)=1+e^{-x}$

**表 3.** 效用函数为  $U_3(x)=1+e^{-x}$  时, 参数  $\mu$  和  $\sigma$  的敏感性分析

| $\sigma$ | $\mu=0.058$ |       | $\mu=0.059$ |       | $\mu=0.060$ |       | $\mu=0.061$ |       | $\mu=0.062$ |       |
|----------|-------------|-------|-------------|-------|-------------|-------|-------------|-------|-------------|-------|
|          | $p_1$       | $f$   | $p_1$       | $f$   | $p_1$       | $f$   | $p_1$       | $f$   | $p_1$       | $f$   |
| 0.190    | 0.757       | 0.787 | 0.752       | 0.788 | 0.746       | 0.788 | 0.740       | 0.789 | 0.745       | 0.789 |
| 0.195    | 0.756       | 0.788 | 0.751       | 0.789 | 0.745       | 0.789 | 0.740       | 0.790 | 0.734       | 0.790 |
| 0.200    | 0.757       | 0.789 | 0.752       | 0.790 | 0.747       | 0.790 | 0.742       | 0.790 | 0.736       | 0.791 |
| 0.205    | 0.757       | 0.790 | 0.752       | 0.790 | 0.747       | 0.791 | 0.742       | 0.791 | 0.737       | 0.792 |
| 0.210    | 0.756       | 0.791 | 0.752       | 0.791 | 0.747       | 0.792 | 0.743       | 0.792 | 0.739       | 0.792 |

最后在效用函数为  $U_3(x)=1+e^{-x}$  时对投资决策方法中的参数进行敏感性分析。由表 3 可知, 当  $\sigma$  增大时, 对债券的投资比例  $p_1$  并不会明显减少, 甚至会增加, 反映了风险爱好型投资者为了获得更高收益具有一定风险追求。

## 5. 实际应用

合同节水管理是节水服务企业与用水单位以合同的形式, 为用水单位募集资本、集成先进技术、提供节水改造和管理等, 以分享节水效益方式收回投资、获取收益的一种新的节水管理机制[27]。以河北工程大学为例, 该校作为高校节水合同项目首所试点高校, 开展了合同节水管理试点工作。开展节水管理工作的主要措施有: (a) 更新用水设备, 通过对供水系统进行检测, 更换水资源浪费严重的基础设施。(b) 改造用水管网, 针对地下管网系统存在漏水、滴水等浪费水资源的现象, 对老旧地下管网进行改造。根据不确定投资决策模型, 在两种不同节水措施中寻找最佳投资比例, 实现节水效益最大化。但在决策中, 由于决策者风险偏好类型存在差异, 在两种节水措施的投入比例也各不相同。为了评估不同风险偏好类型的投资者对决策的影响, 下面将分别分析风险厌恶型、风险爱好型的投资者对合同节水管理决策的影响。

在投资决策模型中, 用  $\tilde{X}_t$  表示更新用水设备措施带来的节水效益, 用  $\tilde{Y}_t$  表示采用改造用水管网带来的节水效益。由于用水量与季节、人口数量等因素有关, 在采用改造用水管网措施时用水量会对节水效益产生影响。用  $C_t$  表示不确定过程, 量化在人为不确定性影响下供水管网改造措施的单位节水效益, 可以得到:

$$\begin{cases} d\tilde{X}_t = r\tilde{X}_t dt \\ d\tilde{Y}_t = \mu\tilde{Y}_t + \sigma\tilde{Y}_t dC_t \end{cases} \quad (13)$$

现在根据两种节水措施的组合, 即  $\xi = p_1 W_0 e^{rT} + p_2 W_0 e^{\mu T + \sigma C_T}$ , 其中  $p_1$ 、 $p_2$  分别代表在更新用水设备、改造用水管网两种措施的投入比例,  $W_0$  表示开展节水工作初始投入资金。式(13)中的各参数根据文献[27]分别取值为  $r=3\%$ ,  $\mu=0.25$ ,  $\sigma=0.2$ ,  $T=12$ 。下面分析风险厌恶型、风险爱好型投资者在合同节水管理中对两种节水措施的不同投资选择。

### 5.1. 风险厌恶型的不确定投资决策

当投资者为风险厌恶型, 选取的效用函数为  $U(x)=\ln x$  时, 运用基于不确定风险厌恶系数的投资决策方法进行分析。根据风险厌恶系数  $A(x)=-U''(x)/U'(x)$ , 将不确定变量  $\xi = p_1 W_0 e^{rT} + p_2 W_0 e^{\mu T + \sigma C_T}$  与其

相结合并求解不确定期望的最大值, 有

$$\begin{cases} \max f(p_1, p_2) = \int_0^1 \left[ p_1 e^{0.36} + p_2 e^3 \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{\sqrt{3} \times 0.2 \times 12}{\pi}} \right]^{-1} d\alpha \\ \text{subject to:} \\ p_1 + p_2 = 1 \\ p_1 \geq 0, p_2 \geq 0 \end{cases} \quad (14)$$

计算得到  $\lambda_R = 0.698$ , 代入模型(6), 有

$$\begin{cases} \max f(p_1, p_2) = E \left[ U(p_1 W_0 e^{rT} + p_2 W_0 e^{\mu T + \sigma C_T}) \right] \\ \quad - 0.698 \cdot V \left[ U(p_1 W_0 e^{rT} + p_2 W_0 e^{\mu T + \sigma C_T}) \right] \\ \text{subject to:} \\ p_1 + p_2 = 1 \\ p_1 \geq 0, p_2 \geq 0 \end{cases} \quad (15)$$

求解模型得到  $p_1 = 0.999$ ,  $p_2 = 0.001$ ,  $f_{\max} = 0.364$ 。对于风险厌恶型投资者, 为了降低决策风险, 实现节水效益最大, 将主要投资效益波动小的节水措施(a)。

## 5.2. 风险爱好型的不确定投资决策

当投资者为风险爱好型, 选取的效用函数为  $U(x) = 1 + e^{-x}$  时, 使用基于不确定风险爱好系数的投资决策方法进行分析。根据风险爱好系数  $B(x) = U''(x)/U'(x)$ , 将不确定变量  $\xi$  与其相结合, 求解  $B(\xi)$  的不确定期望的最大值并作为  $\lambda_p$  的值。有  $E[B(\xi)]_{\max} = -1$ , 即  $\lambda_p = -1$ , 代入模型(11), 有

$$\begin{cases} \max g(p_1, p_2) = E \left[ U(p_1 W_0 e^{rT} + p_2 W_0 e^{\mu T + \sigma C_T}) \right] \\ \quad - (-1) \cdot V \left[ U(p_1 W_0 e^{rT} + p_2 W_0 e^{\mu T + \sigma C_T}) \right] \\ \text{subject to:} \\ p_1 + p_2 = 1 \\ p_1 \geq 0, p_2 \geq 0 \end{cases} \quad (16)$$

求解模型得到  $p_1 = 0.000$ ,  $p_2 = 1.000$ ,  $f_{\max} = 0.962$ 。对于风险爱好型投资者, 将主要投资节水效益高但效益更具不确定的节水措施(b)。

综上所述, 风险厌恶型与风险爱好型的投资者在两种节水措施上的投资比例存在较大差异, 风险偏好会影响投资者决策。即使面对同一投资方案, 由于投资者风险偏好差异做出的投资决策也不同。

## 6. 结论

本文在不确定效用函数的投资决策方法基础上给出了不确定风险厌恶系数、不确定风险爱好系数两类不确定风险偏好系数的确定方法。通过将不确定效用函数的期望和方差与两类不确定风险偏好系数相结合, 构建了基于不确定风险厌恶系数与不确定效用函数的投资决策方法、基于不确定风险爱好系数与不确定效用函数的投资决策方法, 并对部分参数进行了敏感性分析, 进而研究风险偏好对投资决策的影响。并将构建的投资决策方法应用于河北工程大学合同节水管理实践, 以节水效益最大化为目标函数, 考虑投资者不同风险偏好, 分析了在风险厌恶型、风险爱好型的情况下, 不同投资者在两种节水措施上

投资比例的差异,验证了所提方法的实用性。研究结果表明,不同风险偏好的投资者在决策中所选方案存在较大差异,风险偏好会影响投资决策。

尽管本研究将不确定风险偏好系数与不确定效用函数进行投资决策具有一定意义,但仍存在一定局限性。未来可以考虑当不确定效用函数凹凸性存在分段情况(在特定区间是凸函数或凹函数),如何分析不确定效用函数的多种风险偏好属性,丰富基于不确定风险偏好系数与不确定效用函数的投资决策方法。此外,还可以考虑所提方法在多期动态决策情景下的应用,进而拓展应用的场景范围与适用边界。

## 基金项目

国家社会科学基金后期资助项目(项目批准号:20FGLB023)。

## 参考文献

- [1] Rabin, M. and Bazerman, M. (2019) Fretting about Modest Risks Is a Mistake. *California Management Review*, **61**, 34-48. <https://doi.org/10.1177/0008125619845876>
- [2] 李慧云, 叶国菊, 刘尉, 等. 基于决策者不同风险偏好与非理性行为下的区间数排序及其应用[J]. *工程数学学报*, 2025, 42(1): 127-138.
- [3] 朱少英, 徐渝, 何正文. 不同风险偏好下风险投资多目标决策模型及解法[J]. *系统工程*, 2003(3): 13-17.
- [4] 杨明森. 基于风险偏好和市场热度影响下的投资者行为研究[D]: [博士学位论文]. 武汉: 武汉大学, 2020.
- [5] 马佳欢, 车丽萍. 多目标规划最优化数学模型在组合投资中的应用[J]. *运筹与模糊学*, 2025, 12(5): 22-31.
- [6] 赵全华. 不同风险偏好下的投资选择与证券市场运行效率[D]: [硕士学位论文]. 天津: 天津财经大学, 2011.
- [7] 周少波, 徐晟. 基于非期望效用函数的投资决策研究[J]. *运筹与管理*, 2009, 18(2): 111-114.
- [8] 周庆健, 吕思瑶, 焦佳, 等. 双指数效用函数组合投资决策[J]. *大连理工大学学报*, 2011, 51(5): 766-770.
- [9] Liesiö, J. and Vilkkumaa, E. (2021) Nonadditive Multiattribute Utility Functions for Portfolio Decision Analysis. *Operations Research*, **69**, 1886-1908. <https://doi.org/10.1287/opre.2020.2046>
- [10] Bellman, R.E. and Zadeh, L.A. (1970) Decision-Making in a Fuzzy Environment. *Management Science*, **17**, B-141-B-164. <https://doi.org/10.1287/mnsc.17.4.b141>
- [11] Eti, S., Dinçer, H., Yüksel, S. and Gökalp, Y. (2023) Analysis of the Suitability of the Solar Panels for Hospitals: A New Fuzzy Decision-Making Model Proposal with the T-Spherical TOP-DEMATEL Method. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, **44**, 4613-4625. <https://doi.org/10.3233/jifs-222968>
- [12] Lin, S., Zhang, N., Zhou, A. and Shen, S. (2022) Risk Evaluation of Excavation Based on Fuzzy Decision-Making Model. *Automation in Construction*, **136**, Article ID: 104143. <https://doi.org/10.1016/j.autcon.2022.104143>
- [13] Kou, G., Pamucar, D., Dinçer, H. and Yüksel, S. (2023) From Risks to Rewards: A Comprehensive Guide to Sustainable Investment Decisions in Renewable Energy Using a Hybrid Facial Expression-Based Fuzzy Decision-Making Approach. *Applied Soft Computing*, **142**, Article ID: 110365. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2023.110365>
- [14] Yao, K. and Ji, X. (2014) Uncertain Decision Making and Its Application to Portfolio Selection Problem. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, **22**, 113-123. <https://doi.org/10.1142/s0218488514500056>
- [15] Liu, B. (2007) *Uncertainty Theory*. 2nd Edition, Springer-Verlag.
- [16] Liu, B. (2010) *Uncertainty Theory: A Branch of Mathematics for Modeling Human Uncertainty*. Springer-Verlag.
- [17] Xu, J. and Li, B. (2025) Uncertain Utility Portfolio Optimization Based on Two Different Criteria and Improved Whale Optimization Algorithm. *Expert Systems with Applications*, **268**, Article ID: 126281. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2024.126281>
- [18] Zhai, J. and Bai, M. (2017) Mean-Variance Model for Portfolio Optimization with Background Risk Based on Uncertainty Theory. *International Journal of General Systems*, **47**, 294-312. <https://doi.org/10.1080/03081079.2017.1414210>
- [19] Li, B., Sun, Y., Aw, G. and Teo, K.L. (2019) Uncertain Portfolio Optimization Problem under a Minimax Risk Measure. *Applied Mathematical Modelling*, **76**, 274-281. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2019.06.019>
- [20] 李圣国. 不确定风险与保险分析[D]: [博士学位论文]. 武汉: 华中师范大学, 2014.
- [21] 张晓斌, 韩颖. 不确定风险环境下的投资组合决策模型[J]. *黑龙江大学自然科学学报*, 2016, 33(6): 723-727.

- 
- [22] 汪旭. 带有损失厌恶的销售行为研究[D]: [硕士学位论文]. 北京: 北京邮电大学, 2024.
- [23] 张子婧. 不同风险偏好对风险金融资产投资的影响[D]: [硕士学位论文]. 上海: 上海财经大学, 2021.
- [24] Liu, Y. and Ha, M. (2010) Expected Value of Function of Uncertain Variables. *Journal of Uncertain Systems*, **4**, 181-186.
- [25] Yao, K. (2014) A Formula to Calculate the Variance of Uncertain Variable. *Soft Computing*, **19**, 2947-2953.  
<https://doi.org/10.1007/s00500-014-1457-8>
- [26] Black, F. and Scholes, M. (1973) The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, **81**, 637-654. <https://doi.org/10.1086/260062>
- [27] 哈明虎, 等. 中国合同节水管理理论与实践[M]. 北京: 科学出版社, 2020.