

异质影响力下两策略演化博弈的动力学分析

刘 强, 蒋 君*, 周亚飞, 刘明远

武汉科技大学数学与系统科学学院, 湖北 武汉

收稿日期: 2026年3月1日; 录用日期: 2026年3月26日; 发布日期: 2026年4月10日

摘 要

在网络演化博弈中, 经典死亡-出生更新规则通常被认为对网络度异质性不敏感, 但该结论隐含假设个体影响力是同质的。本文在死亡-出生更新框架中引入个体影响力异质性, 使个体占据空位的概率同时依赖收益与传播影响力。在弱选择极限下, 结合成对近似方法, 推导了具有异质影响力的网络多策略演化动力学方程。结果表明, 系统动力学仍可等价表示为复制动力学, 但收益矩阵受到网络结构与影响力分布耦合的修正。进一步分析囚徒困境与协调博弈发现, 当影响力与节点度正相关时, 网络异质性能够降低合作成为演化稳定策略的门槛, 并促进群体向帕累托更优均衡演化; 而当影响力与节点度负相关时, 网络异质性的作用被抑制, 系统行为趋近经典结果。

关键词

复杂网络, 演化博弈, 死亡-出生更新, 异质影响力, 复制动力学

The Dynamics Analysis of Two-Strategy Evolutionary Game under Heterogeneous Influence

Qiang Liu, Jun Jiang*, Yafei Zhou, Mingyuan Liu

School of Mathematics and Systems Science, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan Hubei

Received: March 1, 2026; accepted: March 26, 2026; published: April 10, 2026

Abstract

In evolutionary game theory on networks, the classical death-birth update rule is typically considered

*通讯作者。

文章引用: 刘强, 蒋君, 周亚飞, 刘明远. 异质影响力下两策略演化博弈的动力学分析[J]. 运筹与模糊学, 2026, 16(2): 56-69. DOI: 10.12677/orf.2026.162019

insensitive to network degree heterogeneity. However, this conclusion implicitly assumes homogeneous individual influence. In this paper, we introduce individual influence heterogeneity into the death-birth update framework, where the probability of an individual occupying a vacant position depends on both payoff and propagating influence. Under the weak selection limit, we derive the multi-strategy evolutionary dynamics equations for networks with heterogeneous influence using pair approximation methods. The results show that the system dynamics can still be equivalently represented by replicator dynamics, but the payoff matrix is modified by the coupling of network structure and influence distribution. Further analysis of the prisoner's dilemma and coordination games reveals that when influence is positively correlated with node degree, network heterogeneity can lower the threshold for cooperation to become an evolutionarily stable strategy and promote the evolution of the population towards a more Pareto-optimal equilibrium. On the other hand, when influence is negatively correlated with node degree, the effect of network heterogeneity is suppressed, and the system behavior approaches the classical result.

Keywords

Complex Networks, Evolutionary Game Theory, Death-Birth Updating, Heterogeneous Influence, Replicator Dynamics

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

合作行为如何在演化过程中产生并长期维持,是进化生物学、经济学以及社会科学中的一个基础性问题。其困难在于,在社会困境博弈中,个体理性往往驱动自利行为,而合作策略在短期内通常处于劣势地位[1]-[4]。在经典的充分混合群体假设下,自然选择机制往往倾向于自私策略,从而使合作难以稳定存在。为解释现实系统中合作现象的普遍性,研究者将演化博弈模型推广至结构化群体情形,通过网络来刻画个体之间的局域相互作用关系[4]-[10]。在这一背景下,网络结构不仅规定了相互作用的邻域范围,还限制了策略传播的可能路径,从而对演化结果产生决定性影响[11]。因此,网络结构如何调控演化博弈动力学,已成为该领域持续关注的核心问题。

早期关于网络演化博弈的研究主要依赖数值模拟手段[12]-[15]。随着理论工具的发展,近年来逐步形成了多种解析框架,用以系统刻画网络结构对策略演化过程的影响机制。其中一类研究关注系统的长期演化结局,通常通过分析突变策略的固定概率或入侵条件,若干工作据此判定在不同群体结构下合作是否能够受到自然选择的支持[16]-[18]。另一类研究则侧重于短期至中期的演化行为,在弱选择条件下,将随机更新过程近似为确定性动力学方程,从而得到复制性演化动力学[19]-[22]。相比仅关注最终演化结局,这一方法能够进一步分析系统平衡点的存在性与稳定性,并揭示其对群体结构参数的依赖关系。在某些策略更新规则下,网络结构的影响可以等效地反映为对收益矩阵的系统性修正,从而改变策略之间的竞争关系[23]。

然而,已有研究逐渐表明,网络异质性并非在所有情形下都会对演化结果产生显著影响,其作用强烈依赖于所采用的策略更新机制[24][25]。特别是在死亡-出生更新规则下,经典理论结果显示,即便网络具有高度异质的度分布,合作受到自然选择促进的条件往往仍与规则网络情形保持一致[26]。这意味着,在标准死亡-出生更新框架中,仅引入拓扑异质性通常不足以改变演化阈值。该现象暗示,在死亡-出

生更新规则的建模假设中,可能存在抑制网络异质性发挥作用的隐含机制,使其难以进入演化稳定性判据。

更广泛地看,许多经典策略更新规则均默认个体在更新过程中具有同等的贡献权重[27][28]。在这一设定下,相同的收益优势会为所有个体带来相同的策略扩散能力,而与其在网络中的位置或角色结构无关。从现实建模的角度出发,允许个体在策略传播过程中具有不同的有效影响力显然更加合理。这类异质性可通过在网络上引入加权的相互作用或替换机制来刻画,其中节点或连边被赋予不同的传播权重[29]。若在死亡-出生更新规则的局域竞争阶段引入个体影响力的异质性,则网络结构可能通过更新机制本身参与演化过程,而不再仅仅作为一个静态背景存在[30]。

基于上述动机,本文提出并分析了一种引入个体异质影响力的死亡-出生更新框架。在该框架中,个体在局域竞争中占据空位的概率不仅依赖其收益,还受到其影响力权重的调制,从而将个体层面的传播异质性显式嵌入死亡-出生更新过程之中。该模型在保留“先死亡、后局域竞争”这一死亡-出生更新基本结构的同时,放松了传统的同质传播假设,使得个体影响力与网络拓扑能够协同影响演化动力学行为。

在方法上,本文在弱选择极限下,采用配对近似方法,对具有异质影响力的网络两策略演化博弈在死亡-出生更新规则下进行系统推导[25][31]。本文的重点并非构建一类新的动力学形式,而是探讨在放松同质影响力假设后,网络异质性如何通过更新机制进入演化动力学方程及演化稳定性条件。分析结果表明,引入异质影响力为网络结构在死亡-出生更新框架下影响演化结果提供了一种新的作用机制。

本文其余结构安排如下:第2节介绍网络演化博弈的基本模型设定,给出具有异质影响力的死亡-出生更新规则,并建立刻画局域结构的配对近似框架;第3节在弱选择条件下推导演化动力学方程,分离快慢变量,并在慢流形上获得系统的有效演化描述及相应的演化稳定性条件;第4节通过若干代表性博弈示例,展示异质影响力与网络结构耦合所引发的演化效应;最后,第5节对全文主要结论进行总结,并讨论该研究框架的适用范围与潜在拓展方向。

2. 模型

2.1. 网络上的演化博弈

本文考虑一个由 N 个节点构成的网络系统,其中每个节点对应一个个体。节点 i 的度记为 $k_i (i=1,2,\dots,N)$,网络的平均度记为 $\langle k \rangle$,其定义为 $\langle k \rangle = 1/N \sum_{i=1}^N k_i$ 。若用 $p(k)$ 表示网络的度分布函数,即随机选取一个节点其度为 k 的概率,则平均度也可表示为 $\langle k \rangle = \sum_k k p(k)$ 。同时我们将 $Var(k) = \sum_k k^2 p(k) - \langle k \rangle^2$ 定义为网络的度方差,其在一定程度上衡量了网络的异质性程度。网络中节点之间的连边表示对应个体之间可以发生相互作用。虽然网络在形式上可表示为有向图,但在本文的建模中,任意两个相互连接的节点之间的博弈被视为对称的,即从节点 i 到节点 j 与从节点 j 到节点 i 的作用在博弈意义下是等价的。

个体在网络中参与一个包含两种策略的演化博弈,策略集合为 $\{A, B\}$ 。任意两个相互作用的个体之间的收益由如下收益矩阵给出:

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\
 \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}
 \end{array} \tag{1}$$

假设每个个体在与其所有邻居的交互过程中始终采用同一种策略。用 $s_i \in \{A, B\}$ 表示位于节点 i 的个体所采取的策略。个体 i 的收益定义为其与所有 k_i 个相邻个体进行博弈后所获得收益的累积值。

注意到网络中有向边的总数为 $N\langle k \rangle$ 。设 ϕ_A 表示起始于采取策略 A 的个体的有向边在所有有向边中所占的比例, 则有 $\phi_A = \sum_{i=1}^N s_i^A k_i / N\langle k \rangle$, 其中 $s_i^A = 1$ 表示节点 i 的个体采用策略 A , 否则 $s_i^A = 0$ 。特别地, 当网络为规则网络, 即对所有节点均有 $k_i = \langle k \rangle (i=1, 2, \dots, N)$ 时, 上式可进一步化简, 此时 ϕ_A 恰好等于群体中采用策略 A 的个体所占的比例。

2.2. 异质影响力下的死亡 - 出生更新规则

除本文采用死亡 - 出生更新规则来描述策略的演化过程。在该更新机制下, 群体规模始终保持不变, 策略通过局域竞争的方式在网络中传播。具体而言, 在每一个时间步, 首先从群体中以均匀概率随机选择一个个体并将其移除, 从而在对应的网络节点处产生一个空位。该“死亡”过程与个体所采取的策略及其收益无关。随后, 与该空位节点相邻的所有个体参与局域竞争, 以争夺该空位。竞争仅限于空位节点的直接邻域, 最终胜出的邻居个体在该节点处产生一个后代, 其策略与自身完全一致, 从而使群体规模恢复至原有水平[9]。

在传统演化博弈模型中, 通常假设所有个体在竞争过程中具有相同的影响力, 即个体被选中的概率仅由其适应度或收益决定。本文在此基础上引入异质影响力的设定, 允许不同个体在竞争中施加不同程度的影响。设影响力参数为 λ , 并假定度为 k 的个体具有对应的影响力 $\lambda(k)$ 。若位于节点 i 的个体死亡, 其邻居集合记为 Ω_i , 则个体 $j \in \Omega_i$ 成功占据空位的概率定义为

$$P_{j \rightarrow i} = \frac{\lambda(k_i) F_j}{\sum_{j \in \Omega_i} \lambda(k_j) F_j} \quad (2)$$

其中 $F_i = 1 + \omega f_i$ 表示个体 i 的适应度, f_i 为个体 i 的收益, ω 为选择强度。当选择强度 $\omega \rightarrow 0$ 时, 系统处于弱选择情形, 此时个体的适应度仅在中性漂变的基础上产生微小扰动。相反地, 当 $\omega \rightarrow \infty$ 时, 选择作用显著增强, 个体在策略更新过程中几乎总是模仿适应度更高的邻居, 而不太可能选择适应度较低者。强选择条件下的演化动力学已在已有文献中得到了较为系统的研究。本文主要关注弱选择情形下的演化行为, 即假定选择强度较小, 从而便于刻画网络结构与个体异质性的对策略演化的影响。同时 $\lambda(k_j) > 0$ 刻画了该个体在局域竞争中的影响强度。为便于后续分析, 定义网络的平均影响力为 $\langle \lambda \rangle = \sum_k p(k) \lambda(k)$, 同时定义按度加权的平均影响力为 $\langle \lambda k \rangle = \sum_k k p(k) \lambda(k)$ 。

2.3. 成对近似方法

在成对近似框架下, 个体邻域中的相关性通过相邻个体对的统计特征来刻画。设 $X, Y \in \{A, B\}$, 我们关注在一个采用策略 Y 的个体周围, 其邻居为策略 X 个体的条件概率。为此, 引入策略对的统计量。记 ϕ_{XY} 为网络中所有有向边中, 起点个体采用策略 X 、终点个体采用策略 Y 的有向边所占的比例。设 Φ_{XY} 表示满足该条件的有向边的数量, 则有 $\phi_{XY} = \Phi_{XY} / N\langle k \rangle$, 其中 $N\langle k \rangle$ 为网络中有向边的总数。进一步地, 条件概率 $q_{X|Y}$ 定义为: 在一个采取策略 Y 的个体的所有邻居中, 其邻居采取策略 X 的概率。该概率可表示为 $q_{X|Y} = \phi_{XY} / \sum_{X' \in \{A, B\}} \phi_{X'Y}$ 。在成对近似假设下, 系统的演化状态可由有限个变量刻画, 即 ϕ_X 、 $q_{X|Y}$ 以及 ϕ_{XY} 。这些变量并非相互独立, 而是满足如下约束关系[21]:

$$\begin{aligned} \phi_A + \phi_B &= 1, \\ q_{A|X} + q_{B|X} &= 1, \\ \phi_{XY} &= \phi_Y q_{X|Y}, \\ \phi_{AB} &= \phi_{BA}. \end{aligned} \quad (3)$$

此时整个系统可以只用变量 ϕ_A 与 ϕ_{AA} 来描述。

3. 模型分析

3.1. 演化动态

考虑一个度为 k 的策略 B 个体在一次更新过程中被随机选中进行策略更新。设该个体的邻居中，采用策略 A 的个体数为 k_A ，采用策略 B 的个体数为 k_B ，显然有 $k_A + k_B = k$ 。在成对近似假设下，该个体恰好有 k_A 个策略 A 邻居、 k_B 个策略 B 邻居的概率可表示为 $\binom{k}{k_A} (q_{A|B})^{k_A} (q_{B|B})^{k_B}$ 。该策略 B 个体的一个策略 A 邻居的平均适应度在成对近似下可写为 $f_{A|B} = (\langle k \rangle - 1)(q_{A|A}a_{11} + q_{B|A}a_{12}) + a_{12}$ 。

在一次成功的更新事件中，系统中策略 A 的比例将发生变化。若策略 B 个体被策略 A 邻居取代，则策略 A 的比例增加一个最小步长 $\Delta\phi_A = \frac{k}{\langle k \rangle N}$ 。因此，在单个时间步内，该变化发生的概率为

$$\Pr\left(\Delta\phi_A = \frac{k}{\langle k \rangle N}\right) = p(k)\phi_{k,B} \sum_{k_A+k_B=k} \binom{k}{k_A} (q_{A|B})^{k_A} (q_{B|B})^{k_B} \times \frac{k_A \sum_k p(k)\lambda(k)F_{A|B}}{k_A \sum_k p(k)\lambda(k)F_{A|B} + k_B \sum_k p(k)\lambda(k)F_{B|B}} \quad (4)$$

其中， $\phi_{k,B}$ 表示度为 k 的策略 B 个体所占比例， $F_{A|B} = 1 + \omega f_{A|B}$ 表示有一个 B 策略邻居的 A 策略玩家的期望收益。

进一步地，考虑相邻策略对数量的变化。若在一次更新事件中，一个度为 k 的策略 B 个体被其策略 A 邻居取代，则系统中 AA 策略对的比例将发生变化。设该个体具有 k_A 个策略 A 邻居，则对应的变化步长为 $\Delta\phi_{AA} = \frac{2k_A}{\langle k \rangle N}$ 。因此，在单个时间步内， ϕ_{AA} 增加上述量的概率可表示为

$$\Pr\left(\Delta\phi_{AA} = \frac{2k_A}{\langle k \rangle N}\right) = p(k)\phi_{k,B} \sum_{k_A+k_B=k} \binom{k}{k_A} (q_{A|B})^{k_A} (q_{B|B})^{k_B} \times \frac{k_A \sum_k p(k)\lambda(k)F_{A|B}}{k_A \sum_k p(k)\lambda(k)F_{A|B} + k_B \sum_k p(k)\lambda(k)F_{B|B}} \quad (5)$$

类似地，若一个度为 k 的策略 A 个体在更新过程中被随机选中，其邻居中包含 k_A 个策略 A 个体和 k_B 个策略 B 个体 ($k_A + k_B = k$)，在成对近似下，该构型出现的概率为 $\binom{k}{k_A} (q_{A|A})^{k_A} (q_{B|A})^{k_B}$ 。此时，与该策略 A 个体相邻的策略 B 个体的平均收益可写为 $f_{B|A} = (\langle k \rangle - 1)(q_{A|B}a_{21} + q_{B|B}a_{22}) + a_{21}$ 。若该策略 A 个体被策略 B 邻居取代，则系统中策略 A 的比例减少一个最小步长 $\Delta\phi_A = -\frac{k}{\langle k \rangle N}$ 。对应的发生概率为

$$\Pr\left(\Delta\phi_A = -\frac{k}{\langle k \rangle N}\right) = p(k)\phi_{k,A} \sum_{k_A+k_B=k} \binom{k}{k_A} (q_{A|A})^{k_A} (q_{B|A})^{k_B} \times \frac{k_B \sum_k p(k)\lambda(k)F_{B|A}}{k_B \sum_k p(k)\lambda(k)F_{B|A} + k_A \sum_k p(k)\lambda(k)F_{A|A}} \quad (6)$$

相应地，在该过程中，AA 策略对的比例将减少 $\Delta\phi_{AA} = -\frac{2k_A}{\langle k \rangle N}$ 。其发生概率为

$$\Pr\left(\Delta\phi_{AA} = -\frac{2k_A}{\langle k \rangle N}\right) = \sum_{k \geq k_A} p(k) \phi_{k,A} \binom{k}{k_A} (q_{A|A})^{k_A} (q_{B|A})^{k_B} \times \frac{k_B \sum_k p(k) \lambda(k) F_{B|A}}{k_B \sum_k p(k) \lambda(k) F_{B|A} + k_A \sum_k p(k) \lambda(k) F_{A|A}} \quad (7)$$

其中 $\phi_{k,A} = 1 - \phi_{k,B}$ 表示度为 k 且采用策略 A 的个体比例。 $F_{B|A} = 1 + \omega f_{B|A}$ 表示有一个 A 策略邻居的 B 策略玩家的期望收益。

综上所述，结合式(4)~(7)中对不同微观更新事件的分析，可以将策略比例及相邻策略对比例的演化过程表示为其期望变化率。具体而言，策略 A 在系统中的比例 ϕ_A 的时间演化可写为

$$\frac{d\phi_A}{dt} = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{k}{\langle k \rangle N} \Pr\left(\Delta\phi_A = \frac{k}{\langle k \rangle N}\right) - \sum_{k=1}^{N-1} \frac{k}{\langle k \rangle N} \Pr\left(\Delta\phi_A = -\frac{k}{\langle k \rangle N}\right) \quad (8)$$

类似地，相邻策略对 AA 所占比例 ϕ_{AA} 的时间演化可表示为

$$\frac{d\phi_{AA}}{dt} = \sum_{k_A=1}^{N-1} \frac{2k_A}{\langle k \rangle N} \Pr\left(\Delta\phi_{AA} = \frac{2k_A}{\langle k \rangle N}\right) - \sum_{k_A=1}^{N-1} \frac{2k_A}{\langle k \rangle N} \Pr\left(\Delta\phi_{AA} = -\frac{2k_A}{\langle k \rangle N}\right) \quad (9)$$

3.2. 局部平衡

在弱选择极限 $\omega \rightarrow 0$ 下，可以对式(4)~(7)中给出的转移概率进行近似展开。保留至 ω 的一阶项，有

$$\Pr\left(\Delta\phi_A = \frac{k}{\langle k \rangle N}\right) = \frac{p(k)}{\langle \lambda \rangle} \phi_{k,B} \sum_{k_A+k_B=k} \binom{k}{k_A} (q_{A|B})^{k_A} (q_{B|B})^{k_B} \frac{k_A}{k} \left(1 + \omega \frac{k_B}{k} (\bar{f}_{A|B} - \bar{f}_{B|B})\right) + O(\omega^2) \quad (10)$$

$$\Pr\left(\Delta\phi_{AA} = \frac{2k_A}{\langle k \rangle N}\right) = \frac{1}{\langle \lambda \rangle} \sum_{k \geq k_A} p(k) \phi_{k,B} \binom{k}{k_A} (q_{A|B})^{k_A} (q_{B|B})^{k_B} \frac{k_A}{k} + O(\omega) \quad (11)$$

$$\Pr\left(\Delta\phi_A = -\frac{k}{\langle k \rangle N}\right) = \frac{p(k)}{\langle \lambda \rangle} \phi_{k,A} \sum_{k_A+k_B=k} \binom{k}{k_A} (q_{A|A})^{k_A} (q_{B|A})^{k_B} \frac{k_B}{k} \left(1 + \omega \frac{k_A}{k} (\bar{f}_{B|A} - \bar{f}_{A|A})\right) + O(\omega^2) \quad (12)$$

$$\Pr\left(\Delta\phi_{AA} = -\frac{2k_A}{\langle k \rangle N}\right) = \frac{1}{\langle \lambda \rangle} \sum_{k \geq k_A} p(k) \phi_{k,A} \binom{k}{k_A} (q_{A|A})^{k_A} (q_{B|A})^{k_B} \frac{k_B}{k} + O(\omega) \quad (13)$$

其中 $\bar{f}_{A|B} = \sum p(k) \lambda(k) f_{A|B}$ ，代表有一个策略 B 邻居的策略 A 个体的影响加权期望收益。将上述近似结果代入式(7)和(8)，可将系统的演化方程化简为

$$\frac{d\phi_A}{dt} = \frac{\omega}{\langle \lambda \rangle \langle k \rangle N} \sum_{k=1}^{N-1} (k-1) p(k) \left[\phi_{k,B} q_{A|B} \left((1 - q_{A|B}) \bar{f}_{A|B} - q_{B|B} \bar{f}_{B|B} \right) - \phi_{k,A} q_{B|A} \left((1 - q_{B|A}) \bar{f}_{B|A} - q_{A|A} \bar{f}_{A|A} \right) \right] + O(\omega^2) \quad (14)$$

以及

$$\frac{d\phi_{AA}}{dt} = \frac{2}{\langle \lambda \rangle \langle k \rangle N} \sum_{k=1}^{N-1} p(k) \left[\phi_{k,B} q_{A|B} (k q_{A|B} + q_{B|B}) - \phi_{k,A} q_{A|A} q_{B|A} (k-1) \right] + O(\omega) \quad (15)$$

需要指出的是，式(10)~(15)中的变量 $\phi_{k,A}$ 与 $\phi_{k,B}$ 同样是时间 t 的函数。对于任意给定的度 k ，度为 k 的

策略 A 个体比例 $\phi_{k,A}$ 的时间演化可表示为

$$\frac{d\phi_{k,A}}{dt} = \frac{1}{Np(k)} \Pr\left(\Delta\phi_{k,A} = \frac{1}{Np(k)}\right) - \frac{1}{Np(k)} \Pr\left(\Delta\phi_{k,A} = -\frac{1}{Np(k)}\right) \quad (16)$$

从而可简化为

$$\frac{d\phi_{k,A}}{dt} = \frac{2\phi_{AB}}{N\langle\lambda\rangle\phi_A\phi_B}(\phi_A - \phi_{k,A}) + O(\omega) \quad (17)$$

由式(17)可以看出, ϕ_{AA} 与 $\phi_{k,A}$ 的演化方程中均包含与选择强度无关的零阶项。因而在弱选择极限 $\omega \rightarrow 0$ 下, 这些变量相较于全局策略频率 ϕ_A 属于“快变量”, 而 ϕ_A 的变化速率为 $O(\omega)$, 可视为慢变量。换言之, 系统的动力学过程将以 $O(\omega^0)$ 的速率迅速收敛到一个慢流形上, 在该流形上 ϕ_A 在近似中保持不变, 而局域量 ϕ_{AA} 与 $\phi_{k,A}$ 的演化由式(15)~(17)所刻画。由式(17)可知, 对于任意 $0 < \phi_A < 1$, 当 t 足够大时有 $\phi_{k,A} = \phi_A + O(\omega)$, 即不同度节点上的局域策略频率在弱选择条件下趋于全局频率。将该结果代入式(15), 可将 ϕ_{AA} 的演化方程简化为

$$\frac{d\phi_{AA}}{dt} = \frac{2\phi_{AB}}{\langle k \rangle N \langle \lambda \rangle} \left[1 + (\langle k \rangle - 1)(q_{A|B} - q_{A|A}) \right] + O(\omega) \quad (18)$$

根据已有研究结果[9] [10], 当系统演化至慢流形后, 需满足 $\frac{d\phi_{AA}}{dt} = 0$ 。结合上述条件可得, 局域平衡态下应同时满足

$$\phi_A - \phi_{k,A} = O(\omega) \quad (19)$$

以及

$$q_{A|A} - q_{A|B} = \frac{1}{\langle k \rangle - 1} + O(\omega) \quad (20)$$

进一步结合式(3)与式(20), 可以求得局域平衡态下的条件概率

$$q_{A|A} = \phi_A + \frac{1 - \phi_A}{\langle k \rangle - 1} + O(\omega) \quad (21)$$

3.3. 演化稳定性分析

在局域平衡假设成立的条件下, 可以进一步推导全局策略频率 ϕ_A 的演化动力学。由于前一节已表明, 相邻策略对比例 ϕ_{AA} 以及度分组变量 $\phi_{k,A}$ 以 $O(\omega^0)$ 的速率迅速收敛至局域平衡态, 而全局频率 ϕ_A 的变化速率为 $O(\omega)$, 因此在弱选择极限下, 可将式(10)中的 $q_{A|A}$ 和 $\phi_{k,A}$ 直接替换为由式(19)~(21)给出的平衡值。利用 $\phi_{AB} = \phi_{k,A}q_{B|A} = \phi_{k,B}q_{A|B}$ 以及局域平衡条件, 可将 ϕ_A 的演化方程写为

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_A}{dt} = & \frac{\omega(\langle k \rangle - 2)^2}{N\langle k \rangle(\langle k \rangle - 1)} \beta \phi_A (1 - \phi_A) \left\{ (a_{AA} - a_{AB} - a_{BA} + a_{BB}) \phi_A \right. \\ & \left. + a_{AB} - a_{BB} + \frac{a_{AA} - a_{BB}}{\langle k \rangle - 2} + \frac{a_{AB} - a_{BA}}{\beta(\langle k \rangle - 2)} \right\} + O(\omega^2) \end{aligned} \quad (22)$$

上述结果给出了在弱选择条件下, 全局策略频率 ϕ_A 的演化动力学方程。值得注意的是, 该方程在形式上等价于一个具有修正收益矩阵的复制动力学方程。具体而言, 式(22)可视为具有如下等效收益矩阵的复制方程:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} + \alpha \\ a_{21} - \alpha & a_{22} \end{pmatrix} \quad (23)$$

其中参数 α 由

$$\alpha = \frac{\beta a_{11} + a_{12} - a_{21} - \beta a_{22}}{\beta(\langle k \rangle - 2)}$$

给出。其中

$$\beta = \frac{\langle k \rangle \langle \lambda k \rangle / \langle \lambda \rangle - 1}{\langle k \rangle - 1}$$

式(22)表明, 在异质网络结构及影响力加权的死亡-出生更新规则下, 系统的演化动力学仍可等价地表示为复制动力学方程。换言之, 网络的拓扑结构与个体影响力的异质性并未改变演化方程的基本形式, 而是通过一个有效的结构参数 β 体现出来。具体而言, 度分布与影响力分布的共同作用被压缩到参数 β 中, 该参数在动力学方程中引入了等效的收益修正项。因此, 不同的影响力函数 $\lambda(k)$ 并不会改变系统的动力学框架本身, 而是对应于不同强度的结构选择偏置, 其影响统一地编码在参数 β 的取值之中。

由式(22)可以看出, 系统始终存在两个边界平衡点 $\phi_A = 0$ 和 $\phi_A = 1$, 分别对应于群体中所有个体均采用策略 B 和所有个体均采用策略 A 的状态。根据演化博弈理论中的经典结果[10], 网络上的演化稳定性可以通过上述等效收益矩阵进行判定。当

$$a_{11} > a_{21} - \alpha \quad (24)$$

成立时, 边界平衡点 $\phi_A = 1$ 是局部渐近稳定的, 这意味着在以策略 A 为主的群体中, 少量策略 B 的突变体将被选择淘汰。因此, 在该情形下, 策略 A 相对于策略 B 是演化稳定策略(ESS)。反之, 若

$$a_{11} < a_{21} - \alpha \quad (25)$$

则策略 B 的突变体可以成功入侵以策略 A 为主的群体, 从而策略 A 不再具有演化稳定性。为便于进一步分析, 本文考虑一类简单但具有代表性的参数化影响力函数 $\lambda(k) = k^\alpha$, 其中 α 为影响力指数。需要强调的是, 上述理论推导并不依赖于该具体形式, 对更一般的 $\lambda(k)$ 选择同样适用。

首先, 当 $\text{Var}(k) = 0$ 或 $\alpha = 0$ 时, 可得 $\beta = \langle k \rangle + 1$ 。前者对应于规则网络的情形, 与经典结果保持一致[9]; 后者则表明, 即便网络在结构上具有异质性, 只要个体影响力是同质的, 策略的 ESS 条件仍不会受到网络异质性的影响。这一结论与已有研究结果相一致。如果 $\alpha > 0$, 并且网络具有较强的异质性, 即 $\text{Var}(k) \gg 1$, 有 $\beta \rightarrow \infty$, 此时参数 α 近似为

$$\alpha \approx \frac{a_{11} - a_{22}}{\langle k \rangle - 2} \quad (26)$$

策略 A 为演化稳定策略当且仅当

$$a_{11} > \frac{(\langle k \rangle - 2)a_{21} + a_{22}}{\langle k \rangle - 1} \quad (27)$$

相反, 如果 $\alpha < 0$, 并且网络具有较强的异质性, 那么 $\beta \rightarrow 1$, 此时参数 α 近似为

$$\alpha \approx \frac{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}{\langle k \rangle - 2} \quad (28)$$

策略 A 为演化稳定策略当且仅当

$$a_{11} > \frac{(\langle k \rangle - 1)a_{21} + a_{12} - a_{22}}{\langle k \rangle - 1}$$

这一结果与对交互更新规则网络上的一致[9]。

上述分析表明，网络结构异质性与个体影响力分布通过参数 β 共同调控策略的演化稳定性。当影响力随节点度正相关($\alpha > 0$)时，高度节点在局域竞争中占据主导地位，强异质网络将显著放大高收益策略在枢纽节点上的优势，从而降低策略 A 成为演化稳定策略的门槛。这一情形下，策略演化主要由高度节点周围的局域相互作用所驱动。相反地，当影响力随节点度负相关($\alpha < 0$)时，低度节点在演化过程中获得更大的相对影响力，高度节点的结构优势被削弱。此时，即使网络在拓扑结构上具有显著异质性，其对演化稳定性的影响也被有效抑制，系统的演化行为与对交互更新规则在规则网络上的经典结果保持一致。因此，网络异质性本身并不会必然促进或抑制某一策略的演化稳定性，其作用方式高度依赖于个体影响力与网络结构之间的耦合关系。通过调节影响力函数 $\lambda(k)$ ，同一网络结构下可以诱导出截然不同的结构选择偏置，从而改变策略的演化结果。

4. 示例

4.1. 囚徒困境博弈

首先，我们考虑一个简化的两策略囚徒困境博弈。个体可采取合作 C 或背叛 D 两种策略[9]。合作个体需要支付代价 $c > 0$ ，从而为其每一位邻居提供收益 $b > 0$ ，且假设 $b > c$ 。背叛个体既不支付代价，也不向邻居提供收益。对应的收益矩阵可表示为

$$\begin{matrix} & C & D \\ C & b-c & -c \\ D & b & 0 \end{matrix} \tag{29}$$

将收益矩阵(29)代入前文得到的全局演化动力学方程(22)，可得

$$\frac{d\phi_c}{dt} = \frac{\omega(\langle k \rangle - 2)}{m\langle k \rangle(\langle k \rangle - 1)\langle \lambda \rangle} \phi_c (1 - \phi_c) \left(b \frac{\langle \lambda k \rangle - \langle \lambda \rangle}{\langle k \rangle - 1} - c \langle \lambda k \rangle \right) \tag{30}$$

式(30)表明，合作策略的演化不仅依赖于收益参数 b, c ，还受到网络结构及个体影响力分布的共同调控。对于幂律形式的影响力函数 $\lambda(k) = k^\alpha$ ，其中 α 为影响力指数。在此情形下，合作策略成为演化稳定策略(ESS)的条件可写为

$$\frac{b}{c} > (\langle k \rangle - 1) \frac{\langle k^{\alpha+1} \rangle}{\langle k^{\alpha+1} \rangle - \langle k^\alpha \rangle} \tag{31}$$

注意到当合作个体面对背叛者时，其收益为 $-c$ ，小于背叛者获得的收益 b 。因此，在纯粹的两两博弈层面，合作始终处于劣势。由式(27)可见，要使合作在演化意义下获得优势，必须依赖结构因素与影响力机制的共同作用，这要求 $\alpha > 0$ 。不失一般性的，取 $\alpha = 1$ ，式(31)可进一步化简为

$$\frac{b}{c} > \langle k \rangle (k) - 1 \left(1 + \frac{1}{\text{Var}(k) / \langle k \rangle + \langle k \rangle - 1} \right) \tag{32}$$

由式(32)可以看出，在影响力加权的死亡-出生更新规则下，网络异质性能够显著影响合作策略的演化结果。当网络为规则网络($\text{Var}(k) = 0$)时，式(32)退化为经典结果 $b/c > \langle k \rangle$ ，这与已有文献中的结论一致[9]。而当网络具有较强的异质性($\text{Var}(k) \gg 1$)时，合作成为 ESS 的条件被显著放宽，近似为

$$\frac{b}{c} > \langle k \rangle - 1 \tag{33}$$

表明在高异质的网络中，合作更容易在群体中演化并得以维持。其原因在于，当个体影响力随节点度增加($\alpha > 0$)时，高度节点在局域竞争中发挥主导作用，从而放大了合作策略在关键节点上的优势。相反的，当个体影响力随节点度减小($\alpha < 0$)时，不失一般性的，令 $\alpha = -1$ ，式(31)可以改写为

$$\frac{b}{c} > \frac{\langle k \rangle - 1}{1 - \langle k^{-1} \rangle} \tag{34}$$

当网络异质性增加时， $\langle k^{-1} \rangle$ 增加，导致式(34)右边增大，这意味着合作策略的演化条件变得苛刻。在这种情况下，网络异质性反而促进背叛策略的演化。

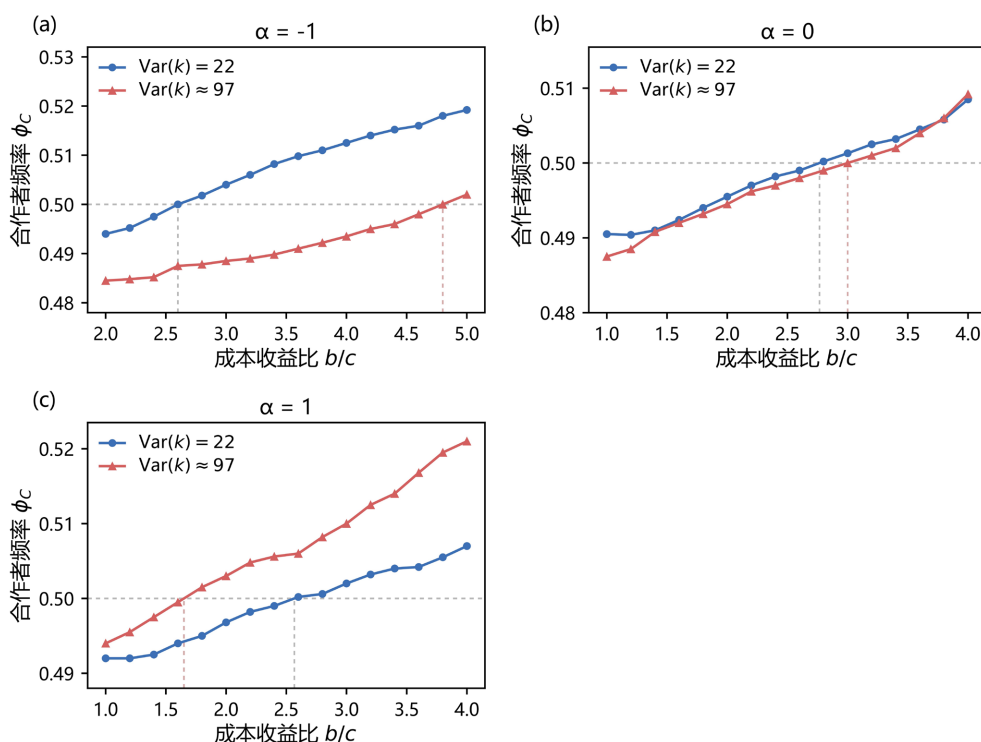


Figure 1. The change of the frequency of collaborators with different parameters under the ratio of benefit to cost
图 1. 不同参数下合作者频率随收益成本比的变化

在图 1 中我们进行了蒙特卡洛模拟来验证我们的理论，首先根据文献[32] [33]生成了两种方差不同 ($Var(k) = 22$ 与 $Var(k) = 97$)但平均度相同的无标度网络($\langle k \rangle = 2.5$)。进行 10^5 次模拟(基于 100 个网络，每个网络 1000 次模拟)。每次模拟从 $\phi_c = 0.5$ 开始运行 $N * 10$ 个时间步，并取最后 1000 步的平均合作比例作为一次模拟的结果。网络的其他参数分别为 $N = 10000$ ， $\omega = 0.01$ 。从图 1(a)中可以看出，当 $\alpha = 1$ 时，方差越大越促进合作。图 1(b)中为 $\alpha = 0$ 时的情形，可以看出方差对合作演化的影响较弱。而在图 1(c)中展示了 $\alpha = -1$ 时的情况，与 $\alpha = 1$ 时的情况相反，随着方差增加，合作的演化反而被抑制。

4.2. 协调博弈

对于两策略博弈，如果式(1)的收益矩阵满足 $a_{11} > a_{21}$ ， $a_{22} > a_{12}$ 时，则策略 A 与策略 B 均为严格纳什均衡。在这种情形下，博弈被称为协调博弈，即个体的最优选择是与对手采取相同的策略，从而实现行

动上的协调。然而，在存在多个协调均衡的情况下，一个自然的问题是：群体最终应当协调到哪一个均衡上？如果 $a_{11} + a_{12} < a_{22} + a_{21}$ ，则策略 B 被称为风险占优策略。在充分混合群体的复制动力学框架下，策略 B 的吸引域大于 $1/2$ ，因此从随机初始条件出发，系统更有可能演化至策略 B 占优的状态。另一方面，当 $a_{11} > a_{22}$ 成立时，策略 A 对应的均衡具有更高的总体收益，因此被称为帕累托有效策略。这意味着，尽管所有个体都选择策略 A 能够实现更高的集体福利，但在不确定性条件下，选择策略 B 可以有效降低获得较低收益的风险。由此产生了一个经典的演化困境：帕累托效率与风险占优之间的冲突。在充分混合群体中，演化过程往往倾向于选择风险占优策略，而非帕累托有效策略。一个关键问题在于，引入异质群体结构与异质个人影响力后，这一结论是否仍然成立？是否可能促进群体协调到帕累托更优的均衡？考虑一个具有代表性的协调博弈[9]，其收益矩阵为：

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} A & B \end{matrix} \\
 \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} & \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}
 \end{array} \tag{35}$$

其中 $\beta = \frac{\langle k \rangle \lambda k / \langle k \rangle - 1}{\langle k \rangle - 1}$ 。式(36)的动力学方程有一个不稳定的内部均衡点 $\phi_A^* = \frac{2}{a+1} - \frac{\beta(a-2)-1}{\beta(a+1)(\langle k \rangle - 2)}$ 。当 $\langle k \rangle \gg 1$ 时恢复到混合群体的情况，即 $\phi_A^* = \frac{2}{a+1}$ 。同时当 $\phi_A^* < \frac{1}{2}$ ，即：

$$a > 3 - \frac{2}{\langle k \rangle} \left(1 - \frac{1}{\beta} \right) \tag{36}$$

时，策略 A 有着更大的吸引区，其变为风险占优策略。对于规则网络 ($Var(k) = 0$) 与影响力因子 $\alpha = 0$ 的情况，有 $\beta = \langle k \rangle + 1$ ，式(37)的条件可以简化为 $a > \frac{3\langle k \rangle + 1}{\langle k \rangle + 1}$ ，这与前人的结果一致[9]。注意到 $\frac{3\langle k \rangle + 1}{\langle k \rangle + 1} < 3$ ，因此结构化群体促进了策略 A 成为风险占优策略。对于 $\alpha > 0$ ，且网络的异质性较大的情况 ($Var(k) \gg 1$)，

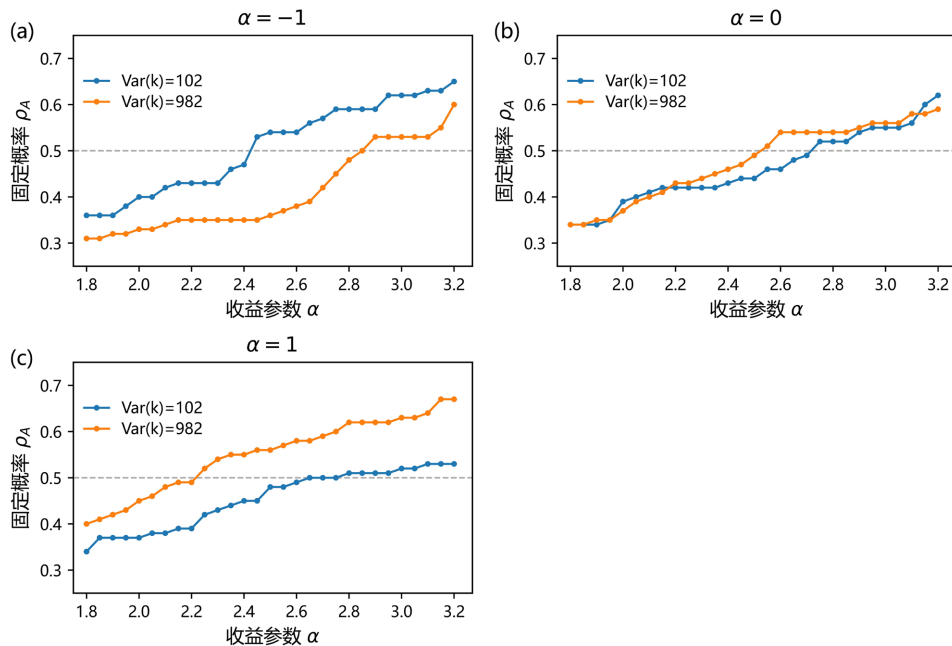


Figure 2. The change of fixation probability with the change of payoffs under different parameters
图 2. 不同参数下固定概率随收益的变化

有 $\beta \rightarrow \infty$ ，此时式(37)的条件可以简化为 $a > 3 - \frac{2}{\langle k \rangle}$ 。这一结果相比于规则网络下的情形更宽松；对于 $\alpha < 0$ ，且网络的异质性较大的情况 ($\text{Var}(k) \gg 1$)，有 $\beta \rightarrow 1$ ，此时式(37)的条件可以简化为 $a > 3$ 。这一结果与对交互更新在规则网络上的情况一致[9]。

在图 2 中我们进行了蒙特卡洛模拟来验证结果，首先生成了两种度方差不同 ($\text{Var}(k)=102$ 与 $\text{Var}(k)=982$) 但平均度相同的图 ($\langle k \rangle = 8$) [32] [33]。进行 10^5 次模拟 (基于 100 个网络，每个网络 1000 次模拟)。每次模拟从 $\phi_c = 0.5$ 开始进行模拟，在这里，我们计算了策略 A 的固定概率 ρ_A (即最终达到全 A 状态的比例) 来衡量策略吸引区的大小。网络的其他参数分别为 $N = 5000$ ， $\omega = 0.01$ 。从图 1(a) 中可以看出，当 $\alpha = 1$ 时，方差越大，策略 A 的固定概率越大，表明策略 A 的吸引区增大。图 1(b) 中为 $\alpha = 0$ 时的情形，可以看出方差对策略演化的影响较弱。图 1(c) 中展示了 $\alpha = -1$ 时的情况，与 $\alpha = 1$ 时的情况相反，随着方差增加，策略 A 的吸引区减小。

5. 结论与展望

本文在网络演化博弈框架下，系统研究了具有异质影响力的死亡 - 出生更新规则对策略演化动力学的影响。研究表明，在引入个体影响力异质性后，网络结构能够通过更新机制本身进入演化过程，从而显著改变经典死亡 - 出生更新规则下的演化结论。本文的核心发现在于：网络异质性在死亡 - 出生更新规则下“不起作用”的经典结论并非源于更新规则的结构性特征，而是依赖于个体影响力同质性的隐含假设。当个体在局域竞争阶段具有不同的传播影响力时，网络的度分布与影响力分布将共同决定策略的演化优势，其作用可统一地编码在一个有效结构参数中。在此框架下，系统的演化动力学仍可等价地表示为复制动力学方程，但其收益矩阵受到网络结构与影响力耦合的系统性修正。

通过对囚徒困境博弈与协调博弈的分析，本文进一步揭示了异质影响力在不同博弈类型中的作用机制。当个体影响力与节点度正相关时，强异质网络能够显著放大高收益策略在枢纽节点上的优势，从而降低合作策略成为演化稳定策略的门槛，甚至促进群体协调到帕累托更优的均衡状态；相反，当影响力与节点度负相关时，网络结构优势被有效抑制，系统的演化行为趋近于规则网络或充分混合群体下的经典结果。这表明，网络异质性本身并不必然促进或抑制某一策略，其演化效应高度依赖于个体影响力与网络结构之间的耦合方式。

本文的研究仍存在若干值得进一步探讨的方向。首先，本文主要关注弱选择极限下的演化行为，未来可考虑推广至有限选择强度情形，以检验异质影响力机制在更一般条件下的稳健性[19]。其次，本文假设影响力仅依赖于节点度，后续工作可引入更一般的影响力来源，例如基于历史收益、策略声誉或动态反馈机制，从而刻画影响力随时间演化的情形[34] [35]。此外，将该框架推广至动态网络或共演化网络环境，也是一个具有现实意义的研究方向[25]。最后，结合实验数据或经验网络，对异质影响力模型进行实证检验，或进一步考虑高阶相互作用结构[36] [37]，将有助于评估该机制在现实社会与生物系统中的适用性。

基金项目

武汉科技大学大学生创新创业训练计划项目，D202502202041373512。

参考文献

- [1] Nowak, M.A. (2006) Five Rules for the Evolution of Cooperation. *Science*, **314**, 1560-1563. <https://doi.org/10.1126/science.1133755>
- [2] Szabó, G. and Fáth, G. (2007) Evolutionary Games on Graphs. *Physics Reports*, **446**, 97-216.

- <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2007.04.004>
- [3] Santos, F.C. and Pacheco, J.M. (2005) Scale-Free Networks Provide a Unifying Framework for the Emergence of Cooperation. *Physical Review Letters*, **95**, Article 098104. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.95.098104>
- [4] Allen, B., Lippner, G., Chen, Y., Fotouhi, B., Momeni, N., Yau, S., *et al.* (2017) Evolutionary Dynamics on Any Population Structure. *Nature*, **544**, 227-230. <https://doi.org/10.1038/nature21723>
- [5] Ohtsuki, H., Hauert, C., Lieberman, E. and Nowak, M.A. (2006) A Simple Rule for the Evolution of Cooperation on Graphs and Social Networks. *Nature*, **441**, 502-505. <https://doi.org/10.1038/nature04605>
- [6] Li, A., Zhou, L., Su, Q., Cornelius, S.P., Liu, Y., Wang, L., *et al.* (2020) Evolution of Cooperation on Temporal Networks. *Nature Communications*, **11**, Article No. 2259. <https://doi.org/10.1038/s41467-020-16088-w>
- [7] Meng, Y., Cornelius, S.P., Liu, Y. and Li, A. (2024) Dynamics of Collective Cooperation under Personalised Strategy Updates. *Nature Communications*, **15**, Article No. 3125. <https://doi.org/10.1038/s41467-024-47380-8>
- [8] Ohtsuki, H. and Nowak, M.A. (2006) Evolutionary Games on Cycles. *Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences*, **273**, 2249-2256. <https://doi.org/10.1098/rspb.2006.3576>
- [9] Ohtsuki, H. and Nowak, M.A. (2006) The Replicator Equation on Graphs. *Journal of Theoretical Biology*, **243**, 86-97. <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2006.06.004>
- [10] Ohtsuki, H. and Nowak, M.A. (2008) Evolutionary Stability on Graphs. *Journal of Theoretical Biology*, **251**, 698-707. <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2008.01.005>
- [11] Perc, M., Gómez-Gardeñes, J., Szolnoki, A., Floría, L.M. and Moreno, Y. (2013) Evolutionary Dynamics of Group Interactions on Structured Populations: A Review. *Journal of The Royal Society Interface*, **10**, Article 20120997. <https://doi.org/10.1098/rsif.2012.0997>
- [12] Nowak, M.A., Bonhoeffer, S. and May, R.M. (1994) Spatial Games and the Maintenance of Cooperation. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **91**, 4877-4881. <https://doi.org/10.1073/pnas.91.11.4877>
- [13] Nowak, M.A. and May, R.M. (1992) Evolutionary Games and Spatial Chaos. *Nature*, **359**, 826-829. <https://doi.org/10.1038/359826a0>
- [14] Ponzela, J., Gómez-Gardeñes, J., Floría, L.M. and Moreno, Y. (2007) Robustness of Cooperation in the Evolutionary Prisoner's Dilemma on Complex Networks. *New Journal of Physics*, **9**, 184-184. <https://doi.org/10.1088/1367-2630/9/6/184>
- [15] Santos, F.C., Santos, M.D. and Pacheco, J.M. (2008) Social Diversity Promotes the Emergence of Cooperation in Public Goods Games. *Nature*, **454**, 213-216. <https://doi.org/10.1038/nature06940>
- [16] Li, C., Zhang, B., Cressman, R. and Tao, Y. (2013) Evolution of Cooperation in a Heterogeneous Graph: Fixation Probabilities under Weak Selection. *PLOS ONE*, **8**, e66560. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0066560>
- [17] McAvoy, A., Allen, B. and Nowak, M.A. (2020) Social Goods Dilemmas in Heterogeneous Societies. *Nature Human Behaviour*, **4**, 819-831. <https://doi.org/10.1038/s41562-020-0881-2>
- [18] Su, Q., Allen, B. and Plotkin, J.B. (2022) Evolution of Cooperation with Asymmetric Social Interactions. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **119**, e2113468118. <https://doi.org/10.1073/pnas.2113468118>
- [19] Tarnita, C.E., Ohtsuki, H., Antal, T., Fu, F. and Nowak, M.A. (2009) Strategy Selection in Structured Populations. *Journal of Theoretical Biology*, **259**, 570-581. <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2009.03.035>
- [20] Nanda, M. and Durrett, R. (2017) Spatial Evolutionary Games with Weak Selection. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **114**, 6046-6051. <https://doi.org/10.1073/pnas.1620852114>
- [21] Zhang, B., Li, C. and Tao, Y. (2016) Evolutionary Stability and the Evolution of Cooperation on Heterogeneous Graphs. *Dynamic Games and Applications*, **6**, 567-579. <https://doi.org/10.1007/s13235-015-0146-2>
- [22] Li, J., Wang, X., Li, C. and Zhang, B. (2025) Replicator Dynamics on Heterogeneous Networks. *Journal of Mathematical Biology*, **90**, Article No. 16. <https://doi.org/10.1007/s00285-024-02177-7>
- [23] Allen, B. and Nowak, M.A. (2014) Games on Graphs. *EMS Surveys in Mathematical Sciences*, **1**, 113-151. <https://doi.org/10.4171/emss/3>
- [24] Allen, B., Lippner, G. and Nowak, M.A. (2019) Evolutionary Games on Isothermal Graphs. *Nature Communications*, **10**, Article No. 5107. <https://doi.org/10.1038/s41467-019-13006-7>
- [25] Maciejewski, W., Fu, F. and Hauert, C. (2014) Evolutionary Game Dynamics in Populations with Heterogenous Structures. *PLOS Computational Biology*, **10**, e1003567. <https://doi.org/10.1371/journal.pcbi.1003567>
- [26] Tkadlec, J., Pavlogiannis, A., Chatterjee, K. and Nowak, M.A. (2020) Limits on Amplifiers of Natural Selection under Death-Birth Updating. *PLOS Computational Biology*, **16**, e1007494. <https://doi.org/10.1371/journal.pcbi.1007494>
- [27] Perc, M. and Szolnoki, A. (2010) Coevolutionary Games—A Mini Review. *Biosystems*, **99**, 109-125.

-
- <https://doi.org/10.1016/j.biosystems.2009.10.003>
- [28] Su, Q., Li, A., Wang, L. and Eugene Stanley, H. (2019) Spatial Reciprocity in the Evolution of Cooperation. *Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences*, **286**, Article 20190041. <https://doi.org/10.1098/rspb.2019.0041>
- [29] Bhaumik, J. and Masuda, N. (2024) Constant-Selection Evolutionary Dynamics on Weighted Networks. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **480**, Article 20240223. <https://doi.org/10.1098/rspa.2024.0223>
- [30] Wang, C. and Szolnoki, A. (2023) Evolution of Cooperation under a Generalized Death-Birth Process. *Physical Review E*, **107**, Article 024303. <https://doi.org/10.1103/physreve.107.024303>
- [31] Nathanson, C.G., Tarnita, C.E. and Nowak, M.A. (2009) Calculating Evolutionary Dynamics in Structured Populations. *PLOS Computational Biology*, **5**, e1000615. <https://doi.org/10.1371/journal.pcbi.1000615>
- [32] Nobari, S., Lu, X., Karras, P. and Bressan, S. (2011) Fast Random Graph Generation. *Proceedings of the 14th International Conference on Extending Database Technology*, Uppsala, 21-24 March 2011, 331-342. <https://doi.org/10.1145/1951365.1951406>
- [33] Barabási, A. and Albert, R. (1999) Emergence of Scaling in Random Networks. *Science*, **286**, 509-512. <https://doi.org/10.1126/science.286.5439.509>
- [34] Wang, X., Zhou, L., McAvoy, A. and Li, A. (2023) Imitation Dynamics on Networks with Incomplete Information. *Nature Communications*, **14**, Article No. 7453. <https://doi.org/10.1038/s41467-023-43048-x>
- [35] Wang, X., Fu, F. and Wang, L. (2024) Deterministic Theory of Evolutionary Games on Temporal Networks. *Journal of The Royal Society Interface*, **21**, Article 20240055. <https://doi.org/10.1098/rsif.2024.0055>
- [36] Chen, Y., Wu, Z. and Guan, J. (2025) Higher-order Evolutionary Dynamics with Game Transitions. *Physical Review E*, **111**, Article 064309. <https://doi.org/10.1103/2x7c-ffpc>
- [37] Kuo, Y.P. and Carja, O. (2024) Evolutionary Graph Theory Beyond Pairwise Interactions: Higher-Order Network Motifs Shape Times to Fixation in Structured Populations. *PLOS Computational Biology*, **20**, e1011905. <https://doi.org/10.1371/journal.pcbi.1011905>