

权重未知的多值中智数群组决策方法

成鑫艳, 冯 源, 任璐娜

太原师范学院数学与统计学院, 山西 晋中

收稿日期: 2025年11月15日; 录用日期: 2025年12月9日; 发布日期: 2025年12月17日

摘 要

针对现有的多值中智集群组决策存在度量选择困难的问题, 本文提出了一种综合差异性度量方法。新度量不仅考虑了评判者自身提供决策信息的可靠性, 还结合了多值中智数之间的差异性, 从而更全面地反映决策信息的质量。在属性权重的计算中, 基于综合差异性度量构建优化模型, 通过最大化方案评价值与正理想方案的接近程度, 同时最小化其与负理想方案的偏离程度, 利用Lagrange函数获得最优属性权重。在专家权重的分配中, 创新性地引入四分位法, 以专家评价值与群体共识基准的差异为依据, 实现权重的客观分配。最后, 通过属性与专家加权集结得到综合评价并基于得分函数对方案进行排序。实例表明, 所提方法能够显著提升复杂不确定环境下决策的科学性与可靠性。

关键词

多值中智集, 综合差异性度量, 可靠性, 四分位法

Multi-Valued Neutrosophic Group Decision-Making Method with Unknown Weights

Xinyan Cheng, Yuan Feng, Luna Ren

Mathematics and Statistics College, Taiyuan Normal University, Jinzhong Shanxi

Received: November 15, 2025; accepted: December 9, 2025; published: December 17, 2025

Abstract

In the field of multi-valued neutrosophic group decision-making, selecting an appropriate measure has been a significant challenge due to the inherent complexity and uncertainty. To address the challenge of selecting an appropriate measure in existing multi-valued neutrosophic group decision-making, this paper proposes a comprehensive difference measure method. The new measure not

only considers the reliability of the decision information provided by the evaluators themselves but also integrates the differences between multi-valued neutrosophic numbers, thereby more comprehensively reflecting the quality of the decision information. In the calculation of attribute weights, an optimization model is constructed based on the comprehensive difference measure. By maximizing the proximity of the alternative evaluation value to the positive ideal alternative and minimizing its deviation from the negative ideal alternative, the optimal attribute weights are obtained using the Lagrange function. In the allocation of expert weights, the quartile method is innovatively introduced to achieve objective weight assignment based on the differences between expert evaluation values and the group consensus benchmark. Finally, comprehensive evaluation values are obtained through the weighted aggregation of attributes and experts, and the alternatives are ranked based on the score function. Case studies demonstrate that the proposed method can significantly enhance the scientificity and reliability of decision-making in complex and uncertain environments.

Keywords

Multi-Valued Neutrosophic Set, Comprehensive Difference Measure, Reliability, Quartile Method

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

为了应对不确定信息的问题, 1965 年 Zadeh [1] 教授借助隶属度提出了模糊集合, 形如 $A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in X\}$ 仅能表达“认可”程度。1986 年, Atanassov [2] 拓展了模糊集, 提出了具有肯定隶属度和非隶属度的直觉模糊集, 形如 $A = \{(x, \mu_A(x), \nu_A(x)) | x \in X\}$ 满足 $0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1$, 同时定义了 $\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x)$ 为犹豫度或不确定度, 仍无法脱离“单值判断”的局限。Yager [3] 将直觉模糊集推广到毕达哥拉斯模糊集, 形式与直觉模糊集一致, 但另需满足 $\mu_A(x)^2 + \nu_A(x)^2 \leq 1$ 。1999 年, Smarandache [4] 将不确定度写进了定义中, 提出了中智集的概念, 形如 $A = \{x \langle T_A(x), I_A(x), F_A(x) \rangle | x \in X\}$, 其中 $T_A(x), I_A(x), F_A(x)$ 分别表示真实程度、不确定程度和失真程度。2005 年和 2010 年, Wang 等又分别提出了区间中智集[5]和单值中智集[6]。但是在实际的决策问题当中, 决策者依然很难对中智集的真实程度、不确定程度和失真程度给出准确的数值或区间值, 往往只能通过若干离散的值来描述(如某属性真实程度可能为 0.6、0.7 或 0.8), 即采用离散值的有限集合来表达决策信息。因此, Wang 和 Li [7] 提出多值中智集的概念, 其真实程度、不确定度和失真程度均为闭区间[0, 1]上离散值的有限集合, 形成对以上模糊集的泛化——当决策信息充分、多值犹豫消除时, 多值中智集可自然退化: 若将三者的离散集合均约束为单元素, 即退化为单值中智集; 若进一步限定不确定度由真实程度与失真程度推导(失去独立性), 则退化为直觉模糊集; 若再令不确定程度与失真程度均为 0, 仅保留单元素真实程度, 便退化为模糊集。这种“泛化”特性, 使多值中智集既能适配复杂不确定场景, 又能兼容经典模糊集合的决策逻辑, 为本文解决多属性群组决策中“信息刻画不全面”的问题提供了理论基础。以社区开发方案评估为例, 当环境专家需要综合空气质量、水环境等多个维度给出一个整体评价时, 他可能被迫给出一个单值中智数 $\langle 0.7, 0.2, 0.3 \rangle$, 这个数值是多个维度评估结果的加权综合, 虽然反映了整体倾向, 却不可避免地丢失了各个维度的具体信息和内部差异。决策者无法从中辨识出方案可能在“空气质量”上表现极佳(真实程度为 0.9), 而在“水环境”影响上存在一定风险(真实程度为 0.5)。这种关键细节的丢失, 使得后续决策缺乏对具体风险的洞察力。多值中智集的提出, 为上述问题提供了强大的解决方案。它允许专家将多个维度的

评估值直接保留在一个集合中,同样对于环境专家的评价,可以完整地表示为 $\langle\{0.9,0.5\},\{0.2\},\{0.1,0.6\}\rangle$,其中 $\{0.9,0.5\}$ 分别对应空气质量、水环境这两个维度的评估,这种表达方式完整地保留了决策信息的原始结构,为决策过程中更精细的分析奠定了基础。

在多属性决策背景下,中智集的度量方法已成为当前研究的一个关键问题。目前,许多学者将直觉模糊集的距离测度[8],相似性测度[9],熵测度[10]等多种度量方法拓展到单值中智集中。Majumdar 和 Samant [11]提出用单值中智数熵测量和相似度来处理模糊信息,并讨论了单值中智数的不同类型的距离和不同的相似性测度。Ye [12]在模糊集交叉熵的基础上提出了单值中智集的交叉熵,并提出了基于单值中智集加权交叉熵的多属性决策方法。Huang [13]等提出了两个基于相对距离和基于相对相似性的新度量,并讨论了他们的性质。Zeng 等[14]构建了一种基于修正曼哈顿距离的单值中智集的新距离度量,并提出了一种新的基于距离的相似度量。Luo [15]等给出了基于矩阵范数的单值中性集之间的新距离并将该距离适用于模式识别和医疗诊断。Ali [16]等提出了两种新的方法来计算单值中智集的 Hausdorff 距离及其相应的相似性度量。Xu [17]等定义了一种新的单值中智距离度量,即单值中智 Kulczynski 距离,并证明了其有效性。Dasan 等[18]提出了一种通过正弦函数对单值中智集进行的距离测量,通过所提出的单值中智距离测量的最小测度值,开发了一种新的多属性决策问题方法。

近年来,单值中智集的度量研究已取得丰富成果。然而,对于更具一般性的多值中智集相关度量研究仍较为匮乏。Peng 等[19]首先定义了多值中智数的基本运算规则,然后提出了多值中智集的聚合算子,以及 ELECTRE 的延伸方法[20]。Peng 等[21]提出了一种多值中智集的比较方法,并利用聚合算子探讨了多属性决策问题的求解方法。Liu 等[22]在多值中智集的理论基础上定义了多值中智集的标准化 Hamming 距离和标准化 Euclidian 距离,并给出了两个多值中智集之间的运算规则,提出了多值中智数的 Bonferroni 平均算子方法,并研究了它们的一些性质。Zang 等[23]运用描述统计中的集中趋势测量与离散趋势测量,构造了概率多值中智统计距离公式。Xu [24]等提出了同时考虑正理想解与负理想解的改进的 VIKOR 方法并应用于实际案例以验证有效性。Xiao 等[25]在多值中智框架下基于前景理论提出了一种改进的 MULTIMOORA 方法,并将该方法应用于地铁建设方案的选择。Sahin [26]在多值中智环境中扩展了经典的 QUALIFLEX 方法,并通过 COVID-19 大流行期间防病毒口罩选择的实例,介绍了所提方法的有效性和适用性。

现有方法难以充分捕捉多值中智数内部数据的离散性和复杂性,针对这一研究空白,本文根据多值中智数内部数据特征构建了其可靠性测度,通过量化真实程度、不确定程度以及失真程度之间的内在关系,为评估决策信息的可信赖程度提供了新标准;其次,提出了改进的差异度量方法,用于精确衡量多值中智数之间的差异;在此基础上,设计了优化模型求解属性权重;进一步创新性地引入四分位法,实现了专家权重的客观分配;最后,通过消费者选购家电的实际案例,验证了所提方法的有效性和实用性。

2. 理论基础

2.1. 决策信息表

多属性群决策问题可定义为对给定的一组方案(离散,有限)进行排序择优。

设多属性群决策问题的方案集为 $X=\{X_1, X_2, \dots, X_m\}$,属性集为 $Y=\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$,决策专家集为 $H=\{H^1, H^2, \dots, H^s\}$, H^k 表示第 $k(k=1,2,\dots,s)$ 位专家,若记方案 $X_i(i=1,2,\dots,m)$ 中属性 $Y_j(j=1,2,\dots,n)$ 的评价值为 x_{ij}^k (如表 1 所示),则 $M^k=(x_{ij}^k)_{m \times n}$ 表示第 k 位决策专家对多属性决策问题的决策矩阵。

Table 1. Decision information table
表 1. 决策信息表

H^k	Y_1	...	Y_j	...	Y_n
X_1	x_{11}^k	...	x_{1j}^k	...	x_{1n}^k
...	...	...	...	...	...
X_i	x_{i1}^k	...	x_{ij}^k	...	x_{in}^k
...	...	...	...	...	...
X_m	x_{m1}^k	...	x_{mj}^k	...	x_{mn}^k

其中 x_{ij}^k 是第 $k(k=1,2,\dots,s)$ 位专家对第 $i(i=1,2,\dots,m)$ 个方案的第 $j(j=1,2,\dots,n)$ 个属性评估值, 另外 $W=\{w_j|j=1,2,\dots,n\}$ 表示各属性的权重, 反映属性的相对重要性; $V=\{v_k|k=1,2,\dots,s\}$ 表示专家权重。若评估值 x_{ij}^k 是多值中智数, 则决策信息表表示带有多值中智信息的决策问题, 因此下面介绍多值中智集。

2.2. 多值中智集

定义 1 [7] 设 X 为给定的有限论域, X 中的元素用 x 表示, 则 X 的多值中智集表示为:

$$\mathcal{A}=\{x\langle\tilde{T}_A(x),\tilde{I}_A(x),\tilde{F}_A(x)\rangle|x\in X\} \quad (1)$$

其中函数 $\tilde{T}_A(x)$, $\tilde{I}_A(x)$ 和 $\tilde{F}_A(x)$ 分别为 3 个属于 $[0, 1]$ 的有限离散值的集合, 分别表示元素 x 属于 X 的真实程度、不确定程度以及失真程度。对于 $x\in X$ 中的每一个点, 满足 $0\leq\gamma_A,\mu_A,\varphi_A\leq 1$, 其中 $\gamma_A\in\tilde{T}_A(x)$, $\mu_A\in\tilde{I}_A(x)$, $\varphi_A\in\tilde{F}_A(x)$ 。为简便起见, 我们将 $A=\langle\tilde{T}_A,\tilde{I}_A,\tilde{F}_A\rangle$ 称为多值中智数。

定义 2 [27] 设 $A=\langle\tilde{T}_A,\tilde{I}_A,\tilde{F}_A\rangle$ 为一个多值中智数, 则多值中智数的运算规则定义如下:

$$A^C=\left\langle\bigcup_{\varphi_A\in\tilde{F}_A}\{\varphi_A\},\bigcup_{\mu_A\in\tilde{I}_A}\{1-\mu_A\},\bigcup_{\gamma_A\in\tilde{T}_A}\{\gamma_A\}\right\rangle. \quad (2)$$

$$kA=\left\langle\bigcup_{\gamma_A\in\tilde{T}_A}\{1-(1-\gamma_A)^k\},\bigcup_{\mu_A\in\tilde{I}_A}\{\mu_A^k\},\bigcup_{\varphi_A\in\tilde{F}_A}\{\varphi_A^k\}\right\rangle,k>0. \quad (3)$$

定义 3 [27] 设 $A=\langle\tilde{T}_A,\tilde{I}_A,\tilde{F}_A\rangle$ 为一个多值中智数, 则 A 的得分函数和精确度函数定义如下:

$$s(A)=\frac{1}{l_{\tilde{T}_A}\cdot l_{\tilde{I}_A}\cdot l_{\tilde{F}_A}}\sum_{\gamma_A\in\tilde{T}_A,\mu_A\in\tilde{I}_A,\varphi_A\in\tilde{F}_A}\frac{\gamma_A-\mu_A-\varphi_A}{3}. \quad (4)$$

$$a(A)=\frac{1}{l_{\tilde{T}_A}\cdot l_{\tilde{I}_A}\cdot l_{\tilde{F}_A}}\sum_{\gamma_A\in\tilde{T}_A,\mu_A\in\tilde{I}_A,\varphi_A\in\tilde{F}_A}\frac{\gamma_A+\mu_A+\varphi_A}{3}. \quad (5)$$

其中, $\gamma_A\in\tilde{T}_A,\mu_A\in\tilde{I}_A,\varphi_A\in\tilde{F}_A$, $l_{\tilde{T}_A}$, $l_{\tilde{I}_A}$ 和 $l_{\tilde{F}_A}$ 分别表示 $\tilde{T}_A$, $\tilde{I}_A$ 和 $\tilde{F}_A$ 中元素的个数。

根据定义 3 给出的得分函数和精确度函数, 给出下面多值中智数的比较方法。

定义 4 [27] 设 $A=\langle\tilde{T}_A,\tilde{I}_A,\tilde{F}_A\rangle,B=\langle\tilde{T}_B,\tilde{I}_B,\tilde{F}_B\rangle$ 为两个多值中智数, 比较方法定义如下:

当 $s(A)>s(B)$ 或 $s(A)=s(B)$ 且 $a(A)>a(B)$ 时, 则 A 大于 B , 记为 $A\succ B$ 。

当 $s(A)=s(B)$ 且 $a(A)=a(B)$ 时, 则 A 等于 B , 记为 $A\sim B$ 。

当 $s(A)=s(B)$ 且 $a(A)<a(B)$ 或 $s(A)<s(B)$ 时, 则 A 小于 B , 记为 $A\prec B$ 。

定义 5 [21] 设 $\mathcal{A}=\{A_j\}=\{\langle\tilde{T}_{A_j},\tilde{I}_{A_j},\tilde{F}_{A_j}\rangle\}(j=1,2,\dots,n)$ 是多值中智数的集合, $W=(w_1,w_2,\dots,w_n)$ 是

$Y_j (j=1,2,\dots,n)$ 的属性权重, 并且满足 $w_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^n w_j = 1$, 则通过多值中智数加权平均算子聚合后的结果也是多值中智数, 如(6)式所示。

$$MVNWA(A_j) = \left\langle \bigcup_{\gamma_{A_j} \in \tilde{T}_{A_j}} \left\{ 1 - \prod_{j=1}^n (1 - \gamma_{A_j})^{w_j} \right\}, \bigcup_{\mu_{A_j} \in \tilde{I}_{A_j}} \left\{ \prod_{j=1}^n \mu_{A_j}^{w_j} \right\}, \bigcup_{\varphi_{A_j} \in \tilde{F}_{A_j}} \left\{ \prod_{j=1}^n \varphi_{A_j}^{w_j} \right\} \right\rangle. \quad (6)$$

3. 多值中智数的关键度量

3.1. 多值中智数的可靠性概念

本节根据多值中智数自身数据内部特点提出可靠性概念。通过判断决策信息的可靠性, 反映决策专家的真实意图。中智数的可靠性由三部分组成, 分别对三个指标 $\tilde{T}, \tilde{I}, \tilde{F}$ 和它们之间的关联关系进行评测。

多值中智数的组成部分 $\tilde{I}$ 表示不确定程度, 然而, $\tilde{I}$ 的值是由决策者主观给出的, 缺乏对其合理性的客观评估。实际上, 不确定程度是受真实程度 $\tilde{T}$ 和失真程度 $\tilde{F}$ 的内在约束, 三者之间存在逻辑关联。例如 $\langle \{0.8\}, \{0.9\}, \{0.3\} \rangle$, 决策者认为方案属于某一属性的真实程度为 0.8, 失真程度为 0.3, 而 0.9 的不确定程度显然不合理, 这表明该数据存在随意赋值的嫌疑, 参考价值不大。因此提出 $\tilde{I}$ 与标准不确定度之间的相似性来度量这种差异, 标准不确定度是由 $\tilde{T}, \tilde{F}$ 计算而得。为此给出如下定义。

定义 6 设多值中智数为, 其中 $\gamma_{A_j} \in \tilde{T}_A$, $\mu_{A_j} \in \tilde{I}_A$, $\varphi_{A_j} \in \tilde{F}_A$, 则标准不确定度为:

$$A = \langle \tilde{T}_A, \tilde{I}_A, \tilde{F}_A \rangle \quad \bar{I}_A = \bigcup_{\substack{\gamma_{A_j} \in \tilde{T}_A \\ \varphi_{A_j} \in \tilde{F}_A}} \left\{ \pi_{A_j} = \sqrt{1 - \gamma_{A_j}^2 - \varphi_{A_j}^2} \right\}. \quad (7)$$

由于 $\tilde{T}, \tilde{F}$ 的多值特性, $\bar{I}_A$ 通常为多值的。

定义 7 设多值中智数为 $A = \langle \tilde{T}_A, \tilde{I}_A, \tilde{F}_A \rangle$, 其中自身不确定度为 $\mu_{A_j} \in \tilde{I}_A$, 标准不确定度为 $\pi_{A_j} \in \bar{I}_A$, 则 $\tilde{I}_A$ 和 $\bar{I}_A$ 之间的相似性度量定义如下:

$$S(\tilde{I}_A, \bar{I}_A) = \frac{\sum_{i=1}^{l_{\tilde{I}_A}} \sum_{j=1}^{l_{\bar{I}_A}} \mu_{A_j} \pi_{A_j}}{l_{\tilde{I}_A} \sum_{i=1}^{l_{\tilde{I}_A}} \mu_{A_j}^2 + l_{\bar{I}_A} \sum_{j=1}^{l_{\bar{I}_A}} \pi_{A_j}^2 - \sum_{i=1}^{l_{\tilde{I}_A}} \sum_{j=1}^{l_{\bar{I}_A}} \mu_{A_j} \pi_{A_j}}. \quad (8)$$

其中 $\mu_{A_j} \in \tilde{I}_A$, $\pi_{A_j} \in \bar{I}_A$, $l_{\tilde{I}_A}, l_{\bar{I}_A}$ 分别是 $\tilde{I}_A$ 和 $\bar{I}_A$ 中元素的个数。 $S(\tilde{I}_A, \bar{I}_A)$ 越大, 说明决策者提供的信息越客观。

决策信息的可靠性可以通过真实程度、不确定程度以及失真程度的数量关系来体现, 例如多值中智数 $A = \langle \{0.3, 0.5\}, \{0.7\}, \{0.5, 0.6\} \rangle$, 其真实程度取值范围差值为 0.2, 失真程度取值范围差值为 0.1, 表明决策信息越精确; 真实程度的下界与失真程度的上界之和为 0.9, 同时, 真实程度的上界与失真程度的下界之和为 1, 逻辑更合理; 自身不确定程度 0.7 与由公式(7)计算而得的标准不确定度之间的相似性为 0.99, 这表明决策信息足够客观; 而多值中智数 $B = \langle \{0.2, 0.8\}, \{0.4, 0.5\}, \{0.5\} \rangle$, 其真实程度取值范围差值为 0.6, 表明信息不够精确; 真实程度的下界与失真程度的上界之和为 0.7, 同时, 真实程度的上界与失真程度的下界之和为 1.3, 取值跨度过大; 自身不确定度与标准不确定度之间的相似性为 0.75, 表明决策信息不够客观。通过上述分析, 提出可靠性算子应当满足的基本条件。设 $A = \langle \tilde{T}_A, \tilde{I}_A, \tilde{F}_A \rangle$ 为任意多值中智数, 其中 $\gamma^- = \inf \tilde{T}_A, \gamma^+ = \sup \tilde{T}_A, \varphi^- = \inf \tilde{F}_A, \varphi^+ = \sup \tilde{F}_A$ 。

条件 1 真实程度与失真程度的取值跨度 $(\gamma^+ - \gamma^- \text{ 与 } \varphi^+ - \varphi^-)$ 越小, 表明决策者的判断越精确, 可靠性 R 越高。

条件 2 真实程度的下(上)界与失真程度的上(下)界之和越接近 1, 可靠性越高。

条件 3 决策者自身不确定度 $\tilde{I}_A$ 与标准不确定度 $\bar{I}_A$ 之间的相似性越大, 说明决策者的主观判断越符合客观逻辑, 可靠性 R 越高。

下面将同时满足以上三个条件的算子定义为可靠性。

定义 8 设多值中智数 $A = \langle \tilde{I}_A, \tilde{I}_A, \tilde{F}_A \rangle$, 其中 $\gamma^- = \inf \tilde{I}_A, \gamma^+ = \sup \tilde{I}_A, \varphi^- = \inf \tilde{F}_A, \varphi^+ = \sup \tilde{F}_A$, $\varphi^- = \inf \tilde{F}_A, \varphi^+ = \sup \tilde{F}_A$, 则多值中智数的可靠性定义为:

$$R = 1 - \frac{(\gamma^+ - \gamma^-) + (\varphi^+ - \varphi^-) + |(\gamma^- + \varphi^+ - 1)| + |(\gamma^+ + \varphi^- - 1)| + (1 - S(\tilde{I}_A, \bar{I}_A))}{5}. \quad (9)$$

定理 1 多值中智数的可靠性满足 $0 \leq R \leq 1$ 。当决策信息完全可靠时 $R=1$; 当信息不可靠时 $R=0$ 。

例 对上述示例 $A = \langle \{0.3, 0.5\}, \{0.7\}, \{0.5, 0.6\} \rangle$, $B = \langle \{0.2, 0.8\}, \{0.4, 0.5\}, \{0.5\} \rangle$, 则可求得

$$\bar{I}_A = \{0.6245, 0.7071, 0.7416, 0.8124\}, S(\tilde{I}_A, \bar{I}_A) = 0.9901,$$

$$R_A = 1 - \frac{(0.5 - 0.3) + (0.6 - 0.5) + |(0.3 + 0.6 - 1)| + |(0.5 + 0.5 - 1)| + 0.0099}{5} = 0.91802.$$

$$\bar{I}_B = \{0.3317, 0.8426\}, S(\tilde{I}_B, \bar{I}_B) = 0.75322,$$

$$R_B = 1 - \frac{(0.8 - 0.2) + (0.5 - 0.5) + |(0.2 + 0.5 - 1)| + |(0.8 + 0.5 - 1)| + 0.75322}{5} = 0.71064.$$

$R_A > R_B$, 说明针对上面三点论述 R 是满足的, 符合对数据的直观感受。

3.2. 多值中智数的差异性度量

中智集的度量研究是中智理论发展中的核心内容之一, 针对中智集的不同特性与应用场景, 多样化的度量体系已被构建, 主要包括距离测度、信息熵和相似度等关键指标。

Wang 等[7]在提出多值中智集的同时给出了下列多值中智集的距离。

设 $A = \langle \tilde{I}_A, \tilde{I}_A, \tilde{F}_A \rangle$, $B = \langle \tilde{I}_B, \tilde{I}_B, \tilde{F}_B \rangle$ 为两个多值中智数则和之间的 Hamming 距离为:

$$d(A, B) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{|\tilde{I}_A|} \sum_{\gamma_A \in \tilde{I}_A} \min_{\gamma_B \in \tilde{I}_B} |\gamma_A - \gamma_B| + \frac{1}{|\tilde{I}_B|} \sum_{\gamma_B \in \tilde{I}_B} \min_{\gamma_A \in \tilde{I}_A} |\gamma_B - \gamma_A| + \frac{1}{|\tilde{I}_A|} \sum_{\mu_A \in \tilde{I}_A} \min_{\mu_B \in \tilde{I}_B} |\mu_A - \mu_B| \right. \\ \left. + \frac{1}{|\tilde{I}_B|} \sum_{\mu_B \in \tilde{I}_B} \min_{\mu_A \in \tilde{I}_A} |\mu_B - \mu_A| + \frac{1}{|\tilde{F}_A|} \sum_{\varphi_A \in \tilde{F}_A} \min_{\varphi_B \in \tilde{F}_B} |\varphi_A - \varphi_B| + \frac{1}{|\tilde{F}_B|} \sum_{\varphi_B \in \tilde{F}_B} \min_{\varphi_A \in \tilde{F}_A} |\varphi_B - \varphi_A| \right].$$

之后, Zhang [27]等给出了多值中智数 A 和 B 之间的标准化 Hamming 距离为:

$$d(A, B) = \frac{1}{3} (|\gamma_A - \gamma_B| + |\mu_A - \mu_B| + |\varphi_A - \varphi_B|).$$

标准化 Euclidian 距离为:

$$d(A, B) = \sqrt{\frac{1}{3} (|\gamma_A - \gamma_B|^2 + |\mu_A - \mu_B|^2 + |\varphi_A - \varphi_B|^2)}.$$

由于多值中智数中各分量所含元素个数不同, 上述公式均采用对元素进行扩展, 并使 A 和 B 中每个分量的元素个数都相同再计算的策略。基于此, Yang 等为了量化多值中智数长度的差异对距离计算结果的影响, 提出了改进的距离公式, 具体见文献[28]。

Peng 等[19]也提出了 Hamming-Hausdorff 距离为:

$$d(A, B) = \frac{1}{6} \left(\max_{\gamma_A \in \tilde{T}_A} \min_{\gamma_B \in \tilde{T}_B} |\gamma_A - \gamma_B| + \max_{\gamma_B \in \tilde{T}_B} \min_{\gamma_A \in \tilde{T}_A} |\gamma_B - \gamma_A| + \max_{\mu_A \in \tilde{I}_A} \min_{\mu_B \in \tilde{I}_B} |\mu_A - \mu_B| \right. \\ \left. + \max_{\mu_B \in \tilde{I}_B} \min_{\mu_A \in \tilde{I}_A} |\mu_B - \mu_A| + \max_{\varphi_A \in \tilde{F}_A} \min_{\varphi_B \in \tilde{F}_B} |\varphi_A - \varphi_B| + \max_{\varphi_B \in \tilde{F}_B} \min_{\varphi_A \in \tilde{F}_A} |\varphi_B - \varphi_A| \right)$$

相似度也是中智理论的一个重要度量工具, Yang 等[28]提出了多值中智数之间的相似度:

$$S_1(A, B) = \cos \left[\frac{\pi}{2} \left((|\gamma_A - \gamma_B|) \vee (\mu_A - \mu_B) \vee (\varphi_A - \varphi_B) \right) \right] \\ S_2(A, B) = \cot \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \left((|\gamma_A - \gamma_B|) \vee (\mu_A - \mu_B) \vee (\varphi_A - \varphi_B) \right) \right]$$

尽管现有研究在多值中智数的度量方面取得了一定进展, 但仍存在问题。一是元素个数的影响, 现有方法通常通过扩展使多值中智数中每个分量的元素个数相同, 导致度量结果可能失真; 二是元素间的差异, 传统度量方法往往计算对应元素之间的差异, 或通过取最大最小值来计算差异, 难以全面捕捉多值中智数的复杂性。

针对上述问题, 提出改进的差异性度量算子。新算子不需要扩展分量中的元素, 还能充分衡量三个分量 $\tilde{T}, \tilde{I}, \tilde{F}$ 中每个元素之间的差异。

定义 9 设 $A = \langle \tilde{T}_A, \tilde{I}_A, \tilde{F}_A \rangle$ 为一个多值中智数, 其中 $\gamma_{A_k} \in \tilde{T}_A$, $\mu_{A_k} \in \tilde{I}_A$, $\varphi_{A_k} \in \tilde{F}_A$, 设 $B = \langle \tilde{T}_B, \tilde{I}_B, \tilde{F}_B \rangle$ 为一个多值中智数, 其中 $\gamma_{B_k} \in \tilde{T}_B$, $\mu_{B_k} \in \tilde{I}_B$, $\varphi_{B_k} \in \tilde{F}_B$, 则 $T-, I-, F-$ 差异性度量分别为 $T-Md, I-Md, F-Md$ 计算公式如(10)~(12)所示。

$$T-Md(A, B) = \frac{\sum_{k=1}^{l_{\tilde{T}_A}} \sum_{k=1}^{l_{\tilde{T}_B}} |\gamma_{A_k} - \gamma_{B_k}|}{l_{\tilde{T}_A} \cdot l_{\tilde{T}_B}} \quad (10)$$

$$I-Md(A, B) = \frac{\sum_{k=1}^{l_{\tilde{I}_A}} \sum_{k=1}^{l_{\tilde{I}_B}} |\mu_{A_k} - \mu_{B_k}|}{l_{\tilde{I}_A} \cdot l_{\tilde{I}_B}} \quad (11)$$

$$F-Md(A, B) = \frac{\sum_{k=1}^{l_{\tilde{F}_A}} \sum_{k=1}^{l_{\tilde{F}_B}} |\varphi_{A_k} - \varphi_{B_k}|}{l_{\tilde{F}_A} \cdot l_{\tilde{F}_B}} \quad (12)$$

其中 $l_{\tilde{T}_A}, l_{\tilde{T}_B}, l_{\tilde{I}_A}, l_{\tilde{I}_B}, l_{\tilde{F}_A}, l_{\tilde{F}_B}$ 分别为 $\tilde{T}_A(x), \tilde{T}_B(x), \tilde{I}_A(x), \tilde{I}_B(x), \tilde{F}_A(x), \tilde{F}_B(x)$ 中元素的个数。

定理 2 对于多值中智数 A 与 B , 它们的 $T-, I-, F-$ 差异性度量满足以下性质:

- 1) $0 \leq T-Md(A, B) \leq 1$ 。
- 2) $T-Md(A, B) = T-Md(B, A)$ 。
- 3) $T-Md(A, C) \leq T-Md(A, B) + T-Md(B, C)$ 。

$I-Md, F-Md$ 同样满足上述三条性质。

证明 1) 显然 $T-Md(A, B)$ 满足非负性, 只需证明 $T-Md(A, B) \leq 1$ 。

对任意的 $\gamma_{A_k} \in \tilde{T}_A, \gamma_{B_k} \in \tilde{T}_B$, 由于 $0 \leq \gamma_{A_k} \leq 1, 0 \leq \gamma_{B_k} \leq 1$, 有 $|\gamma_{A_k} - \gamma_{B_k}| \leq 1$, 可得到 $\sum_{k=1}^{l_{\tilde{T}_B}} |\gamma_{A_k} - \gamma_{B_k}| \leq l_{\tilde{T}_B}$, 因此 $\sum_{k=1}^{l_{\tilde{T}_A}} \sum_{k=1}^{l_{\tilde{T}_B}} |\gamma_{A_k} - \gamma_{B_k}| \leq l_{\tilde{T}_A} \cdot l_{\tilde{T}_B}$, 所以可得 $T-Md(A, B) \leq 1$ 。

综上所述, $0 \leq T-Md(A, B) \leq 1$ 成立。

证明 2) $T-Md(A, B) = \frac{\sum_{k=1}^{l_{\tilde{T}_A}} \sum_{k=1}^{l_{\tilde{T}_B}} |\gamma_{A_k} - \gamma_{B_k}|}{l_{\tilde{T}_A} \cdot l_{\tilde{T}_B}} = \frac{\sum_{k=1}^{l_{\tilde{T}_B}} \sum_{k=1}^{l_{\tilde{T}_A}} |\gamma_{B_k} - \gamma_{A_k}|}{l_{\tilde{T}_B} \cdot l_{\tilde{T}_A}} = T-Md(B, A)$ 。

证明 3) 当 $\tilde{T}_A, \tilde{T}_B, \tilde{T}_C$ 中含有一个元素时, 设 $\tilde{T}_A = \{a\}, \tilde{T}_B = \{b\}, \tilde{T}_C = \{c\}$, 需证: $|a-c| \leq |a-b| + |b-c|$ 。

由绝对值三角不等式 $|a-c| = |(a-b) + (b-c)| \leq |a-b| + |b-c|$, 得证。

当 $\tilde{T}_A$ 中含有两个元素, $\tilde{T}_B, \tilde{T}_C$ 中只含有一个元素时, 设 $\tilde{T}_A = \{a_1, a_2\}, \tilde{T}_B = \{b\}, \tilde{T}_C = \{c\}$, 此时需证明不

等式: $\frac{|a_1-c| + |a_2-c|}{2} \leq \frac{|a_1-b| + |a_2-b|}{2} + |b-c|$ 。由绝对值三角不等式

$$|a_1-c| = |(a_1-b) + (b-c)| \leq |a_1-b| + |b-c| \quad (13)$$

$$|a_2-c| = |(a_2-b) + (b-c)| \leq |a_2-b| + |b-c| \quad (14)$$

(13) + (14) 可得到 $|a_1-c| + |a_2-c| \leq |a_1-b| + |a_2-b| + 2|b-c|$, 三角不等式得证。

当 $\tilde{T}_B$ 中含有两个元素, $\tilde{T}_A, \tilde{T}_C$ 中只含有一个元素时, 设 $\tilde{T}_A = \{a\}, \tilde{T}_B = \{b_1, b_2\}, \tilde{T}_C = \{c\}$, 此时需证明不

等式: $|a-c| \leq \frac{|a-b_1| + |a-b_2|}{2} + \frac{|b_1-c| + |b_2-c|}{2}$ 。由绝对值三角不等式

$$|a-c| = |(a-b_1) + (b_1-c)| \leq |a-b_1| + |b_1-c| \quad (15)$$

$$|a-c| = |(a-b_2) + (b_2-c)| \leq |a-b_2| + |b_2-c| \quad (16)$$

(15) + (16) 可得到 $2|a-c| \leq |a-b_1| + |a-b_2| + |b_1-c| + |b_2-c|$, 三角不等式得证。

当 $\tilde{T}_C$ 中含有两个元素, $\tilde{T}_A, \tilde{T}_B$ 中只含有一个元素时, 设 $\tilde{T}_A = \{a\}, \tilde{T}_B = \{b\}, \tilde{T}_C = \{c_1, c_2\}$, 此时需证明不

等式: $\frac{|a-c_1| + |a-c_2|}{2} \leq |a-b| + \frac{|b-c_1| + |b-c_2|}{2}$ 。由绝对值三角不等式

$$|a-c_1| = |(a-b) + (b-c_1)| \leq |a-b| + |b-c_1| \quad (17)$$

$$|a-c_2| = |(a-b) + (b-c_2)| \leq |a-b| + |b-c_2| \quad (18)$$

(17) + (18) 可得到 $|a-c_1| + |a-c_2| \leq 2|a-b| + |b-c_1| + |b-c_2|$, 三角不等式得证。

当 $\tilde{T}_A, \tilde{T}_B, \tilde{T}_C$ 中含两个元素时, 设 $\tilde{T}_A = \{a_1, a_2\}, \tilde{T}_B = \{b_1, b_2\}, \tilde{T}_C = \{c_1, c_2\}$, 需证明

$$|a_1-c_1| + |a_1-c_2| + |a_2-c_1| + |a_2-c_2| \leq |a_1-b_1| + |a_1-b_2| + |a_2-b_1| + |a_2-b_2| + |b_1-c_1| + |b_1-c_2| + |b_2-c_1| + |b_2-c_2|。$$

由绝对值三角不等式 $|a_1-c_1| \leq |a_1-b_1| + |b_1-c_1|$, $|a_1-c_2| \leq |a_1-b_2| + |b_2-c_2|$, $|a_2-c_1| \leq |a_2-b_2| + |b_2-c_1|$, $|a_2-c_2| \leq |a_2-b_1| + |b_1-c_2|$ 加和得证。

以此类推, 当 $\tilde{T}_A, \tilde{T}_B, \tilde{T}_C$ 中含有更多元素时, 三角不等式均成立。 $I-Md, F-Md$ 同理可证。

将 $T-Md, I-Md, F-Md$ 综合考虑定义两个多值中智数 A 与 B 之间的差异性。

定义 10 设 $A = \langle \tilde{T}_A, \tilde{I}_A, \tilde{F}_A \rangle, B = \langle \tilde{T}_B, \tilde{I}_B, \tilde{F}_B \rangle$ 为两个多值中智数, 则 A 与 B 之间的差异性定义为

$$Md = \sqrt{\frac{(T-Md)^2 + (I-Md)^2 + (F-Md)^2}{3}}. \quad (19)$$

定理 3 对于多值中智数 A 与 B , 它们的差异性度量满足以下性质:

1) $0 \leq Md(A, B) \leq 1$ 。2) $Md(A, B) = Md(B, A)$ 。3) $Md(A, C) \leq Md(A, B) + Md(B, C)$ 。

例 假设 $A = \langle \{0.4\}, \{0.6, 0.7\}, \{0.5, 0.7\} \rangle, B = \langle \{0.4, 0.5\}, \{0.5, 0.6\}, \{0.4\} \rangle$ 则

$$T-Md(A, B) = \frac{|0.4-0.4| + |0.4-0.5|}{1 \times 1} = 0.05,$$

$$F-Md(A, B) = \frac{|0.5-0.4| + |0.7-0.4|}{2 \times 1} = 0.2,$$

$$I - Md(A, B) = \frac{|0.6 - 0.5| + |0.6 - 0.6| + |0.7 - 0.5| + |0.7 - 0.6|}{2 \times 2} = 0.1,$$

$$Md(A, B) = \sqrt{\frac{0.05^2 + 0.1^2 + 0.2^2}{3}} = 0.1322876.$$

3.3. 多值中智数的综合差异度量

多值中智数的综合差异度量由可靠性测度和差异性度量共同构成。可靠性测度从内部数据特征出发, 通过评估真实程度、不确定程度与失真程度的逻辑关系(包括取值区间的精确性、上下界的互补性以及不确定度的规范性), 量化多值中智数自身的信质量; 差异性度量则从外部差异性角度, 计算真实程度、不确定程度和失真程度之间的差异, 衡量不同多值中智数的区分程度。通过整合内部可靠性与外部差异性, 提出多值中智数的综合差异度量。这个度量将在后续群组决策中用于属性权重的优化计算和专家权重的客观分配。若该度量采用线性加权形式 $D = \alpha Md + \beta R_A$, 难以体现可靠性测度对综合差异度量的影响, 且权重 α 和 β 的确定具有主观性。因此, 采用指数形式更合理。

定义 11 设一个多值中智数为 $A = \langle \tilde{T}_A, \tilde{I}_A, \tilde{F}_A \rangle$, 它的可靠性测度为 R_A , 若多值中智数 $B = \langle \tilde{T}_B, \tilde{I}_B, \tilde{F}_B \rangle$ 为标准, 则 A 与 B 之间的综合差异度量为:

$$D = Md^{R_A}. \quad (20)$$

其中当 $Md = 0$ 时, 我们规定 $D = Md^{R_A} = 0$ 。

当两个多值中智数 A_1, A_2 的可靠性测度相同时, D 由 Md 决定: Md 越大, D 越大, 例如当 $R_{A_1} = R_{A_2} = 0.8, Md(A_1, B) = 0.5, Md(A_2, B) = 0.3$ 时, $D(A_1, B) = 0.574 > D(A_2, B) = 0.382$; 当两个多值中智数 A_1, A_2 与 B 的差异 Md 相同时, D 由 R_{A_1}, R_{A_2} 决定: 可靠性测度越小, D 越大, 例如当 $Md(A_1, B) = Md(A_2, B) = 0.5, R_{A_1} = 0.5, R_{A_2} = 0.9$ 时, $D(A_1, B) = 0.707 > D(A_2, B) = 0.536$ 。

定理 4 $0 \leq D = Md^{R_A} \leq 1$ 。

证明 根据 $D = Md^{R_A} = e^{R_A \ln Md}$, 由于 $0 < Md \leq 1$, 故 $\ln^{Md} \leq 0$; 又由于 $0 \leq R_A \leq 1$, 有 $R_A \ln^{Md} \leq 0$, 因此可得到 $0 < e^{R_A \ln^{Md}} \leq 1$ 。

另当 $Md = 0$ 时, 规定 $D = Md^{R_A} = 0$ 。综上所述, D 的取值范围是 $[0, 1]$ 。

定理 5 D 随着 Md 的增加而单调递增; D 随着 R_A 的增加而单调递减。

证明 首先分析 D 随 Md 的变化趋势: 对 Md 求导, 得到

$$\frac{dD}{dMd} = R_A Md^{R_A-1}.$$

由于 $0 \leq Md \leq 1, 0 \leq R_A \leq 1$, 所以有 $R_A Md^{R_A-1} \geq 0$ 恒成立, 这表明 D 随 Md 的增加而单调递增。

其次分析 D 随 R_A 的变化趋势: 对 R_A 求导, 得到

$$\frac{dD}{dR_A} = Md^{R_A} \ln^{Md}.$$

当 $0 \leq Md \leq 1$ 时 $\ln^{Md} \leq 0$, 所以有 $Md^{R_A} \ln^{Md} \leq 0$ 恒成立, 这表明, D 随 R_A 的增加而单调递减。

4. 多值中智数的群组决策方法

在多属性群组决策问题中, 科学合理地整合专家意见并形成最终决策方案是核心目标。实现这一目标需要解决三个关键问题: 一是属性权重的确定, 即如何客观衡量各评价指标的重要性; 二是专家权重的确定, 即如何基于专家提供决策信息的质量进行差异化赋权; 三是信息聚合方法的选择, 即如何有效

集结决策信息获得合理的综合评价。针对这些问题, 基于多值中智数的综合差异度量, 提出一套系统的群组决策方案。首先, 通过构建优化模型求解属性权重, 使方案评价价值尽可能趋近正理想方案并远离负理想方案; 其次, 创新性地引入四分位法, 以专家评价价值与群体共识基准的差异为依据, 实现专家权重的合理分配; 最后, 结合属性与专家权重, 采用加权平均算子对多值中智信息进行集结, 并通过得分函数完成方案排序。

4.1. 属性权重的确定

求解多属性决策问题时必须对各属性的重要性加以权衡, 也就是属性权重。下面给出基于综合差异度量 D 的多值中智数确定属性权重的具体计算步骤。

步骤 1 根据规范化后的决策矩阵 $\tilde{M}^k = (\tilde{x}_{ij}^k)_{m \times n} = \langle \tilde{T}_{ij}^k, \tilde{I}_{ij}^k, \tilde{F}_{ij}^k \rangle_{m \times n}$, 其中 x_{ij} 为多值中智数。

步骤 2 确定属性 Y_j 下的正负理想方案 Q^+, Q^- 分别为作为计算综合差异度量过程中的标准 B 。

$$Q^+ = (Y_1^+, Y_2^+, \dots, Y_n^+) = \left\{ \left(\max_i \langle T_{ij}^+, I_{ij}^+, F_{ij}^+ \rangle \right) j=1, 2, \dots, n \right\} \quad (21)$$

其中 $T_j^+ = \left\{ \left(\max_i T_{ij} \right) \right\}, I_j^+ = \left\{ \left(\min_i I_{ij} \right) \right\}, F_j^+ = \left\{ \left(\min_i F_{ij} \right) \right\} i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$ 。

$$Q^- = (Y_1^-, Y_2^-, \dots, Y_n^-) = \left\{ \left(\min_j \langle T_j^-, I_j^-, F_j^- \rangle \right) j=1, 2, \dots, n \right\}. \quad (22)$$

其中 $T_j^- = \left\{ \left(\min_i T_{ij} \right) \right\}, I_j^- = \left\{ \left(\max_i I_{ij} \right) \right\}, F_j^- = \left\{ \left(\max_i F_{ij} \right) \right\} i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$ 。

步骤 3 由式(20)确定各备选方案到正、负理想方案的综合差异度量 $D^+(x_{ij}, Y_j^+)$ 与 $D^-(x_{ij}, Y_j^-)$ 。

步骤 4 建立优化模型。确定属性权重时应遵循以下原则: 通过优化属性权重, 使得各方案的评价价值尽可能趋近于正理想方案, 同时最大限度地偏离负理想方案。基于这一原则, 可建立如下优化模型:

$$\text{模型 1: } \begin{cases} \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n w_j^2 \left(\frac{D^+(x_{ij}, Y_j^+)}{D^+(x_{ij}, Y_j^+) + D^-(x_{ij}, Y_j^-)} \right)^2 \\ \text{s.t. } \sum_{j=1}^n w_j = 1, w_j \geq 0, j=1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

为方便获取最佳的属性客观权重, 设 ζ 为 Lagrange 算子, 构建如下 Lagrange 函数:

$$\text{Lag}(w, \zeta) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n w_j^2 \left(\frac{D^+(x_{ij}, Y_j^+)}{D^+(x_{ij}, Y_j^+) + D^-(x_{ij}, Y_j^-)} \right)^2 + 2\zeta \left(\sum_{j=1}^n w_j - 1 \right).$$

分别关于 w 和 ζ 求偏导:

$$\frac{\partial \text{Lag}(w, \zeta)}{\partial w_j} = 0, \frac{\partial \text{Lag}(w, \zeta)}{\partial \zeta} = 0.$$

则解方程式, 得

$$w_j = \left(\sum_{i=1}^m \left(\frac{D^+(x_{ij}, Y_j^+)}{D^+(x_{ij}, Y_j^+) + D^-(x_{ij}, Y_j^-)} \right)^2 \right)^{-1} \bigg/ \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m \left(\frac{D^+(x_{ij}, Y_j^+)}{D^+(x_{ij}, Y_j^+) + D^-(x_{ij}, Y_j^-)} \right)^2 \right)^{-1}. \quad (23)$$

通过求解上述模型, 可得出属性的权重 $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ 。

4.2. 专家权重的确定

在含有多值中智信息的决策问题中，合理确定专家权重是提高决策科学性的关键。为此，需要从专家群体评估数据中提取一个具有代表性的数据作为基准，该基准数据反映了专家群体的共识水平。与基准数据越接近的专家评价价值，表明其意见与多数专家越一致，应赋予其更高的权重。在确定基准数据值的过程中，本研究创新性地引入四分位数的统计方法来确定基准值：第一、二、三分位数分别等于该样本中所有数值由小到大排列后第 25%、50%、75% 的数字。下面给出由四分位法确定基准值的步骤：

步骤 1 将数据由小到大排列。对于各专家给出的方案评价价值，每个评价价值均由三个关键指标构成，具体可表示为 $\langle \tilde{T}, \tilde{I}, \tilde{F} \rangle$ 形式。将同一方案不同专家的三个指标数据分别由小到大排列得到三组离散数据集分别为 $\{\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \dots, \tilde{T}_n\}, \{\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \dots, \tilde{I}_n\}, \{\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \dots, \tilde{F}_n\}$ 。

步骤 2 确定分位数的位置。设 n 为数据的长度， Q^1, Q^2, Q^3 分别表示所求得第一、二、三分位数， p 表示分位数的位置。以数据集 $\{\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \dots, \tilde{T}_n\}$ 为例，第一、二、三分位数的位置分别为：

$$p(Q^1) = 1 + (n-1) \times 0.25; p(Q^2) = 1 + (n-1) \times 0.5; p(Q^3) = 1 + (n-1) \times 0.75.$$

步骤 3 确定分位数具体的数值。

$$Q^i = T \left[p(Q^i) \right] + \left[T \left(\left\lfloor p(Q^i) \right\rfloor + 1 \right) - T \left[p(Q^i) \right] \right] \times \left(p(Q^i) - \left\lfloor p(Q^i) \right\rfloor \right).$$

步骤 4 设得到数据集 $\{\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \dots, \tilde{T}_n\}$ 的四分位值(基准值)为 $\{Q^1, Q^2, Q^3\}$ 。对于数据集 $\{\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \dots, \tilde{I}_n\}$ 与 $\{\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \dots, \tilde{F}_n\}$ 以上述同样的步骤进行处理。

例 设 $A = \langle \{0.6, 0.7\}, \{0.4\}, \{0.5, 0.7\} \rangle, B = \langle \{0.5, 0.6\}, \{0.4, 0.5\}, \{0.4\} \rangle, C = \langle \{0.1, 0.2\}, \{0.6\}, \{0.3, 0.4\} \rangle$,

将数据从小到大排列得到三组离散数据集分别为 $\{\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{T}_3, \tilde{T}_4, \tilde{T}_5, \tilde{T}_6\} = \{0.1, 0.2, 0.5, 0.6, 0.6, 0.7\}$,

$\{\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{I}_3, \tilde{I}_4\} = \{0.4, 0.4, 0.5, 0.6\}$, $\{\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \tilde{F}_3, \tilde{F}_4, \tilde{F}_5\} = \{0.3, 0.4, 0.4, 0.5, 0.7\}$ 。

以 $\{\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \dots, \tilde{T}_6\}$ 为例， $n=6$ 可得到第一、二、三分位数的位置分别为：

$$p(Q^1) = 1 + (6-1) \times 0.25 = 2.25; p(Q^2) = 3.5; p(Q^3) = 4.75.$$

确定分位数数值： $Q^1 = 0.2 + (0.5 - 0.2) \times (2.25 - 2) = 0.275$, $Q^2 = 0.5 + (0.6 - 0.5) \times (3.5 - 3) = 0.55$, $Q^3 = 0.6 + (0.6 - 0.6) \times (4.75 - 4) = 0.6$ 。

数据集 $\{\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{I}_3, \tilde{I}_4\}$ 与 $\{\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \tilde{F}_3, \tilde{F}_4, \tilde{F}_5\}$ 以上述同样的步骤进行处理，可得四分位基准值为：

$$Q = \langle \{0.275, 0.55, 0.6\}, \{0.4, 0.45, 0.525\}, \{0.4, 0.4, 0.5\} \rangle.$$

根据公式(19)计算每个专家评价价值与四分位值的差异，则专家权重由下式计算：

$$v_i^k = \frac{1 - Md(X_i^k, Q_i)}{\sum_{k=1}^s (1 - Md(X_i^k, Q_i))}. \quad (24)$$

4.3. 多属性决策步骤

在得到属性权重与专家权重之后给出多属性群组决策的步骤如下：

步骤 1 规范化决策矩阵。由 2.1 节对多属性决策问题的描述，决策者做出的决策矩阵为 $M^k = (x_{ij}^k)_{m \times n}$,

根据以下定义对其进行规范化，得到标准化决策矩阵 $\tilde{M}^k = (\tilde{x}_{ij}^k)_{m \times n}$ 。

对于效益性指标，决策信息无需变动；对于成本型指标，其标准化公式为：

$$\tilde{x}_{ij}^k = (x_{ij}^k)^C = \left\langle \bigcup_{\varphi \in F_A} \{\varphi\}, \bigcup_{\mu \in I_A} \{1-\mu\}, \bigcup_{\gamma \in T_A} \{\gamma\} \right\rangle$$

步骤2 设由4.1节方法计算得出所有属性的权重信息 $w^k = (w_1^k, w_2^k, \dots, w_n^k)$ 。

步骤3 设运用计算所得的属性权重,通过公式(6)的加权集结方法对各专家评价价值进行信息融合,从而得到每位专家针对方案的综合评估结果。将所有专家的决策矩阵 $\tilde{M}^k = (\tilde{x}_{ij}^k)_{m \times n}$ 集结为综合决策矩阵 $Z = (z_{ik})_{m \times s}$, 其中 z_{ik} 表示第 k 位专家对第 i 个方案的综合评价价值。

步骤4 运用4.2节方法求得对于第 i 个方案专家对应的专家权重为 $v' = (v_i^k)_{m \times s}$ 。

步骤5 计算最终的专家权重 $V = (v_1, v_2, \dots, v_s)$, 其中 $v_k = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m v_i^k$ ($k=1, 2, \dots, s$)。

步骤6 通过式(6)的加权集结方法对各专家综合评价价值进行集结,得到方案 X_i 的最终评价价值为 $H = (h_1, h_2, \dots, h_m)^T$ 。

步骤7 由公式(4-5)计算每个方案最终评价价值的 $s(X_i)$ 与 $a(X_i)$ 并排序。

5. 案例分析

本文采用消费者购买家用电器的实例来说明方法的有效性。一顾客在购买家用电器时有 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 五款商品可供选择,考虑的评价指标为 Y_1 是价格、 Y_2 寿命、 Y_3 是功能,并邀请了三位专家 H^1, H^2, H^3 对上述指标做出评价。所有的评价值用多值中智数的形式来表示,其决策矩阵如下:

$$M^1 = \begin{pmatrix} \langle \{0.5, 0.7\}, \{0.3, 0.4\}, \{0.4\} \rangle & \langle \{0.5, 0.7\}, \{0.5, 0.7\}, \{0.6\} \rangle & \langle \{0.4\}, \{0.3\}, \{0.3, 0.5, 0.6\} \rangle \\ \langle \{0.4\}, \{0.4, 0.5\}, \{0.2, 0.5\} \rangle & \langle \{0.2, 0.6\}, \{0.5\}, \{0.2, 0.6\} \rangle & \langle \{0.7\}, \{0.4, 0.7\}, \{0.4, 0.7\} \rangle \\ \langle \{0.4, 0.6\}, \{0.5\}, \{0.6\} \rangle & \langle \{0.3, 0.4\}, \{0.4, 0.5\}, \{0.9\} \rangle & \langle \{0.2, 0.5\}, \{0.4\}, \{0.6, 0.8\} \rangle \\ \langle \{0.3, 0.5\}, \{0.6\}, \{0.5, 0.7\} \rangle & \langle \{0.4, 0.7\}, \{0.4\}, \{0.5, 0.6\} \rangle & \langle \{0.6, 0.8\}, \{0.4, 0.6\}, \{0.5\} \rangle \\ \langle \{0.5, 0.8\}, \{0.3\}, \{0.3, 0.5\} \rangle & \langle \{0.8\}, \{0.6, 0.8\}, \{0.4, 0.5\} \rangle & \langle \{0.4, 0.5\}, \{0.5\}, \{0.3, 0.5\} \rangle \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} \langle \{0.5\}, \{0.5, 0.8\}, \{0.5, 0.7\} \rangle & \langle \{0.3, 0.6\}, \{0.5, 0.6\}, \{0.3\} \rangle & \langle \{0.2, 0.5\}, \{0.3, 0.4\}, \{0.8\} \rangle \\ \langle \{0.3\}, \{0.4, 0.6\}, \{0.6, 0.8\} \rangle & \langle \{0.6\}, \{0.4, 0.6\}, \{0.4, 0.6\} \rangle & \langle \{0.3, 0.5\}, \{0.6\}, \{0.4, 0.7\} \rangle \\ \langle \{0.1, 0.6\}, \{0.4, 0.5\}, \{0.6\} \rangle & \langle \{0.2, 0.5\}, \{0.5\}, \{0.4, 0.8\} \rangle & \langle \{0.6\}, \{0.4, 0.5\}, \{0.4, 0.6\} \rangle \\ \langle \{0.3, 0.5\}, \{0.1\}, \{0.4, 0.8\} \rangle & \langle \{0.9\}, \{0.3, 0.4\}, \{0.2, 0.4\} \rangle & \langle \{0.3, 0.7\}, \{0.3\}, \{0.5, 0.6\} \rangle \\ \langle \{0.4, 0.6\}, \{0.5, 0.6\}, \{0.5\} \rangle & \langle \{0.5, 0.6\}, \{0.2, 0.5\}, \{0.3\} \rangle & \langle \{0.4, 0.6\}, \{0.4\}, \{0.3, 0.4\} \rangle \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} \langle \{0.3, 0.7\}, \{0.8, 0.9\}, \{0.6\} \rangle & \langle \{0.5, 0.9\}, \{0.7\}, \{0.2, 0.4\} \rangle & \langle \{0.4, 0.6\}, \{0.1, 0.4\}, \{0.2\} \rangle \\ \langle \{0.4\}, \{0.9\}, \{0.7, 0.8\} \rangle & \langle \{0.6\}, \{0.2\}, \{0.3, 0.5\} \rangle & \langle \{0.3, 0.7\}, \{0.2, 0.3\}, \{0.4\} \rangle \\ \langle \{0.4, 0.5\}, \{0.7\}, \{0.6, 0.7\} \rangle & \langle \{0.4, 0.7\}, \{0.3, 0.5\}, \{0.5\} \rangle & \langle \{0.6, 0.9\}, \{0.4\}, \{0.2, 0.4\} \rangle \\ \langle \{0.2, 0.3\}, \{0.6\}, \{0.5, 0.7\} \rangle & \langle \{0.7, 0.9\}, \{0.4\}, \{0.2, 0.4\} \rangle & \langle \{0.8\}, \{0.4, 0.6\}, \{0.2, 0.3\} \rangle \\ \langle \{0.5\}, \{0.5, 0.6\}, \{0.2, 0.8\} \rangle & \langle \{0.3, 0.7\}, \{0.3, 0.6\}, \{0.4\} \rangle & \langle \{0.2, 0.6\}, \{0.5\}, \{0.6, 0.7\} \rangle \end{pmatrix}$$

步骤1 规范化决策矩阵。利用公式对 Y_1 (成本型) 进行标准化得如下矩阵:

$$\tilde{M}^1 = \begin{pmatrix} \langle \{0.4\}, \{0.6, 0.7\}, \{0.5, 0.7\} \rangle & \langle \{0.5, 0.7\}, \{0.5, 0.7\}, \{0.6\} \rangle & \langle \{0.4\}, \{0.3\}, \{0.3, 0.5, 0.6\} \rangle \\ \langle \{0.2, 0.5\}, \{0.5, 0.6\}, \{0.4\} \rangle & \langle \{0.2, 0.6\}, \{0.5\}, \{0.2, 0.6\} \rangle & \langle \{0.7\}, \{0.4, 0.7\}, \{0.4, 0.7\} \rangle \\ \langle \{0.6\}, \{0.5\}, \{0.4, 0.6\} \rangle & \langle \{0.3, 0.4\}, \{0.4, 0.5\}, \{0.9\} \rangle & \langle \{0.2, 0.5\}, \{0.4\}, \{0.6, 0.8\} \rangle \\ \langle \{0.5, 0.7\}, \{0.4\}, \{0.3, 0.5\} \rangle & \langle \{0.4, 0.7\}, \{0.4\}, \{0.5, 0.6\} \rangle & \langle \{0.6, 0.8\}, \{0.4, 0.6\}, \{0.5\} \rangle \\ \langle \{0.3, 0.5\}, \{0.7\}, \{0.5, 0.8\} \rangle & \langle \{0.8\}, \{0.6, 0.8\}, \{0.4, 0.5\} \rangle & \langle \{0.4, 0.5\}, \{0.5\}, \{0.3, 0.5\} \rangle \end{pmatrix}$$

$$\tilde{M}^2 = \begin{pmatrix} \langle \{0.5, 0.7\}, \{0.3, 0.5\}, \{0.5\} \rangle & \langle \{0.3, 0.6\}, \{0.5, 0.6\}, \{0.3\} \rangle & \langle \{0.2, 0.5\}, \{0.3, 0.4\}, \{0.8\} \rangle \\ \langle \{0.6, 0.8\}, \{0.4, 0.6\}, \{0.3\} \rangle & \langle \{0.6\}, \{0.4, 0.6\}, \{0.4, 0.6\} \rangle & \langle \{0.3, 0.5\}, \{0.6\}, \{0.4, 0.7\} \rangle \\ \langle \{0.6\}, \{0.5, 0.6\}, \{0.1, 0.6\} \rangle & \langle \{0.2, 0.5\}, \{0.5\}, \{0.4, 0.8\} \rangle & \langle \{0.6\}, \{0.4, 0.5\}, \{0.4, 0.6\} \rangle \\ \langle \{0.4, 0.8\}, \{0.9\}, \{0.3, 0.5\} \rangle & \langle \{0.9\}, \{0.3, 0.4\}, \{0.2, 0.4\} \rangle & \langle \{0.3, 0.7\}, \{0.3\}, \{0.5, 0.6\} \rangle \\ \langle \{0.5\}, \{0.4, 0.5\}, \{0.4, 0.6\} \rangle & \langle \{0.5, 0.6\}, \{0.2, 0.5\}, \{0.3\} \rangle & \langle \{0.4, 0.6\}, \{0.4\}, \{0.3, 0.4\} \rangle \end{pmatrix}$$

$$\tilde{M}^3 = \begin{pmatrix} \langle \{0.6\}, \{0.1, 0.2\}, \{0.3, 0.7\} \rangle & \langle \{0.5, 0.9\}, \{0.7\}, \{0.2, 0.4\} \rangle & \langle \{0.4, 0.6\}, \{0.1, 0.4\}, \{0.2\} \rangle \\ \langle \{0.7, 0.8\}, \{0.1\}, \{0.4\} \rangle & \langle \{0.6\}, \{0.2\}, \{0.3, 0.5\} \rangle & \langle \{0.3, 0.7\}, \{0.2, 0.3\}, \{0.4\} \rangle \\ \langle \{0.6, 0.7\}, \{0.3\}, \{0.4, 0.5\} \rangle & \langle \{0.4, 0.7\}, \{0.3, 0.5\}, \{0.5\} \rangle & \langle \{0.6, 0.9\}, \{0.4\}, \{0.2, 0.4\} \rangle \\ \langle \{0.5, 0.7\}, \{0.4\}, \{0.2, 0.3\} \rangle & \langle \{0.7, 0.9\}, \{0.4\}, \{0.2, 0.4\} \rangle & \langle \{0.8\}, \{0.4, 0.6\}, \{0.2, 0.3\} \rangle \\ \langle \{0.2, 0.8\}, \{0.4, 0.5\}, \{0.5\} \rangle & \langle \{0.3, 0.7\}, \{0.3, 0.6\}, \{0.4\} \rangle & \langle \{0.2, 0.6\}, \{0.5\}, \{0.6, 0.7\} \rangle \end{pmatrix}$$

步骤2 利用式(23)计算各个专家的属性权重 $w^k = (w_1^k, w_2^k, \dots, w_n^k)$ 。专家 H^1, H^2, H^3 的属性权重分别为 $W^1 = (0.334, 0.345, 0.321)$, $W^2 = (0.401, 0.274, 0.325)$, $W^3 = (0.335, 0.361, 0.304)$;

步骤3 通过式(6)计算得到综合决策矩阵 $Z = (z_{ik})_{m \times s}$, 其中每个专家的综合评价价值分别为:

$$\begin{aligned} z_{11} &= \langle \{0.437, 0.528\}, \{0.451, 0.475, 0.507, 0.533\}, \{0.452, 0.506, 0.533, 0.565, 0.596, 0.632\} \rangle \\ z_{21} &= \langle \{0.416, 0.501, 0.540, 0.607\}, \{0.465, 0.495, 0.557, 0.592\}, \{0.315, 0.377, 0.460, 0.551\} \rangle \\ z_{31} &= \langle \{0.394, 0.425, 0.479, 0.506\}, \{0.431, 0.465\}, \{0.603, 0.661, 0.690, 0.757\} \rangle \\ z_{41} &= \langle \{0.504, 0.582, 0.603, 0.610, 0.665, 0.671, 0.688, 0.737\}, \{0.4, 0.456\}, \{0.422, 0.449, 0.5, 0.532\} \rangle \\ z_{51} &= \langle \{0.568, 0.592, 0.614, 0.636\}, \{0.596, 0.658\}, \{0.393, 0.424, 0.460, 0.462, 0.497, 0.5, 0.542, 0.585\} \rangle \\ z_{12} &= \langle \{0.361, 0.451, 0.452, 0.480, 0.530, 0.553, 0.554, 0.617\}, \\ &\quad \{0.345, 0.363, 0.379, 0.398, 0.424, 0.446, 0.465, 0.489\}, \{0.506\} \rangle \\ z_{22} &= \langle \{0.520, 0.570, 0.637, 0.674\}, \{0.456, 0.510, 0.537, 0.6\}, \{0.356, 0.398, 0.428, 0.478\} \rangle \\ z_{32} &= \langle \{0.516, 0.575\}, \{0.465, 0.5, 0.501, 0.538\}, \{0.229, 0.262, 0.277, 0.316, 0.471, 0.537, 0.569, 0.649\} \rangle \\ z_{42} &= \langle \{0.614, 0.707, 0.751, 0.811\}, \{0.466, 0.504\}, \{0.317, 0.336, 0.383, 0.389, 0.407, 0.413, 0.470, 0.499\} \rangle \\ z_{52} &= \langle \{0.469, 0.501, 0.535, 0.563\}, \{0.331, 0.362, 0.425, 0.465\}, \{0.337, 0.370, 0.396, 0.435\} \rangle \\ z_{13} &= \langle \{0.510, 0.566, 0.726, 0.758\}, \{0.202, 0.255, 0.308, 0.388\}, \{0.229, 0.294, 0.304, 0.391\} \rangle \\ z_{23} &= \langle \{0.569, 0.624, 0.667, 0.709\}, \{0.159, 0.179\}, \{0.361, 0.434\} \rangle \\ z_{33} &= \langle \{0.537, 0.579, 0.639, 0.672, 0.696, 0.724, 0.763, 0.785\}, \{0.27, 0.394\}, \{0.351, 0.378, 0.434, 0.467\} \rangle \\ z_{43} &= \langle \{0.685, 0.735, 0.788, 0.822\}, \{0.4, 0.452\}, \{0.2, 0.226, 0.229, 0.257, 0.259, 0.291, 0.294, 0.333\} \rangle \\ z_{53} &= \langle \{0.237, 0.382, 0.439, 0.521, 0.545, 0.612, 0.647, 0.714\}, \{0.386, 0.416, 0.496, 0.534\}, \{0.488, 0.511\} \rangle \end{aligned}$$

步骤4 运用四分位数法, 求得对于第 i 个方案的专家权重为:

$$v'_1 = (0.3389, 0.3457, 0.3154), v'_2 = (0.3461, 0.3540, 0.2999), v'_3 = (0.3253, 0.3396, 0.3351), \\ v'_4 = (0.3309, 0.3366, 0.3325), v'_5 = (0.3255, 0.3400, 0.3345).$$

步骤 5 得到最终的专家权重为 $V = (0.3333, 0.3432, 0.3235)$ 。

步骤 6 由专家的综合评价矩阵根据集结算子得到各方案综合评价值，并由此得到各方案的得分函数分别为 $s(X_1) = -0.091356$, $s(X_2) = -0.065421$, $s(X_3) = -0.10953$, $s(X_4) = -0.0336$, $s(X_5) = -0.12709$, 可得 $s(X_4) > s(X_2) > s(X_1) > s(X_3) > s(X_5)$, 因此最佳选择为 4 号商品。

6. 结论与展望

针对复杂不确定环境下的多属性群组决策问题，本文提出了一种基于多值中智数的决策方法，主要贡献为构建多值中智数两阶段度量框架：一是设计可靠性测度，从真实程度、不确定程度与失真程度的取值精确性、逻辑互补性及数据规范性出发，量化决策信息可信度；二是提出 T-、I-、F 三维差异性度量方法，无需强制对齐元素个数，全面捕捉多值中智数间差异，二者融合形成综合差异度量，丰富了多值中智数度量体系。在权重确定方面，基于综合差异度量构建优化模型，通过最大化方案与正理想方案的接近度、最小化与负理想方案的偏离度，结合 Lagrange 函数求解最优属性权重；创新性引入四分位法，以专家评价值与群体共识基准的差异为依据，实现专家权重的客观分配，平衡个体与群体差异。

实例分析表明，所提方法能够有效处理多值中智信息，提升决策的科学性与可靠性。与现有方法相比，本文提出的方法在处理多值中智信息时能够更全面地反映决策信息的质量，为复杂决策问题提供了一种新的解决方案。本研究未来可进一步探索将基于共识的权重与专家历史决策准确率、领域经验等特征融合的混合赋权机制，通过多维度指标更全面地刻画专家决策能力，进一步提升权重分配的合理性与决策结果的稳健性。

参考文献

- [1] Zadeh, L.A. (1965) Fuzzy Sets. *Information and Control*, **8**, 338-353. [https://doi.org/10.1016/s0019-9958\(65\)90241-x](https://doi.org/10.1016/s0019-9958(65)90241-x)
- [2] Atanassov, K.T. (1986) Intuitionistic Fuzzy Sets. *Fuzzy Sets and Systems*, **20**, 87-96. [https://doi.org/10.1016/s0165-0114\(86\)80034-3](https://doi.org/10.1016/s0165-0114(86)80034-3)
- [3] Yager, R.R. (2014) Pythagorean Membership Grades in Multicriteria Decision Making. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **22**, 958-965. <https://doi.org/10.1109/tfuzz.2013.2278989>
- [4] Smarandache, F. (1999) A Unifying Field in Logics: Neutrosophy, Neutrosophic Probability, Set and Logic. American Research Press, 111-114.
- [5] Wang, H., Florentin, S., Zhang, Y.Q., et al. (2005) Interval Neutrosophic Sets and Logic: Theory and Applications in Computing. *Computer Science*, **65**, 87-90.
- [6] Wang, H., Smarandache, F., Zhang, Y., et al. (2010) Single Valued Neutrosophic Sets. *Multispace and Multi-Structure*, **4**, 410-413.
- [7] 王坚强, 李新娥. 基于多值中智集的 TODIM 方法[J]. 控制与决策, 2015, 30(6): 1139-1142.
- [8] 李丹, 王贵君. 毕达哥拉斯模糊环境下海明距离测度的证明及推广[J]. 浙江大学学报(理学版), 2023, 50(4): 402-408.
- [9] 罗敏, 周晗, 陶志富, 等. 基于连续直觉模糊相似测度的多属性群决策方法[J]. 武汉理工大学学报(信息与管理工程版), 2017, 39(3): 299-305.
- [10] Wei, C., Wang, P. and Zhang, Y. (2011) Entropy, Similarity Measure of Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Sets and Their Applications. *Information Sciences*, **181**, 4273-4286. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2011.06.001>
- [11] Majumdar, P. and Samanta, S.K. (2014) On Similarity and Entropy of Neutrosophic Sets. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, **26**, 1245-1252. <https://doi.org/10.3233/ifs-130810>
- [12] Ye, J. (2014) Single Valued Neutrosophic Cross-Entropy for Multicriteria Decision Making Problems. *Applied Mathematical Modelling*, **38**, 1170-1175. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2013.07.020>

- [13] Huang, B., Yang, X., Feng, G. and Guo, C. (2021) Relative Measure-Based Approaches for Ranking Single-Valued Neutrosophic Values and Their Applications. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, **13**, 1535-1552. <https://doi.org/10.1007/s13042-021-01464-9>
- [14] Zeng, Y.Q., Ren, H.P., Yang, T.H., et al. (2022) A Novel Similarity Measure of Single-Valued Neutrosophic Sets Based on Modified Manhattan Distance and Its Applications. *Electronics*, **11**, Article No. 941. <https://doi.org/10.3390/electronics11060941>
- [15] Luo, M.X., Zhang, G.F. and Wu, L.X. (2022) A Novel Distance between Single Valued Neutrosophic Sets and Its Application in Pattern Recognition. *Soft Computing*, **26**, 11129-11137. <https://doi.org/10.1007/s00500-022-07407-y>
- [16] Ali, M., Hussain, Z. and Yang, M. (2022) Hausdorff Distance and Similarity Measures for Single-Valued Neutrosophic Sets with Application in Multi-Criteria Decision Making. *Electronics*, **12**, Article No. 201. <https://doi.org/10.3390/electronics12010201>
- [17] Xu, D.S. and Zhao, Y.H. (2023) A Novel Topsis Method for Multi-Attribute Decision Making Based on D-ANP and Single-Valued Neutrosophic Sets Distance Measure. *Engineering Letters*, **31**, EL_31_4_50.
- [18] Dasan, M.A., Bementa, E., Aslam, M. and Flower, V.F.L. (2024) Multi-Attribute Decision-Making Problem in Career Determination Using Single-Valued Neutrosophic Distance Measure. *Complex & Intelligent Systems*, **10**, 5411-5425. <https://doi.org/10.1007/s40747-024-01433-z>
- [19] Peng, J.J., Wang, J.Q., Wu, X.H., et al. (2015) Multi-Valued Neutrosophic Sets and Power Aggregation Operators with Their Applications in Multi-Criteria Group Decision-Making Problems. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, **8**, 345-363. <https://doi.org/10.1080/18756891.2015.1001957>
- [20] Peng, J.J., Wang, J.Q. and Wu, X.H. (2016) An Extension of the ELECTRE Approach with Multi-Valued Neutrosophic Information. *Neural Computing and Applications*, **28**, 1011-1022. <https://doi.org/10.1007/s00521-016-2411-8>
- [21] Peng, J.J. and Wang, J.Q. (2015) Multi-Valued Neutrosophic Sets and Its Application in Multi-Criteria Decision-Making Problems. *Neutrosophic Sets and Systems*, **10**, 3-17.
- [22] Liu, P.D., Zhang, L.L., Liu, X. and Wang, P. (2016) Multi-Valued Neutrosophic Number Bonferroni Mean Operators with Their Applications in Multiple Attribute Group Decision Making. *International Journal of Information Technology & Decision Making*, **15**, 1181-1210. <https://doi.org/10.1142/s0219622016500346>
- [23] 臧誉琪, 费晓香. 基于概率多值中智统计距离的灰色妥协关联双向投影决策法[J]. 统计与决策, 2021, 37(7): 162-166.
- [24] Xu, D.S., Hu, L.J., Peng, Y.Y., et al. (2015) An Extended VIKOR Method Based on Multi-Valued Neutrosophic Sets. *International Journal of Fuzzy Systems*, 1-13. <https://doi.org/10.1007/s40815-025-02003-2>
- [25] Xiao, F., Wang, J. and Wang, J. (2021) An Improved MULTIMOORA Method for Multi-Valued Neutrosophic Multi-Criteria Group Decision-Making Based on Prospect Theory. *Scientia Iranica*, **30**, 1822-1840. <https://doi.org/10.24200/sci.2021.56079.4540>
- [26] Şahin, R. (2022) Neutrosophic QUALIFLEX Based on Neutrosophic Hesitancy Index for Selecting a Potential Antivirus Mask Supplier over COVID-19 Pandemic. *Soft Computing*, **26**, 10019-10033. <https://doi.org/10.1007/s00500-022-07421-0>
- [27] 张丽丽. 基于多值中智集的多属性决策方法研究[D]: [硕士学位论文]. 济南: 山东财经大学, 2017.
- [28] 杨媛媛. 多值直觉中智集的度量研究[D]: [硕士学位论文]. 成都: 西南交通大学, 2021.