

# 面向UAR模型及其高阶UAR模型的修正的SCAD惩罚估计方法

扶庆阳, 王钧传, 张 鸿, 高林庆\*

河北工程大学数理科学与工程学院, 河北 邯郸

收稿日期: 2026年2月2日; 录用日期: 2026年3月19日; 发布日期: 2026年3月30日

## 摘 要

平滑剪切绝对偏差(SCAD)惩罚估计虽已应用于不确定自回归(UAR)模型, 但其依赖样本信息而未纳入先验信息; 同时, 能融合先验信息的修正的SCAD惩罚估计方法尚未拓展至UAR模型及其高阶UAR模型。为此, 本文将修正的SCAD惩罚估计方法拓展至UAR模型及其高阶UAR模型, 构建了面向UAR模型及其高阶UAR模型的修正的SCAD惩罚估计方法, 并通过两个数值算例分别验证其可行性与有效性。

## 关键词

UAR模型, 高阶UAR模型, 修正的SCAD惩罚估计方法, 阶数确定, 参数估计

# Modified SCAD Penalty Estimation for UAR Model and Higher-Order UAR Model

Qingyang Fu, Junchuan Wang, Hong Zhang, Linqing Gao\*

School of Mathematics and Physics, Hebei University of Engineering, Handan Hebei

Received: February 2, 2026; accepted: March 19, 2026; published: March 30, 2026

## Abstract

While the Smoothly Clipped Absolute Deviation (SCAD) penalty estimation has been applied to the Uncertain Autoregressive (UAR) model, it relies solely on sample information and fails to incorporate prior knowledge. Meanwhile, the modified SCAD penalty estimation method, which can integrate such prior information, has not yet been extended to the UAR model or its higher-order counterparts. To address this gap, this paper extends the modified SCAD penalty estimation to both the UAR model and its higher-order forms. The corresponding estimation framework is constructed, and two numerical examples are presented to respectively validate its feasibility and effectiveness.

## Keywords

**UAR Model, High-Order UAR Model, Modified SCAD Penalty Estimation, Order Determination, Parameter Estimation**

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

自回归(Autoregressive, AR)模型是传统时间序列模型的重要组成部分,在金融、环境等领域得到了广泛应用。Yule [1]首先给出了 AR 模型,之后,众多学者[2]-[5]对 AR 模型开展了进一步的完善和提升,并取得了丰硕的成果。然而,AR 模型在处理具有不确定性的数据时存在局限,为此,Liu 等[6] [7]将不精确数据视为不确定变量,构建不确定自回归(Uncertain Autoregressive, UAR)模型,并应用于二氧化碳浓度预测等方面。Lu 和 Peng [8]给出了高阶 UAR 模型。

在构建 UAR 模型和高阶 UAR 模型后,阶数确定和参数估计成为需要解决的两个重要问题[9]-[13]。在模型阶数确定方面,Liu 和 Yang [9]、Zhang 等[14]、Chen 和 Yang [15]均采用假设方式确定 UAR 模型阶数。在模型参数估计方面,Yang 等[10]提出了最小绝对偏差估计方法来估计 UAR 模型的未知参数,但该方法容易出现非唯一解的问题,Zhang 等[14]、Chen 与 Yang [12]利用 LASSO 估计和岭估计来估计 UAR 模型的未知参数,通过收缩偏大的系数,避免了最小绝对偏差估计方法非唯一解问题,但是相对应的会丢失一些观测信息,而且往往难以收缩到 0 且不易达到变量选择的目的。Chen 和 Yang [15]提出了运用极大似然估计方法来确定 UAR 模型的未知参数,通过该方法既可以估计未知的自回归参数,也可以得到扰动项的不确定分布参数。Gao 与 Xin [16]进一步提出极大似然估计方法来确定 UARMA 模型的未知参数,并将其应用于金融市场数据分析。相关结果表明,该模型在包含异常波动的数据场景中具有更好的稳健性与拟合灵活性。

在上述研究中,研究者们通常预设 UAR 模型阶数已知,然后根据这个假设的阶数进行参数估计。实际上,模型阶数是未知的,如何客观地确定模型阶数来进行参数估计是十分重要的。为此,Fan 和 Li [17]提出了用于变量选择和参数估计的平滑剪切绝对偏差(Smoothly Clipped Absolute Deviation, SCAD)惩罚函数,SCAD 惩罚函数主要是在高维数据中进行变量选择,进而达到参数估计的目的,而 Li 和 Yang [18]通过引入 SCAD 惩罚项,对于给定的  $\lambda_n$ ,实现了对 UAR 模型阶数与未知参数的同步估计。但是该方法未考虑到先验信息的影响,Ng 和 Yu [19]提出了一种修正的 SCAD 惩罚函数,建立了约束变量选择问题的信息准则 AIC 和 BIC,用来确定最优调谐参数,进而提升广义线性回归(Generalized Linear Regression, GLR)模型的拟合优度和稀疏性。不过,该修正的 SCAD 惩罚函数尚未应用于 UAR 模型及其高阶 UAR 模型的参数估计问题。

为了有效解决上述存在的问题,本文将修正的 SCAD 惩罚估计方法拓展至不确定时间序列分析中的 UAR 模型及其高阶 UAR 模型,以实现其阶数与参数的客观估计。

## 2. 面向 UAR 模型和高阶 UAR 模型的修正 SCAD 惩罚估计方法

Li 和 Yang [18]提出了一种面向 UAR 模型的传统 SCAD 惩罚估计方法。然而,传统的 SCAD 惩罚估计方法依赖于固定的调谐参数,缺乏选择惩罚权重的灵活性,难以在实践中充分利用信息准则(AIC 和

BIC)进行优化。为了避免传统的 SCAD 惩罚函数的缺点,Ng 和 Yu [19]提出了一种修正的 SCAD 惩罚函数,该函数不仅保留了线性约束下的 oracle 属性,而且允许通过先验信息灵活选择调谐参数,他们将其应用于广义线性回归模型。本节将修正的 SCAD 惩罚函数应用于 UAR 模型和高阶 UAR 模型的参数估计。

## 2.1. 面向 UAR 模型和高阶 UAR 模型的修正 SCAD 惩罚估计方法

用于预测未来值的 UAR 模型定义如下:

$$X_t = \sum_{i=1}^p c_i X_{t-i} + \varepsilon_t \quad (1)$$

其中  $\varepsilon_t$  为扰动项,  $c_i (i=1,2,\dots,p)$  为 UAR 模型的不确定自回归系数, 设  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_p)^T$  为不确定自回归系数向量。设  $p = n_0$ , 当  $n_0$  充分大时, (1) 可以表示为高阶 UAR 模型 [8]。

下面以高阶 UAR 模型为例, 给出面向高阶 UAR 模型的修正 SCAD 惩罚估计方法。为确保模型参数估计满足实际情况, 并提升估计精度, 我们引入线性约束  $\mathbf{Rc} = \mathbf{r}$ , 其中,  $\mathbf{R}$  是  $q \times n_0$  约束矩阵,  $\mathbf{r}$  是  $q$  维向量。该线性约束要求满足。此约束减少了参数空间的自由度, 从而增强了模型的稳定性和稀疏性, 尤其在样本量较小的情况下效果显著。

基于修正的 SCAD 惩罚估计函数, 我们提出了面向高阶 UAR 模型的修正的 SCAD 惩罚估计方法, 该估计通过在约束  $\mathbf{Rc} = \mathbf{r}$  下最小化以下目标函数, 将先验信息和样本信息结合起来:

$$Q(\mathbf{c}|\mathbf{X}_n) + n \sum_{i=1}^{n_0} P_{\lambda_n}(|c_i|) \quad (2)$$

其中  $Q(\mathbf{c}|\mathbf{X}_n)$  是最小二乘目标函数,  $P_{\lambda_n}(|c_i|)$  是约束条件  $\mathbf{Rc} = \mathbf{r}$  下的修正 SCAD 惩罚函数。

面向高阶 UAR 模型的修正的 SCAD 惩罚估计具体如下:

$$(\hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_{n_0}) = \arg \min_{c_1, c_2, \dots, c_{n_0}} \left\{ \sum_{t=n_0+1}^n E \left[ \left( X_t - \sum_{i=1}^{n_0} c_i X_{t-i} \right)^2 \right] + (n - n_0) \sum_{i=1}^{n_0} P_{\lambda_n}(c_i) \right\}$$

s.t.  $\mathbf{Rc} = \mathbf{r}$ , 其中修正的 SCAD 惩罚函数为:

$$P_{\lambda_n}(c_i) = \begin{cases} \lambda_n k^{-1} \left[ (1 + |c_i|)^k - 1 \right], & |c_i| \leq \lambda_n, \\ \frac{-(1 + \lambda_n)^{k-1}}{2(a-1)} \left[ c_i^2 - 2a\lambda_n |c_i| + (2a-1)\lambda_n^2 \right] + \frac{\lambda_n}{k} \left[ (1 + \lambda_n)^k - 1 \right], & \lambda_n < |c_i| \leq a\lambda_n, \\ \frac{a-1}{2} (1 + \lambda_n)^{k-1} \lambda_n^2 + \frac{\lambda_n}{k} \left[ (1 + \lambda_n)^k - 1 \right], & |c_i| > a\lambda_n, \end{cases} \quad (3)$$

其中, 调节参数  $a = 3.7, \lambda_n > 0$ 。

注: 当  $k = 1$  时, 修正的 SCAD 惩罚函数退化为 Fan 和 Li [18] 提出的 SCAD 惩罚函数。

在选择最优调谐参数时, 需要综合考虑其与样本量的关系。除了使用来控制惩罚强度外, 还可以采用 AIC、BIC 等信息准则来确定最优调谐参数。这些信息准则基于修正的 SCAD 惩罚函数和有效参数的自由度。面向高阶 UAR 模型的修正的 SCAD 惩罚估计方法通过引入非凸惩罚项, 提出了新的 AIC 和 BIC 信息准则, 有效解决了传统准则在高惩罚设置下的局限性(此时 AIC/BIC 曲线可能出现单调性), 从而提升了模型的稀疏性和适应性。

下面通过计算有效自由度  $\text{eff}(\lambda_n)$  确定最佳调谐参数  $\lambda_n$ , 其中  $\text{eff}(\lambda_n)$  定义如下

$$\text{eff}(\lambda_n) = \text{trace}(\mathbf{H}^{\mathbf{R}}(\lambda_n)),$$

其中  $\mathbf{H}^R(\lambda_n)$  是考虑惩罚和约束的帽子矩阵,  $\mathbf{H}^R(\lambda_n)$  定义如下:

$$\mathbf{H}^R(\lambda_n) = \mathbf{X}_n \left( \mathbf{A}_n^{-1} - \mathbf{A}_n^{-1} \mathbf{R}^T (\mathbf{R} \mathbf{A}_n^{-1} \mathbf{R}^T)^{-1} \mathbf{R} \mathbf{A}_n^{-1} \right) \mathbf{X}_n^T,$$

其中  $\mathbf{X}_n$  为设计矩阵,  $\mathbf{A}_n = \mathbf{X}_n^T \mathbf{X}_n + n \lambda_n \mathbf{I}_{n_0}$  为带惩罚项的设计矩阵,  $\mathbf{R}$  为约束矩阵,  $\mathbf{I}_{n_0}$  是  $n_0 \times n_0$  的单位矩阵。帽子矩阵  $\mathbf{H}^R(\lambda_n)$  将观测数据投影到拟合值上同时整合了惩罚项和约束条件。有效自由度  $\text{eff}(\lambda_n)$  反映了模型在这些约束条件下的复杂程度。

为解决上述 AIC 和 BIC 在高惩罚或约束条件下的局限性, 我们提出了一种约束条件下的信息准则, 其中 AIC 和 BIC 的表达式如下:

$$\text{AIC} = -2 \log L(\hat{\mathbf{c}} | \mathbf{X}) + 2 \text{eff}(\lambda_n),$$

$$\text{BIC} = -2 \log L(\hat{\mathbf{c}} | \mathbf{X}) + \text{eff}(\lambda_n) \log n,$$

在给定约束条件下, 合理选择 AIC 和 BIC 能在模型拟合度与稀疏性之间取得平衡。该准则能有效惩罚小系数, 同时尽量减少对大系数的影响, 从而避免 AIC 和 BIC 在高惩罚下出现的单调性问题。

## 2.2. 求解未知参数向量 $\mathbf{c}$

在本节中, 我们讨论如何利用修正的 SCAD 惩罚估计确定 UAR 模型及其高阶 UAR 模型的阶数并估计其未知参数。首先, 提出一种基于 AIC 和 BIC 信息准则的算法, 用于从候选参数集中筛选最优调参组合。最后, 通过计算均方绝对误差(MAD), 我们设定最优调谐参数, 从最优候选参数集中选取最佳调谐参数, 从而确定 UAR 模型及其高阶 UAR 模型的参数估计。

定理[18]: 设不确定观测值  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  是独立同分布的不确定变量, 其标准不确定分布为  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ , 满足高阶 UAR 模型。为计算参数向量  $(c_1, c_2, \dots, c_{n_0})$ , 利用修正的 SCAD 惩罚估计方法的最优解  $(\hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_{n_0})$  也是下列目标函数的最优解:

$$\min_{c_1, c_2, \dots, c_{n_0}} \left\{ \sum_{i=n_0+1}^n \int_0^1 \left( \Phi_i^{-1}(\alpha) - \sum_{i=1}^{n_0} c_i \gamma_{i-i}^{-1}(\alpha, c_i) \right)^2 d\alpha + (n - n_0) \sum_{i=1}^{n_0} P_{\lambda_n}(|c_i|) \right\}, \quad (4)$$

$$\text{其中 } \gamma_{i-i}^{-1}(\alpha, c_i) = \begin{cases} \Phi_{i-i}^{-1}(\alpha), & c_i \geq 0 \\ \Phi_{i-i}^{-1}(1-\alpha), & c_i < 0 \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, n_0.$$

为了初始化修正的 SCAD 惩罚估计算法, 我们定义以下目标函数:

$$f(c_1, c_2, \dots, c_{n_0}) = \left\{ \sum_{i=n_0+1}^n \int_0^1 \left( \Phi_i^{-1}(\alpha) - \sum_{i=1}^{n_0} c_i \gamma_{i-i}^{-1}(\alpha, c_i) \right)^2 d\alpha + (n - n_0) \sum_{i=1}^{n_0} P_{\lambda_n}(|c_i|) \right\}, \quad (5)$$

$$(\hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_{n_0}) = \arg \min_{c_1, c_2, \dots, c_{n_0}} f(c_1, c_2, \dots, c_{n_0}) \quad (6)$$

$$\text{其中 } \gamma_{i-i}^{-1}(\alpha, c_i) = \begin{cases} \Phi_{i-i}^{-1}(\alpha), & c_i \geq 0 \\ \Phi_{i-i}^{-1}(1-\alpha), & c_i < 0 \end{cases}.$$

为求解(4)所对应的非凸惩罚最小化问题, 采用局部二次近似思想对惩罚项进行二次化, 从而在每次迭代中转化为带权二次规划问题, 便于使用牛顿-拉弗森(Newton-Raphson)算法求解。具体地, 设  $m$  次迭代的当前估计为

$$\hat{\mathbf{c}}^{(m)} = (\hat{c}_1^{(m)}, \hat{c}_2^{(m)}, \dots, \hat{c}_{n_0}^{(m)})$$

当  $|\hat{c}_i^{(m)}|$  非常接近 0 时, 为增强稀疏性可直接令  $|\hat{c}_i^{(m)}| = 0$ ; 否则在  $|\hat{c}_i^{(m)}|$  的邻域内, 对  $p_{\lambda_n}(|c_i|)$  作二阶泰勒展开并利用  $|c_i|$  的局部线性化, 可得

$$\begin{aligned} p_{\lambda_n}(|c_i|) &\approx p_{\lambda_n}(|\hat{c}_i^{(m)}|) + p'_{\lambda_n}(|\hat{c}_i^{(m)}|) \operatorname{sgn}(c_i^{(m)})(c_i^{(m)} - \hat{c}_i^{(m)}) + \frac{1}{2} p''(|\hat{c}_i^{(m)}|)(c_i^{(m)} - \hat{c}_i^{(m)})^2 \\ &= p_{\lambda_n}(|\hat{c}_i^{(m)}|) + \frac{p'_{\lambda_n}(|\hat{c}_i^{(m)}|)}{2|\hat{c}_i^{(m)}|} (c_i^{(m)} - \hat{c}_i^{(m)})^2, c_i \neq 0 \end{aligned}$$

将上述二次化近似代入(4), 并略去与  $c$  无关的常数项, 可得到第  $m$  次迭代的近似目标函数

$$f^{(m)}(c) = \sum_{t=n_0+1}^n \int_0^1 \gamma_t(\alpha; c)^2 d\alpha + (n - n_0) \sum_{i=1}^{n_0} |c_i|^2$$

因此(4)每次迭代中等价于一个带权 ridge 型的约束/无约束最小二乘子问题。进一步, 在将积分项离散化后,  $f^{(m)}(c)$  的梯度与海森矩阵可显式计算, 据此使用牛顿-拉弗森迭代更新。若同时存在线性约束  $\mathbf{Rc} = \mathbf{r}$ , 则可在每次更新后采用 KKT 系统求解或将无约束更新结果投影到可行域, 以保证迭代点满足约束, 重复迭代直至收敛。由此(4)的积分型目标函数可与修正 SCAD 惩罚项共同转化为可计算的数值优化流程。

设  $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_n$  是一个不确定的时间序列,  $c_1^*, c_2^*, \dots, c_{n_0}^*$  分别是  $c_1, c_2, \dots, c_{n_0}$  的估计值。定义信息准则为

$$\text{MAD} = \frac{1}{n - n_0 + 1} \sum_{t=n_0+1}^n \int_0^1 \left| \Phi_t^{-1}(\alpha) - \sum_{i=1}^{n_0} c_i^* \gamma_{t-i}^{-1}(\alpha, c_i^*) \right| d\alpha, \quad (7)$$

其中 MAD 是评估预测模型性能的指标, 用于衡量实际观测值与模型预测值之间的平均绝对差异, 此时, 具有最小信息准则的调谐参数  $\lambda_n$  对应的 UAR 模型阶数即为最优模型阶数。

因此, 未知参数求解算法如下所示:

步骤 1: 通过(6)初始化参数  $(\hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_{n_0})$ 。

步骤 2: 根据参数  $(\hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_{n_0})$ , 遍历  $\lambda_n$ , 步长为 0.01 利用 2.1 节的方法计算一组 AIC 和 BIC, 选取最小 AIC 值对应的  $\lambda_n$ , 记为  $\lambda_n^{\text{AIC}}$ , 选取最小 BIC 值对应的  $\lambda_n$  记为  $\lambda_n^{\text{BIC}}$ 。

步骤 3: 将  $\lambda_n = \lambda_n^{\text{AIC}}$  和  $\lambda_n = \lambda_n^{\text{BIC}}$  分别代入(4), 使用牛顿-拉弗森算法通过迭代公式

$$\hat{c}_{i(m+1)} = \hat{c}_{i(m)} - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial c_i^2} \right)^{-1} \left( \frac{\partial f}{\partial c_i} \right), i = 1, 2, \dots, n_0, m = 1, 2, \dots,$$

更新参数  $\hat{c}_i$  分别获得两组高阶 UAR 模型参数  $\hat{c}^{\text{AIC}}$  和  $\hat{c}^{\text{BIC}}$ 。

步骤 4: 将两组系数向量  $\hat{c}^{\text{AIC}}$  和  $\hat{c}^{\text{BIC}}$  分别代入(7), 计算 MAD, 选取使 MAD 最小化的参数  $(c_1^*, c_2^*, \dots, c_{n_0}^*)$  作为当前最优参数估计, 并记录对应的最优调谐参数  $\lambda_n^*$ , 以及高阶 UAR 模型参数向量  $\hat{\mathbf{c}}^*$ 。

步骤 5: 使用步骤 4 得出  $\hat{\mathbf{c}}^* = (\hat{c}_1^*, \hat{c}_2^*, \dots, \hat{c}_{n_0}^*)^T$  替换上一轮得到的  $\hat{\mathbf{c}} = (\hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_{n_0})^T$  代入

$$\left| \frac{\hat{c}_i^* - \hat{c}_i}{\hat{c}_i} \right|, i = 1, 2, \dots, n_0,$$

如果全部  $\hat{c}_i^*$  满足条件

$$\left| \frac{\hat{c}_i^* - \hat{c}_i}{\hat{c}_i} \right| \leq 10^{-3}, i = 1, 2, \dots, n_0,$$

则高阶 UAR 模型的最优参数向量  $\hat{\mathbf{c}}^*$  被获取, 并记录对应的最终  $\lambda_n$ 。否则返回步骤 2。

### 2.3. 残差分析与假设检验

高阶 UAR 模型残差如下所示:

$$\hat{\varepsilon}_t = \hat{X}_t - \sum_{i=1}^{n_0} c_i^* X_{t-i}.$$

因此, 不确定残差的期望值计算方法如下:

$$\hat{e} = \frac{1}{n - n_0} \sum_{t=n_0+1}^n E[\hat{\varepsilon}_t].$$

下面公式用于计算干扰的方差:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n - n_0} \sum_{t=n_0+1}^n E[(\hat{\varepsilon}_t - \hat{e})^2].$$

接下来, 我们介绍线性不确定变量的逆不确定性分布

$$\psi^{-1}(\alpha) = (1 - \alpha)x + \alpha y, x > y, x, y \in R.$$

假设  $\varepsilon_t \sim N(e^*, \sigma^*)$ , 参数  $e^*$  和  $\sigma^*$  由 Yang 和 Liu [7] 给出的方法估计出来, 其中不确定假设检验采用

$$G_0 : e = e^* \text{ 和 } \sigma = \sigma^* \text{ 与 } G_1 : e \neq e^* \text{ 和 } \sigma \neq \sigma^*,$$

在显著性水平  $\theta$  下, 检验定义为

$$H = \left\{ \begin{array}{l} (\hat{\varepsilon}_{n_0}, \hat{\varepsilon}_{n_0+1}, \dots, \hat{\varepsilon}_n) : \text{存在至少 } \theta \text{ 个满足 } n_0 \leq t \leq n \text{ 的 } t \text{ 值, 使得} \\ \text{当 } \psi_t^{-1}(1 - \theta) < \Phi_\beta^{-1}(\theta) \text{ 或 } \psi_t^{-1}(\theta) < \Phi_\beta^{-1}(1 - \theta) \text{ 时 } \hat{\varepsilon}_t \sim \psi_t \end{array} \right\}$$

其中  $\Phi_\beta^{-1}(\theta) = e^* + \frac{\sigma^*}{\pi} \sqrt{3} \ln \frac{\theta}{1 - \theta}$ 。

若残差向量  $(\hat{\varepsilon}_{n_0}, \hat{\varepsilon}_{n_0+1}, \dots, \hat{\varepsilon}_n)$  属于  $H$ , 即  $(\hat{\varepsilon}_{n_0}, \hat{\varepsilon}_{n_0+1}, \dots, \hat{\varepsilon}_n) \in H$ , 若拒绝  $G_0$ , 则认为模型不通过检验, 否则不能拒绝  $G_0$ 。

### 2.4. 数值实验

例 1 在这个示例中, 一组不精确的观测值  $X_1, X_2, \dots, X_{30}$  由以下 UAR 模型生成

$$X_t = 1.0129X_{t-1} + 0.0326X_{t-2} + \varepsilon_t,$$

其中  $X_1, X_2, \dots, X_{30}$  是相互独立的线性不确定变量, 下面将说明如何利用修正的 SCAD 惩罚估计方法确定模型阶数并估计未知参数。若不考虑惩罚函数, 可采用最小二乘法进行估算, 得到

$$(c_1^*, c_2^*, \dots, c_{10}^*) = (1.025112, 0.41629, 0.00051, 0.0001, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

随后, 将最小二乘法估计值作为初始值代入第 2.2 节面向 UAR 模型的修正的 SCAD 惩罚估计算法中。

本例中将不同惩罚强度  $k$  设为 0.5 和 1, 在算法的每次迭代中, 生成两组  $\lambda_n$ , 具体结果如表 1, 选取对应最小 MAD 的  $\lambda_n = 0.5722$  作为最终的调参参数, 因此高阶 UAR 模型的参数估计如下所示

$$(c_1^*, c_2^*, \dots, c_{10}^*) = (1.0242, 0.0325, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

因此, 拟合的 UAR 模型为

$$X_t = 1.0242X_{t-1} + 0.0325X_{t-2} + \varepsilon_t.$$

该模型采用 UAR(2)模型进行参数估计, 实验证实修正的 SCAD 惩罚估计方法能有效应用于 UAR 模型的参数估计与阶数选择, 实现参数稀疏性。与最小二乘法相比, 该方法对真实参数值的估计更为接近。通过精准估计模型参数, 显著提升了模型预测精度。基于修正的 SCAD 惩罚估计方法获得的参数估计值, 我们进一步计算了下一阶段的预测值及预测区间。

**Table 1.** The model selection results for different values of  $k$  in Example 1  
**表 1.** 例 1 中不同  $k$  值的模型选择结果

	$\lambda_n$	$\text{eff}(\lambda_n)$	AIC/BIC	MAD
$k = 1$	0.5722	4.2471	-2.2129/-2.0146	5.2372
	0.4641	4.4251	-2.5260/-1.9360	6.0075
$k = 0.5$	0.6767	4.4111	-2.0615/-2.0012	7.0511
	0.5512	4.1767	-1.8813/-1.4513	7.1211

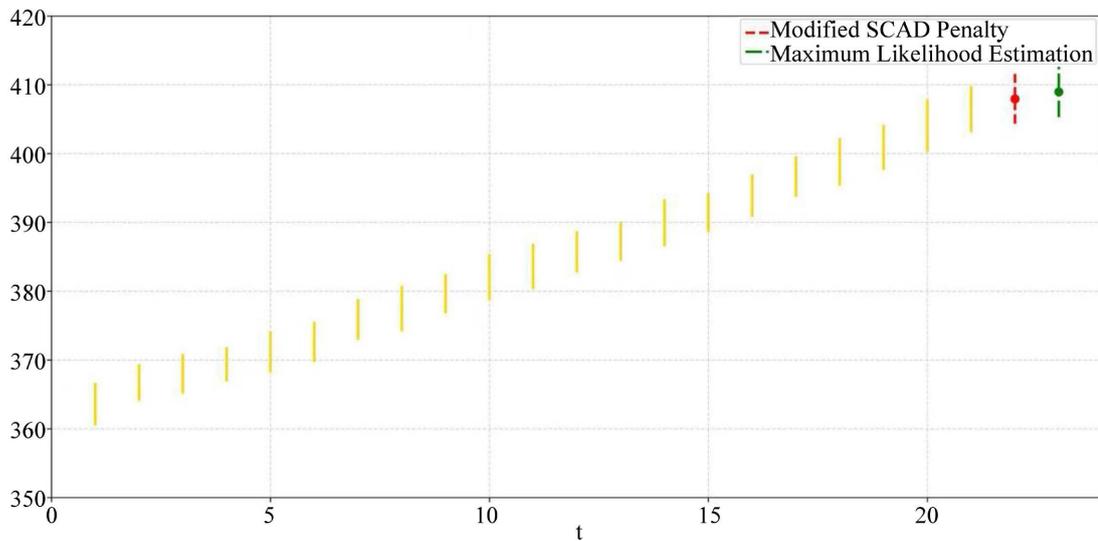
假设扰动项  $\varepsilon_t$  与观测值  $X_{29}, X_{30}$  相互独立, 采用修正的 SCAD 惩罚法估计的 UAR 模型中  $\delta = 0.6272$ , 由此得出  $X_{31}$  的 95% 置信区间为

$$19.8190 \pm 0.6272.$$

在上述模拟实验中, 结果表明, 修正的 SCAD 惩罚估计方法比最小二乘估计法更接近真实参数值, 能正确估计模型参数  $(c_1, c_2) = (1.0129, 0.0326)$ , 提高预测精度, 也验证了改进 SCAD 估计法的可行性。

例 2 美国夏威夷莫纳罗亚天文台 1997~2017 年月度  $\text{CO}_2$  月均值排放量数据集表明, 月度碳排放量水平是相互独立的线性不确定变量, 如图 1 所示。

类似地, 本例题采用  $n_0 = 10$  来预测后续未来值。将最小二乘估计值作为初始值代入改进的 SCAD 方法算法中。



**Figure 1.** The 95% confidence interval for  $\tilde{X}_{22}$  in Example 2

**图 1.** 例 2 中  $\tilde{X}_{22}$  的 95% 置信区间

根据表 2 数据, 当  $\lambda_n = 3.34$  时均方绝对误差达到最小值, 此时得到高阶 UAR 的参数估计结果如下:

$$(c_1^*, c_2^*, \dots, c_{10}^*) = (0.9922, 0.0065, 0, 0, 0, 0.0016, 0, 0, 0, 0).$$

**Table 2.** The model selection results for different values of  $k$  in Example 2  
**表 2.** 例 2 中不同  $k$  值的模型选择结果

	$\lambda_n$	eff( $\lambda_n$ )	AIC/BIC	MAD
$k = 1$	3.2700	2.8981	-1.3954/-1.2513	9.0489
	3.3400	2.8978	-2.6560/-2.1360	8.7875
$k = 0.5$	3.2200	2.5978	-1.4676/-1.2314	10.9583
	2.9945	2.7150	-2.7954/-1.9420	8.8414

拟合的高阶 UAR 模型如下

$$X_t = 0.9922X_{t-1} + 0.0065X_{t-2} + 0.0016X_{t-6} + \varepsilon_t$$

第 22 年的碳排放量预测值计算如下:

$$\mu = \sum_{i=1}^{10} c_i^* E[X_{22-i}] + \hat{e} = 407.9525.$$

对第 22 年碳排放量  $X_{22}$  进行计算置信区间。根据该方法, 第 22 年碳排放量的 95% 置信区间为  $407.9525 \pm 3.6172$ 。

通过与 Chen 和 Yang [15] 提出的最大似然估计(MLE)方法对比, 修正的 SCAD 惩罚估计方法展现出更窄的置信区间估计, 其区间宽度比 MLE 方法约窄 0.65%。

在例 2 中, 取  $n_0 = 10$  并将最小二乘估计值作为初始值代入改进的 SCAD 算法, 进一步地, 为展示本文方法在存在先验信息时的优势, 现考虑高阶系数向量  $c = (c_1, c_2, \dots, c_{10})$  满足线性等式约束  $\mathbf{R}c = \mathbf{r}$  结合例 2 的稀疏识别结果可见, 模型主要由  $c_1, c_2, c_6$  三个滞后项决定。基于短期演化可由关键滞后项的加权平均刻画, 给出如下约束  $c_1 + c_2 + c_6 = 1$ 。

在该先验约束下, 本文 2.2 节的修正 SCAD 估计(见式(5)~(6))可自然推广为如下约束优化问题

$$\min_{c_1, c_2, \dots, c_{n_0}} \left\{ \sum_{t=n_0+1}^n \int_0^1 \left( \Phi_t^{-1}(\alpha) - \sum_{i=1}^{10} c_i \gamma_{t-i}^{-1}(\alpha, c_i) \right)^2 d\alpha + (n-10) \sum_{i=1}^{n_0} P_{\lambda_n}(|c_i|) \right\}, \text{ s.t } \mathbf{R}c = \mathbf{r},$$

$$\text{其中 } \gamma_{t-i}^{-1}(\alpha, c_i) = \begin{cases} \Phi_{t-i}^{-1}(\alpha), & c_i \geq 0 \\ \Phi_{t-i}^{-1}(1-\alpha), & c_i < 0 \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, 10.$$

计算上仍采用与例 2 一致的参数选取策略: 在候选集合中比较不同  $k$  与  $\lambda_n$  的模型选择结果, 并以 MAD 最小原则确定最优惩罚参数, 从而得到满足  $\mathbf{R}\hat{c} = \mathbf{r}$  系数估计如下:

$$(c_1^*, c_2^*, \dots, c_{10}^*) = (0.9919, 0.0064, 0, 0, 0, 0.0016, 0, 0, 0, 0)$$

在引入线性先验约束  $\mathbf{R}c = \mathbf{r}$  后, 所得到的约束修正 SCAD 估计仍保持例 2 中的稀疏识别结构, 且关键滞后项系数之和满足先验约束从而使模型解释更符合实际背景。相较于标准 SCAD 方法的无约束估计, 其结果一般不保证严格满足  $\mathbf{R}c = \mathbf{r}$  因此可引入约束违背度  $CV = \|\mathbf{R}\hat{c} - \mathbf{r}\|_2$  进一步量化先验满足程度; 本方法对应  $CV \approx 0$  在后续预测与置信区间计算中, 仅需将例 2 中的参数估计值替换为满足约束的得到第 22 年的预测结果。

### 3. 结论

本文提出了一种面向 UAR 模型及其高阶 UAR 模型修正的 SCAD 惩罚估计方法, 用于实现模型的客观定阶与参数估计。相较于仅依赖样本信息的最小二乘法与极大似然估计法, 该方法通过融合先验信息并自适应选取调谐参数, 不仅克服了传统方法忽视先验知识的局限, 还实现了更高的估计精度。

两个数值算例表明, 所提方法能有效获取 UAR 及高阶 UAR 模型的预测值与置信区间, 且其估计误差率显著低于对比方法, 从而验证了该方法的可行性与有效性。本研究为金融、环境等领域的不确定性数据预测建立了一个稳健的建模框架, 也为合同节水管理等实际问题的预测提供了新思路。

需要指出, 基于 AIC 与 BIC 准则的调谐参数选取方式, 在处理 UAR 与高阶 UAR 模型时, 难以协同优化模型的稀疏性与拟合优度。未来研究将把该方法拓展至 UARMA 模型及其参数估计问题中, 以进一步提升其适用性。

### 基金项目

国家重点研发计划子课题(项目编号: 2023YFC3209403-04-05)。

### 参考文献

- [1] Yule, G.U. (1927) VII. On a Method of Investigating Periodicities Disturbed Series, with Special Reference to Wolfer's Sunspot Numbers. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, **226**, 267-298. <https://doi.org/10.1098/rsta.1927.0007>
- [2] Walker, G.T. (1931) On Periodicity in Series of Related Terms. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, **131**, 518-532. <https://doi.org/10.1098/rspa.1931.0069>
- [3] Chen, R., Xiao, H. and Yang, D. (2021) Autoregressive Models for Matrix-Valued Time Series. *Journal of Econometrics*, **222**, 539-560. <https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2020.07.015>
- [4] Zhu, X., Huang, D., Pan, R. and Wang, H. (2020) Multivariate Spatial Autoregressive Model for Large Scale Social Networks. *Journal of Econometrics*, **215**, 591-606. <https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2018.11.018>
- [5] Sun, Y., Han, A., Hong, Y. and Wang, S. (2018) Threshold Autoregressive Models for Interval-Valued Time Series Data. *Journal of Econometrics*, **206**, 414-446. <https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2018.06.009>
- [6] Liu, B. (2007) *Uncertain Theory*. 2nd Edition, Springer-Verlag.
- [7] Yang, X. and Liu, B. (2018) Uncertain Time Series Analysis with Imprecise Observations. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, **18**, 263-278. <https://doi.org/10.1007/s10700-018-9298-z>
- [8] Lu, J., Peng, J., Chen, J. and Sugeng, K.A. (2020) Prediction Method of Autoregressive Moving Average Models for Uncertain Time Series. *International Journal of General Systems*, **49**, 546-572. <https://doi.org/10.1080/03081079.2020.1748616>
- [9] Liu, Z. and Yang, X. (2020) Cross Validation for Uncertain Autoregressive Model. *Communications in Statistics—Simulation and Computation*, **51**, 4715-4726. <https://doi.org/10.1080/03610918.2020.1747077>
- [10] Yang, X., Park, G. and Hu, Y. (2020) Least Absolute Deviations Estimation for Uncertain Autoregressive Model. *Soft Computing*, **24**, 18211-18217. <https://doi.org/10.1007/s00500-020-05079-0>
- [11] Liu, Z. (2021) Huber Estimation for Uncertain Autoregressive Model. *Journal of Uncertain Systems*, **14**, Article ID: 2150010. <https://doi.org/10.1142/s1752890921500100>
- [12] Chen, D. and Yang, X. (2021) Ridge Estimation for Uncertain Autoregressive Model with Imprecise Observations. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, **29**, 37-55. <https://doi.org/10.1142/s0218488521500033>
- [13] Wang, L. and Gao, X. (2024) Least Absolute Deviations Estimation for an Uncertain Moving Average Model. *Journal of Uncertain Systems*, **18**, Article ID: 2450002. <https://doi.org/10.1142/s1752890924500028>
- [14] Zhang, Z., Yang, X. and Gao, J. (2020) Uncertain Autoregressive Model via LASSO Procedure. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, **28**, 939-956. <https://doi.org/10.1142/s0218488520500415>
- [15] Chen, D. and Yang, X. (2021) Maximum Likelihood Estimation for Uncertain Autoregressive Model with Application to Carbon Dioxide Emissions. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, **40**, 1391-1399. <https://doi.org/10.3233/jifs-201724>

- [16] Xin, Y., Gao, J., Yang, X. and Yang, J. (2023) Maximum Likelihood Estimation for Uncertain Autoregressive Moving Average Model with Application in Financial Market. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **417**, Article ID: 114604. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2022.114604>
- [17] Fan, J. and Li, R. (2001) Variable Selection via Nonconcave Penalized Likelihood and Its Oracle Properties. *Journal of the American Statistical Association*, **96**, 1348-1360. <https://doi.org/10.1198/016214501753382273>
- [18] Li, H. and Yang, X. (2021) Smoothly Clipped Absolute Deviation Estimation for Uncertain Autoregressive Model. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, **40**, 11875-11885. <https://doi.org/10.3233/jifs-210031>
- [19] Ng, C.T. and Yu, C.W. (2014) Modified SCAD Penalty for Constrained Variable Selection Problems. *Statistical Methodology*, **21**, 109-134. <https://doi.org/10.1016/j.stamet.2014.05.001>