

多无人机投放下沉烟幕云团的时空覆盖最大化

李晶, 路鹏远, 陆予涵, 徐越上

上海外国语大学贤达经济人文学院数据科学学院, 上海

收稿日期: 2026年4月2日; 录用日期: 2026年5月27日; 发布日期: 2026年6月3日

摘要

针对传统烟幕在精确打击防御中遮蔽时间短、协同效率低的问题, 本文提出多无人机协同投放下沉烟幕云团优化方法, 旨在最大化地面固定目标时空遮蔽收益。研究建立了包含导弹、无人机、烟幕弹及下沉云团的统一运动学模型, 并综合均匀风场漂移、无人机最小转弯半径及导弹末段比例导引等约束, 基于可见立体角设计了三维几何遮蔽准则。基于此, 构建了“连续动作生成-鲁棒组合选择”分层优化框架, 结合CMA-ES、增量式贪心算法与局部修复机制, 实现了多机多弹协同投放优化。实验结果表明, 优化方案在单机一弹、单机三弹、三机协同及五机多弹场景下, 有效遮蔽时长分别达4.2 s、7.2 s、10.44 s和19.2 s, 显著优于传统策略。蒙特卡洛评估揭示: 小规模场景中引入鲁棒性可有效改善方案稳定性; 然而, 大规模时序拼接场景中, 名义最优方案表现出明显脆弱性(外样本均值3.247 s, 门槛可靠度0), 即使鲁棒设计, 可靠度也仅提升至0.017。因此, 多机协同烟幕遮蔽任务的优化必须在设计阶段充分考虑外界扰动, 以兼顾遮蔽性能最大化与系统执行稳定性。

关键词

多无人机协同, 烟幕遮蔽, 时空覆盖优化, 三维几何判定, 分层优化, 鲁棒性评估

Maximising the Spatiotemporal Coverage of a Descending Smoke Cloud Deployed by Multiple Drones

Jing Li, Pengyuan Lu, Yuhan Lu, Yueshang Xu

School of Data Science, Xianda College of Economics and Humanities, Shanghai International Studies University, Shanghai

Received: April 2, 2026; accepted: May 27, 2026; published: June 3, 2026

Abstract

This paper studies a coordinated optimisation method for deploying sinking smoke clouds with multiple UAVs to maximise the spatiotemporal concealment of a fixed ground target against precision-guided threats. A unified kinematic model is established for missiles, UAVs, smoke grenades and sinking smoke clouds, with additional consideration of uniform wind drift, UAV minimum-turn-radius constraints and a terminal proportional-guidance extension for missiles. A three-dimensional geometric screening criterion is then developed based on the visible solid angle of the target from the missile perspective. To solve the resulting continuous-discrete coupled optimisation problem, a hierarchical framework of continuous action generation and robust combinational selection is proposed. The continuous layer uses CMA-ES to generate candidate actions, while the combinational layer employs incremental greedy selection with local repair. Numerical results show that the nominal effective screening durations in the single-UAV single-smoke, single-UAV three-smoke, three-UAV cooperative and five-UAV multi-smoke scenarios reach 4.2 s, 7.2 s, 10.44 s and 19.2 s, respectively, significantly outperforming fixed and random strategies. Monte Carlo evaluation reveals that introducing robustness can effectively improve plan stability in small-scale scenarios; however, in large-scale temporal stitching scenarios, the nominally optimal plan exhibits significant fragility (out-of-sample mean 3.247 s, threshold reliability 0), and even with robust design, reliability only increases to 0.017. Therefore, the optimisation of multi-drone collaborative smoke-screening tasks must fully consider external disturbances during the design stage to balance maximal screening performance with system execution stability.

Keywords

Multi-UAV Coordination, Smoke Screening, Spatiotemporal Coverage Optimisation, Three-Dimensional Geometry Determination, Hierarchical Optimisation, Robustness Evaluation

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

烟幕遮蔽通过改变目标与来袭导弹之间的红外与可见光传播条件，削弱导引头对目标的识别、锁定与持续跟踪能力，是对抗精确制导武器的重要软杀伤手段之一[1] [2]。随着无人机集群技术的发展，利用多架无人机协同投放烟幕弹，对固定地面目标实施接续遮蔽，已成为提升战场生存能力的重要思路。

近年来，多无人机任务规划、任务分配与协同决策研究已形成较系统的方法体系，但面向“多无人机协同投放下沉烟幕云团以实现目标持续遮蔽”的研究仍较为有限[3]-[5]。现有研究表明，多无人机任务分配本质上是平台、任务、时序与资源约束耦合的组合优化问题；当进一步与路径规划、动态重分配和三维覆盖分析耦合时，问题规模与求解复杂度会迅速上升[6]-[9]。与此同时，导弹视角下的烟幕遮蔽判定本质上属于给定观测视点下的三维可见性分析问题，在大规模场景中需要在实时性、几何精度与算法可扩展性之间进行权衡[10]-[12]。因此，针对导弹视角下三维几何遮蔽判定、多机多弹时序耦合以及整体遮蔽收益优化的一体化研究仍显不足。

针对上述问题，本文建立导弹、无人机、烟幕弹及下沉云团的统一运动学模型，构建基于目标可见角度的三维几何遮蔽判定方法，并提出“连续动作生成 - 组合优化选择”的分层求解框架，在此基础上

实现多机多弹条件下遮蔽区间并集收益的近似优化[8] [13] [14]。

2. 问题描述与参数设定

本文研究的问题来源于 2025 年“高教杯”全国大学生数学建模竞赛 A 题[15]。建立以假目标为原点 O 的右手坐标系，以 xy 为水平面， z 轴竖直向上。目标为半径 $r=7$ 、高 $H=10$ m 的圆柱体，其下底面圆心位于 $(0, 200, 0)$ ，圆柱几何中心记为 $p_c=(0, 200, 5)$ 。导弹以恒速 $v_m=300$ m/s 直线飞向 o ；无人机在受领任务后可瞬时改变航向，并以 $v_i \in [70, 140]$ m/s 等高直线飞行。烟幕弹脱离无人机后仅受重力作用，在起爆时刻瞬时形成半径 $R=10$ m 的球形云团；云团中心随后以 $v_s=3$ m/s 匀速下沉，起爆后 20 s 内有效。

3. 运动学模型与变量定义

3.1. 导弹轨迹

导弹采用直线匀速近似。设第 l 枚导弹初始位置为 $m_l(0)$ ，飞行方向指向 O ，单位方向向量 $d_l = \frac{O - m_l(0)}{\|O - m_l(0)\|}$ 。忽略机动与空气阻力，导弹轨迹为：

$$m_l(t) = m_l(0) + v_m t d_l, \quad t \geq 0 \quad (1)$$

考虑到来袭导弹在目标附近通常会进入未导引修正阶段，本文在直线匀速近似之外进一步给出比例导引扩展模型，以用于灵敏度分析和对比实验。设导弹速度为 V_m ，导弹与目标的视线角为 λ ，闭合速度为 V_c ，则比例导引下导弹法向加速度可近似表示为

$$a_m = N V_c \dot{\lambda} n \quad (2)$$

其中 N 为导引系数， n 为垂直于瞬时速度方向的单位法向量。本文主要实验采用直线匀速模型，以保持各场景结果的可比性；在扩展实验中，使用上述比例导引近似考察末段机动对最优投放时序与遮蔽收益的影响。

3.2. 无人机轨迹

为避免“受领任务后可瞬时改变航向”的理想化假设，本文在等高飞行近似基础上进一步考虑无人机的最小转弯半径约束。设第 i 架无人机初始位置为 p_i^0 ，初始航向角为 ψ_i^0 ，受领任务后以速度 v_i 在水平面内飞行，飞行高度保持不变[9]。

无人机满足速度约束

$$v_i^{\min} \leq v_i \leq v_i^{\max} \quad (3)$$

且其转弯角速度满足

$$|\omega_i(t)| \leq \omega_i^{\max} \quad (4)$$

对应的最小转弯半径为

$$\rho_i^{\min} = \frac{v_i}{\omega_i^{\max}} \quad (5)$$

记无人机状态为 (x_i, y_i, h_i, ψ_i) ，则其平面运动学方程可表示为

$$\dot{x}_i(t) = v_i \cos \psi_i(t), \dot{y}_i(t) = v_i \sin \psi_i(t), \dot{\psi}_i(t) = \omega_i(t), z_i(t) = h_i \quad (6)$$

对于给定候选投放动作，本文不再简单假设无人机沿“瞬时转向后的直线”飞抵投放点，而是采用满足最小转弯半径约束的 Dubins 可达路径进行可行性判定。设第 i 架无人机执行第 j 枚烟幕弹投放动作

时, 其计划投放点为 p_{ij}^{rel} , 投放时刻为 t_{ij}^{rel} , 对应目标航向为 ψ_{ij}^{rel} 。若从初始状态 (p_i^0, ψ_i^0) 到投放状态 $(p_{ij}^{rel}, \psi_{ij}^{rel})$ 的最短 Dubins 路径长度记为

$$L_i^{Dubins}(p_i^0, \psi_i^0, p_{ij}^{rel}, \psi_{ij}^{rel}), \quad (7)$$

则该动作仅在满足

$$L_i^{Dubins}(p_i^0, \psi_i^0, p_{ij}^{rel}, \psi_{ij}^{rel}) \leq v_i t_{ij}^{rel} \quad (8)$$

时被视为运动学可行。

3.3. 烟幕弹与下沉云团

烟幕弹脱离无人机后, 在起爆前做受重力作用的抛物体运动; 起爆后烟幕云团瞬时形成, 并在重力沉降与环境风场共同作用下演化。设第 i 架无人机第 j 枚烟幕弹在投放时刻 t_{ij}^{rel} 脱离无人机, 脱离瞬间位置为 p_{ij}^{rel} , 初速度与无人机一致, 忽略空气阻力, 则在起爆前的弹道可写为

$$p_{ij}^b(t) = p_{ij}^{rel} + v_i(t - t_{ij}^{rel}) + \frac{1}{2}g(t - t_{ij}^{rel})^2, \quad t \in [t_{ij}^{rel}, t_{ij}^b] \quad (9)$$

其中 $g = (0, 0, -g)$, $t_{ij}^b = t_{ij}^{rel} + \tau_{ij}$ 为起爆时刻, τ_{ij} 为起爆延时。在起爆时刻, 烟幕弹瞬时形成半径为 R_{ij} 的球形云团, 其中心初始位置为

$$c_{ij}(t_{ij}^b) = p_{ij}^b(t_{ij}^b) \quad (10)$$

为增强环境建模的真实性, 本文在原有“竖直匀速下沉”基础上引入均匀风场模型。假设风场速度为

$$w = (\omega_x, \omega_y, 0) \quad (11)$$

则起爆后云团中心的运动方程表示为

$$c_{ij}(t) = c_{ij}(t_{ij}^b) + w(t - t_{ij}^b) + (0, 0, -v_{s,ij}(t - t_{ij}^b)), \quad t \in [t_{ij}^b, t_{ij}^b + T_c] \quad (12)$$

其中 $v_{s,ij}$ 为云团下沉速度, T_c 为云团有效持续时间。

有效期内将云团近似视为半径不变的平移球体。

3.4. 目标函数与评价指标

对第 l 枚导弹, 定义遮蔽比例为 $\eta_l(t) \in [0, 1]$ 衡量在导弹视角下目标可见固角中被云团遮挡的比例(见第 3 节)。给定阈值 α (本文取 0.95), $\eta_l(t) \geq \alpha$ 时视为“有效遮蔽”。因此, 第 l 枚导弹对应的有效遮蔽时长定义为:

$$T_l = \int_0^{T_{\text{end}}} 1[\eta_l(t) \geq \alpha] dt. \quad (13)$$

其中, T_{end} 可取导弹到达假目标 O 的时刻, 或所有云团失效后的时刻。该指标刻画了目标在导弹视角下达到“有效遮蔽”标准的累计持续时间。多导弹情形下, 可取加权总目标 $F = \sum_{l \in L} w_l T_l$ (w_l 为第 l 枚导弹对应的威胁权重), 也可取每个导弹有效遮蔽时间的并集长度作为总体目标。

4. 三维遮蔽判定与固角覆盖率估计

4.1. 解析射线求交

遮蔽判定原理是: 对于导弹在时刻 t 的观测位置, 沿任意可能命中目标的视线方向 u , 判断该方向

上目标的最近可见交点是否已在到达前被某一有效烟幕云团优先截获，这一过程可归结为典型的视点相关三维可见性分析问题。为避免仅对目标表面离散采样所带来的视角权重失衡，本文直接在观测方向域而非目标表面参数域上进行遮蔽判定，从而使遮挡估计更符合传感器视域中的几何意义[10][11]。

如图 1 所示，本文从导弹观测点出发，在方向域内判断视线是否先被烟幕云团截获，以被遮挡的固角占目标可见固角的衡量遮蔽效果。

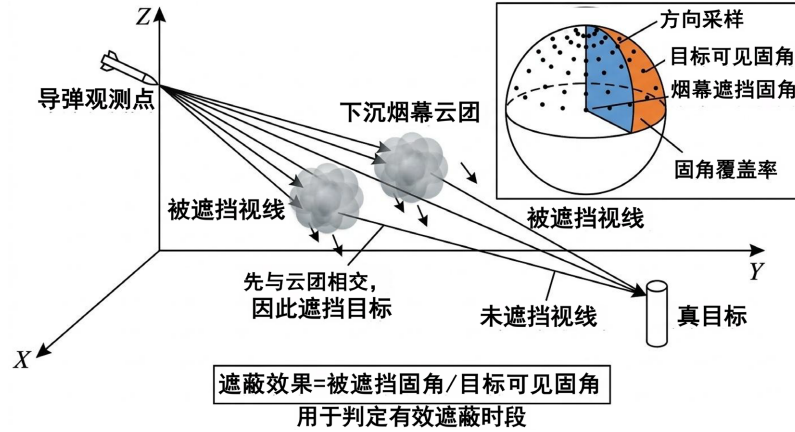


Figure 1. Three-dimensional occlusion determination and solid-angle coverage estimation from the missile's perspective
图 1. 导弹视角下的三维遮蔽判定与固角遮盖率估计

给定单位方向 u ($\|u\|=1$)，从第 l 枚导弹出发的射线记为

$$r_l(s; t, u) = m_l(t) + su, \quad s \geq 0 \tag{14}$$

其中 $m_l(t)$ 为第 l 枚导弹在时刻 t 的位置。记射线与目标最近距离为 $s_r(l, t, u)$ ，与云团 (i, j) 最近交点距离为 $s_{c,ij}(l, t, u)$ 。

射线与球形云团：对任意有效云团 (i, j) ，其球心 $c_{ij}(t)$ ，半径 R ，令 $d_{ij}(t) = m_l(t) - c_{ij}(t)$ 。射线与球面交点由一元二次方程给出，其判别式为：

$$\Delta = (2u^T d_{ij})^2 - 4(\|d_{ij}\|^2 - R^2) \tag{15}$$

两个交点参数值为：

$$s_{1,2} = \frac{-2u^T d_{ij} \pm \sqrt{\Delta}}{2} \tag{16}$$

取最小的正实根作为云团交点距离：

$$S_{c,ij}(l, t, u) = \min \{s > 0 \mid s \in \{s_1, s_2\}\} \tag{17}$$

若无正根则 $s_{c,ij} = +\infty$ 。

射线与圆柱真目标：将目标视为封闭有限圆柱(侧面与上下底面)。设圆柱底面圆心为 $o_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ，半径 r ，高度 H ，轴向与 z 轴平行。令

$$q(t) = m_l(t) - o_0 = (q_x, q_y, q_z), \quad u = (u_x, u_y, u_z) \tag{18}$$

侧面求交：可写为二次方程 $As^2 + Bs + C = 0$ ，其中：

$$A = u_x^2 + u_y^2, \quad B = 2(q_x u_x + q_y u_y), \quad C = q_x^2 + q_y^2 - r^2 \tag{19}$$

端面求交：若 $u_z \neq 0$ 上/下底面候选交点参数为

$$s_{bot} = -\frac{q_z}{u_z}, \quad s_{top} = \frac{H - q_z}{u_z} \quad (20)$$

并需满足端面内条件为： $(q_x + su_x)^2 + (q_y + su_y)^2 \leq r^2$ 。将侧面与端面所有满足 $s > 0$ 且高度约束的候选根取最小者得 $s_T(l, t, u)$ ；若无交点则 $s_T = +\infty$ 。

当 $s_T < +\infty$ 且存在云团使

$$\min_{ij} s_{C,ij}(l, t, u) < s_T(l, t, u) \quad (21)$$

那么该方向视线被遮挡，记 $I(u, t) = 1$ ，否则 $I(u, t) = 0$ 。

4.2. 固角覆盖率与误差控制

记 $\Omega_l(t)$ 为从第 l 枚导弹位置出发、能够与目标相交的视线方向集合(即“目标在导弹视角下的可见固角”)。则遮蔽占比为：

$$\eta_l(t) = \frac{1}{|\Omega_l(t)|} \int_{\Omega_l(t)} I(u, t) d\omega \quad (22)$$

其中 $I(u, t) = 1$ 表示方向 u 被至少一个云团在目标之前遮挡， $d\omega$ 记为球面固角测度。该定义与观测传感器视域的角度覆盖含义一致，可更自然地表征不同视线方向对目标可见性的贡献，从而避免目标表面离散化带来的方向权重不一致问题[13] [14]。

为提高固角积分的估计效率，本文利用目标外接球构造包含 $\Omega_l(t)$ 的球冠区域，并仅在角域内进行离散采样，以减少大量与目标无关的无效方向计算[14] [16]。

令外接球半径 $r_b = \sqrt{r^2 + \left(\frac{H}{2}\right)^2}$ ，外接球中心为 p_c ，令

$$d_l(t) = \frac{P_c - m_l(t)}{\|P_c - m_l(t)\|} \quad (23)$$

则球冠半角

$$\delta_i(t) = \arcsin\left(\frac{r_b}{\|P_c - m_l(t)\|}\right) \quad (24)$$

在球冠区域内，本文采用近似均匀的方向样本集 $\{u_n\}$ ，对可见角域进行离散，并结合第 3.1 节解析射线求交逐一判断遮蔽关系，以兼顾覆盖均匀性与计算效率。

局部坐标生成(以球冠极轴为 z 轴)：

$$\begin{aligned} z_n &= \cos \delta_i(t) + \frac{n-1/2}{N} (1 - \cos \delta_i(t)) \\ \varphi_n &= 2\pi \cdot \frac{n}{\varphi_g} \\ u'_n &= \left(\sqrt{1 - z_n^2} \cos \varphi_n, \sqrt{1 - z_n^2} \sin \varphi_n, z_n \right) \end{aligned} \quad (25)$$

将 u'_n 通过 Rodrigues 旋转变换到以 $d_l(t)$ 为极轴的全局方向 u_n ，并筛选命中目标的方向集合

$$V_l(t) = \{u_n \mid s_T(l, t, u_n) < +\infty\} \quad (26)$$

令 $|V_l(t)|$ 表示集合 $V_l(t)$ 的元素个数，则离散估计为：

$$\hat{\eta}_l(t) = \frac{1}{|V_l(t)|} \sum_{u_n \in V_l(t)} I(u_n, t) \quad (27)$$

当 N 逐步加密时， $\hat{\eta}_l(t)$ 对 $\eta_l(t)$ 收敛稳定；实际计算中，可采用“逐步加密，直至两次估计差小于 ε_η ”作为停止准则(本文取 $\varepsilon_\eta = 0.01$)，从而将采样误差控制在可接受范围。

进一步，由于 $I(u_n, t) \in \{0, 1\}$ ，用 Hoeffding 不等式计算概率型误差上界：

$$\Pr(|\hat{\eta}_l(t) - \eta_l(t)| \geq \varepsilon) \leq 2 \exp(-2|V_l(t)|\varepsilon^2) \quad (28)$$

若希望置信度 $1 - \delta_p$ ，则取

$$|V_l(t)| \geq \frac{1}{2\varepsilon^2} \ln\left(\frac{2}{\delta_p}\right) \quad (29)$$

实际计算中采用逐步加密方式控制采样误差。

5. 分层优化框架与增量式贪心 - 修复算法

5.1. 优化变量、约束与动作表示

设无人机集合 I ，第 i 架无人机可投放 J_i 枚烟幕弹；来袭导弹集合 L 。统一连续决策变量为 $\mathbf{x} = \{\psi_i, v_i, t_{ij}, \tau_{ij}\}$ ，其中： ψ_i 与 v_i 分别为无人机航向角与速度， t_{ij} 为第 i 架无人机第 j 枚烟幕弹的投放时刻， τ_{ij} 为起爆延时(起爆时刻 $t_{ij}^b = t_{ij} + \tau_{ij}$)；并引入离散变量 $a_{ij} \in L$ 表示该弹主要干扰的导弹编号。约束包括： $v_i \in [70, 140]$ ；投放时刻与延时边界： $t_{\min} \leq t_{ij} \leq t_{\max}$ ， $\tau_{\min} \leq \tau_{ij} \leq \tau_{\max}$ ；记同驾无人机相邻两次投放时间间隔为 $\Delta t_{ij} = t_{i, j+1} - t_{ij}$ 且 $\Delta t_{ii} \geq \Delta t_{\min}$ ， $\Delta t_{\min} = 1$ s 相邻投放间隔 $\Delta t_{ij} \geq 1$ s；弹量约束 $j \leq J_i$ 。

5.2. 分层优化思想

多无人机协同投放问题同时包含连续动作参数、离散任务分配、投放时序耦合及执行扰动影响，若直接在统一高维空间中优化，易导致维度过高和求解不稳定。为此，本文采用“连续动作生成 - 鲁棒组合选择”的分层框架[3] [4] [6] [7]。

第一层为连续动作生成层。将“一枚烟幕弹 + 指定无人机 i + 指定威胁导弹 l ”视为基本动作生成单元，在变量

$$x_{ijl} = (\psi_i, v_i, t_{ij}^{rel}, \tau_{ij}) \quad (30)$$

上采用 CMA-ES 搜索，使单动作在名义场景下的收益最大，并由此生成候选动作集合[15] [16]

$$A = \bigcup_{ijl} A_{ijl}. \quad (31)$$

第二层为鲁棒组合选择层。在弹量约束、最小投放间隔约束、Dubins 可达性约束以及全局时序约束下，从候选动作集合 A 中选择动作子集 $S \subseteq A$ ，以最大化扰动场景下的鲁棒遮蔽收益。设 ξ 表示由航向误差、速度扰动、投放时刻偏差、起爆延时偏差、云团半径误差、下沉速度误差及风场偏差构成的不确定参数向量，则鲁棒目标函数定义为：[3] [4] [17]。

$$J(S) = E_\xi [F(S, \xi)] - \lambda Std [F(S, \xi)] \quad (32)$$

其中 $F(S, \xi)$ 表示在扰动场景 ξ 下动作组合 S 的总遮蔽收益， $\lambda \geq 0$ 为风险厌恶系数。当 $\lambda = 0$ 时，该模

型退化为仅追求期望收益最大化；当 $\lambda > 0$ 时，则兼顾高收益与低波动性。

在实现上，本文通过有限场景采样近似计算鲁棒目标。设采样得到 N_s 个扰动场景 $\{\xi_s^{(1)}, \dots, \xi_s^{(N)}\}$ ，则有

$$\hat{J}(S) = \frac{1}{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} F(S, \xi_s^{(k)}) - \lambda \sqrt{\frac{1}{N_s - 1} \sum_{k=1}^{N_s} (F(S, \xi_s^{(k)}) - \bar{F}(S))^2} \quad (33)$$

其中

$$\bar{F}(S) = \frac{1}{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} F(S, \xi_s^{(k)}) \quad (34)$$

如图 2 该分层结构将连续参数搜索与全局协同选择解耦，从而兼顾求解效率、遮蔽性能与执行稳定性。

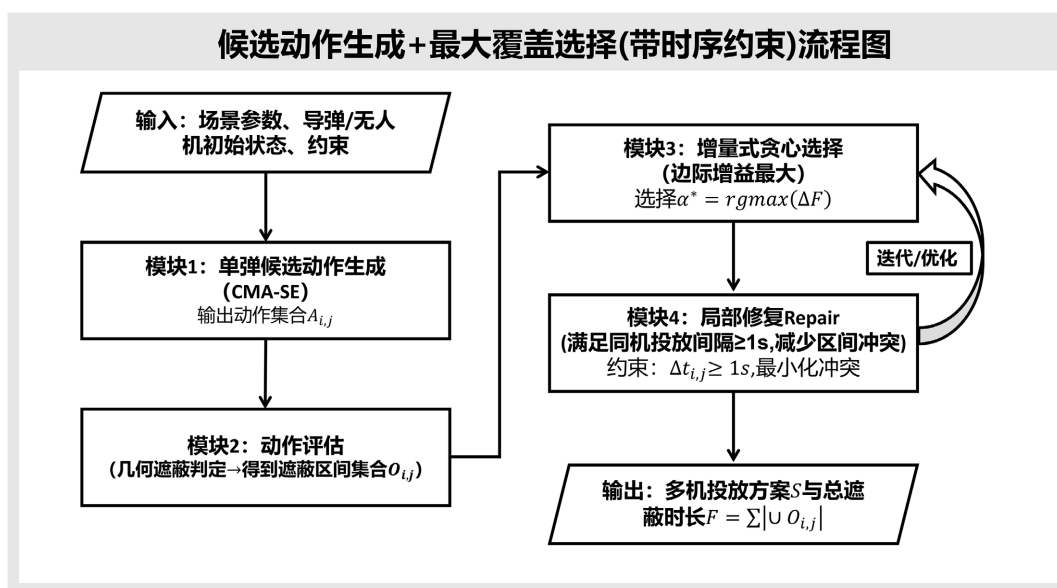


Figure 2. Hierarchical optimization framework
图 2. 分层优化框架

5.3. 增量式贪心 - 修复算法

在得到候选动作集合 A 后，本文采用增量式贪心-局部修复算法构造最终动作组合。其基本思想为：每一步优先选择能够带来最大鲁棒边际增益的候选动作；若新动作加入后引发同机投放时序冲突、可达性冲突或遮蔽区间冗余重叠，则对受影响动作进行局部修复，使其重新满足约束并尽可能保留总体收益。

设已选动作集合为 S ，对于任意未被选中的候选动作 $a \in A \setminus S$ ，定义鲁棒边际增益为[8] [14]

$$\Delta(a|S) = \hat{J}(S \cup \{a\}) - \hat{J}(S) \quad (35)$$

每一步选择满足约束且具有最大 $\Delta(a|S)$ 的候选动作加入集合。若存在多个候选动作具有相同边际增益，则优先选择对高威胁导弹平均增益更高、且与现有动作时间重叠更小者。

当候选动作加入后，局部修复过程包括以下三步：

(1) 时序冲突检测：检查同一无人机上任意相邻两次投放是否满足最小投放间隔约束；同时检查候

选动作对应投放点是否满足 Dubins 可达性约束。

(2) 最近可行投影：若某一动作的投放时刻与前后动作发生冲突，则将其投放时刻投影至最近可行时刻；若投影后不再满足起爆时序或可达性条件，则在保持动作类型不变的前提下对起爆延时作小范围联动平移。

(3) 收益重评估与替换：修复后重新测算受影响动作的遮蔽区间及总体鲁棒收益。若修复导致总体收益下降超过预设阈值，则回退该动作，并尝试当前候选池中的次优动作。

如图 3 对于每一枚导弹，动作组合对应的有效遮蔽时间集仍记为若干互不相交区间的并集；区间并集长度可通过排序和线性扫描高效更新。因此，尽管鲁棒性的目标需在多个扰动场景下重复评估，该算法在中等规模动作集合下仍具有良好的计算可扩展性[8] [13]。

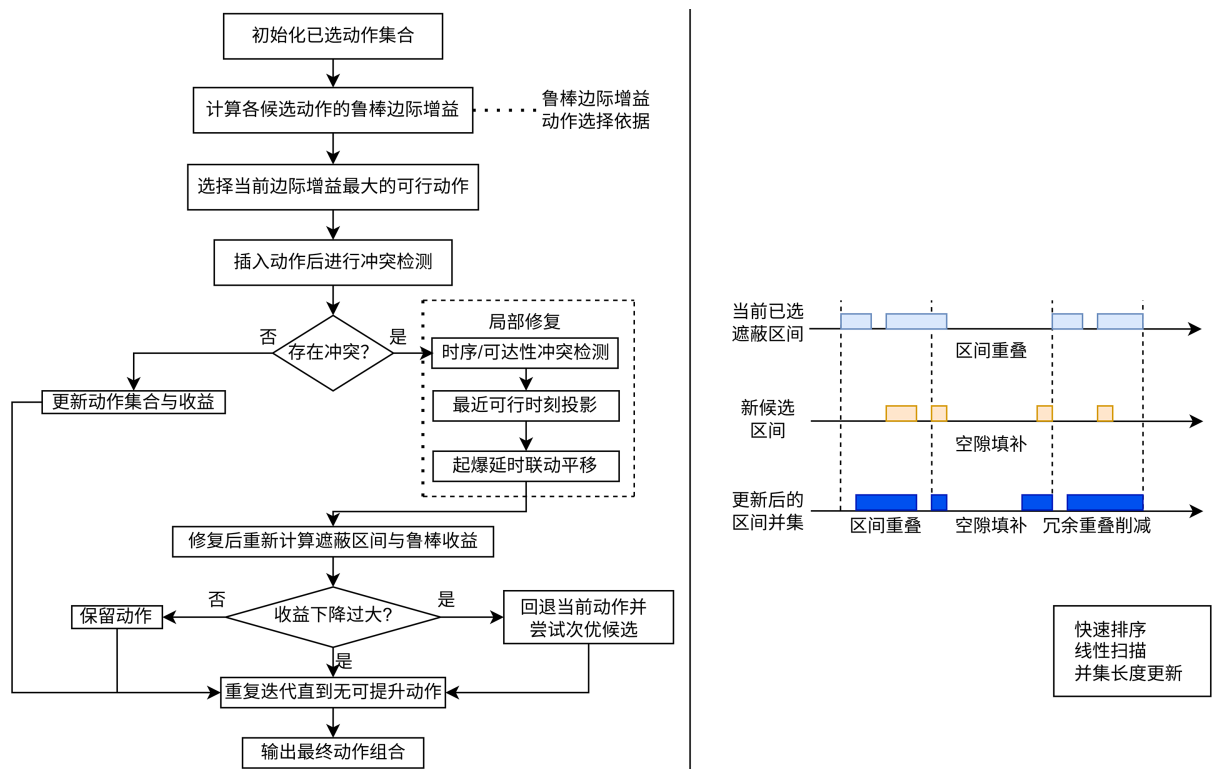


Figure 3. Incremental greedy-repair algorithm
图 3. 增量式贪心 - 修复算法

6. 数值实验与分析

为评估所提“连续动作生成 - 组合优化选择”分层框架在不同问题规模下的求解性能，本文将题目中的问题 2~5 组织为递进实验体系：问题 2 为单机单弹单导弹的小规模连续优化问题；问题 3 为单机三弹的中规模时序拼接问题；问题 4 为三机各投一弹的中规模多机协同问题；问题 5 为五机多弹对三枚来袭导弹的大规模协同遮蔽问题。问题 1 给定策略下的结果主要用于校验运动学模型与三维遮蔽判定模块的正确性，不作为优化算法对比对象。对比方法包括：固定策略基线、随机可行策略、粗网格策略、近似精确搜索、名义贪心策略、模拟退火以及鲁棒策略。其中，粗网格策略和近似精确搜索仅仅用于问题 2~4，评估该方法在小、中规模实例中具有近优性。实验记录名义遮蔽时长、选中动作数与整体求解时间。

Table 1. Comparison of nominal performance of representative strategies under different problem scales
表 1. 不同问题规模下代表性策略的名义性能比较

问题	策略	选中动作数	名义遮蔽时长/s	求解耗时/s
Q2	固定策略基线	1	1.400 s	0.00 s
Q2	随机可行策略	1	0.000 s	0.00 s
Q2	粗网格策略	1	2.800 s	343.28 s
Q2	近似精确搜索	1	4.200 s	248.40 s
Q2	模拟退火	1	4.200 s	213.37 s
Q2	名义贪心策略	1	4.200 s	71.59 s
Q2	鲁棒策略	1	3.400 s	1898.26 s
Q3	固定策略基线	3	1.400 s	0.00 s
Q3	随机可行策略	3	0.000 s	0.00 s
Q3	粗网格策略	3	4.600 s	225.58 s
Q3	近似精确搜索	3	7.200 s	208.57 s
Q3	模拟退火	3	6.900 s	324.57 s
Q3	名义贪心策略	3	7.200 s	121.06 s
Q3	鲁棒策略	3	5.200 s	1210.17 s
Q4	固定策略基线	1	1.400 s	0.00 s
Q4	随机可行策略	3	0.000 s	0.00 s
Q4	粗网格策略	1	2.800 s	828.65 s
Q4	近似精确搜索	2	10.440 s	765.97 s
Q4	模拟退火	2	10.240 s	779.36 s
Q4	名义贪心策略	2	10.440 s	558.26 s
Q4	鲁棒策略	3	7.800 s	3026.34 s
Q5	固定策略基线	15	1.400 s	0.00 s
Q5	随机可行策略	12	0.000 s	0.00 s
Q5	模拟退火	7	17.600 s	4255.90 s
Q5	名义贪心策略	7	19.200 s	4001.85 s
Q5	鲁棒策略	7	9.600 s	30379.82 s

由表 1 可见, 所提分层框架在不同问题规模下均显著优于固定策略和随机策略。问题 2 中, 名义贪心、模拟退火与近似精确搜索均达到 4.200 s, 明显优于给定策略的 1.400 s, 说明所提方法在小规模场景下已能够稳定逼近近似精确解。问题 3 中, 名义贪心和近似精确搜索均达到 7.200 s, 显著高于粗网格基线的 4.600 s, 表明时间分层候选保留策略能够有效增强多弹时序拼接能力。问题 4 中, 名义贪心与近似

精确搜索均达到 10.440 s, 显示出多机协同在几何互补与时序分担上的优势。问题 5 中, 名义贪心达到 19.200 s, 说明分层候选生成与组合优化在大规模多机多弹多导弹场景下仍具有较强的名义搜索能力。与此同时, 鲁棒策略在各问题中的名义值均低于对应名义最优值, 说明鲁棒设计会主动牺牲部分名义收益以换取稳定性。随着问题规模由 Q2 扩展 Q5, 求解耗时快速增长, 尤其在问题 5 的鲁棒优化中达到 30379.82 s, 表明 Monte-Carlo 内层评估已成为大规模鲁棒设计的主要计算瓶颈。

7. 不确定性建模与鲁棒性评估

考虑实际执行过程中存在的航向控制误差、飞行速度扰动、投放时刻偏差、起爆延时偏差、云团参数扰动以及来袭导弹速度偏差, 本文在名义动作方案基础上采用 Monte-Carlo 方法进行外样本鲁棒性评估 [9] [16]。对每种策略重复采样得到总遮蔽时长样本 $\{F^{(1)}, F^{(2)}, \dots, F^{(N)}\}$, 并统计名义值 F_{nom} 、外样本均值 $E[F]$ 、标准差 $Std[F]$ 和门槛可靠度 $P(F \geq 0.8F_{nom})$ 。其中, 门槛可靠度用于衡量方案在扰动下保持较高防护效果的能力; 对于名义值为 0 的随机基线, 其可靠度退化为 1, 因此主要参考均值和标准差。

Table 2. Robustness statistics of representative strategies under different problem scales
表 2. 不同问题规模下代表性策略的鲁棒性统计

问题	策略	F_{nom}/s	$E[F]/s$	Std/s	$P(F \geq 0.8F_{nom})$
Q2	固定策略基线	1.4	0.45	0.853	0.2
Q2	名义贪心策略	4.2	1.015	1.364	0.1
Q2	鲁棒策略	3.4	0.97	1.398	0.175
Q3	固定策略基线	1.4	0.335	0.718	0.125
Q3	名义贪心策略	7.2	1.76	1.773	0
Q3	近似精确搜索	7.2	1.97	1.867	0
Q3	鲁棒策略	5.2	2.17	1.818	0.15
Q4	固定策略基线	1.4	0.335	0.718	0.125
Q4	名义贪心策略	10.44	1.82	1.929	0.025
Q4	鲁棒策略	7.8	1.86	1.752	0.025
Q5	固定策略基线	1.4	0.477	0.882	0.167
Q5	模拟退火	17.6	3.063	2.405	0
Q5	名义贪心策略	19.2	3.247	2.797	0
Q5	鲁棒策略	9.6	2.55	2.181	0.017

由表 2 可见, 小规模问题 2 中, 名义优化虽将遮蔽时长由 1.400 s 提升至 4.200 s, 但外样本均值仅为 1.015 s, 可靠度也只有 0.100, 说明即使在单机一弹场景下, 名义最优方案仍对执行误差较为敏感; 鲁棒策略将名义值降为 3.400 s, 但可靠度提高到 0.175, 表明鲁棒设计能够在较小名义损失下换取一定稳定性提升。问题 3 中, 名义贪心和近似精确搜索虽然都达到 7.200 s 的高名义值, 但其可靠度均为 0, 说明多弹拼接方案在扰动下极易失稳; 鲁棒策略的名义值降为 5.200 s, 但均值提高到 2.170 s, 可靠度提高到 0.150, 说明鲁棒设计对多弹时序拼接具有一定缓冲作用。问题 4 和问题 5 进一步揭示了“脆弱最优”现

象随规模扩大而加剧：问题4中，名义贪心的名义值达到10.440 s，但均值仅为1.820 s，可靠度为0.025；问题5中，名义贪心的名义值达到19.200 s，但外样本均值仅为3.247 s，可靠度为0，说明大规模多机多弹多导弹方案对关键投放-起爆时刻存在极强依赖。鲁棒策略虽将问题5的名义值压缩到9.600 s，并把可靠度提升到0.017，同时标准差降至2.181 s，但改善幅度仍有限。总体来看，随着问题规模增大，名义最优值持续提升，但外样本均值与可靠度并未同步提高，反而在大规模场景中显著恶化。

8. 结论与展望

本文围绕多无人机协同投放下沉烟幕云团的时空覆盖优化问题，建立了导弹、无人机、烟幕弹与下沉云团的统一运动学模型，构建了基于导弹视角可见固角的三维几何遮蔽判定方法，并提出“连续动作生成-组合优化选择”的分层求解框架[3] [10]。实验结果表明，所提方法在不同规模问题中均显著优于固定策略与随机策略：问题2中，名义贪心与近似精确搜索结果一致，说明该方法在小规模场景下具有较好的近优性；问题3中，时间分层候选保留策略有效提升了多弹时序拼接能力；问题4中，多机协同显著扩大了有效遮蔽窗口；问题5中，名义优化结果达到19.200 s，说明分层优化框架在大规模多机多弹多导弹问题中具有较强的名义搜索能力。

Monte-Carlo 鲁棒性评估结果显示，随着问题规模增大，名义最优方案表现出明显的“脆弱最优”特征。尤其在问题5中，虽然名义值很高，但外样本均值大幅下降、门槛可靠度几乎为0，说明精细时序拼接方案对扰动具有较强敏感性。鲁棒策略虽然在一定程度上改善了均值、标准差和可靠度，但仍未从根本上消除大规模场景中的尾部失效风险。后续研究可进一步从三个方面展开：其一，在物理建模层面引入云团浓度衰减、空间扩散等因素，以增强模型真实性；其二，在优化层面引入机会约束、分布鲁棒优化与滚动时域重规划机制，以提升复杂扰动条件下的方案可靠度；其三，在工程实现层面结合候选动作剪枝、分阶段鲁棒筛选和并行 Monte-Carlo 评估，以降低大规模鲁棒优化的计算代价，提高方法在动态威胁环境中的应用可行性[6] [9] [16]。

参考文献

- [1] Sun, W.J., Gao, Q.H., Zhang, J.Z., *et al.* (2023) Aerosol Infrared Stealth Technology: Theory and Development of Infrared Suppression and Particle Dispersion in Aircraft Plume. *Thermal Science and Engineering Progress*, **39**, Article ID: 101695. <https://doi.org/10.1016/j.tsep.2023.101695>
- [2] Li, H., Wen, S., Li, S., Wang, H., Geng, X., Wang, S., *et al.* (2024) The Research on Infrared Radiation Affected by Smoke or Fog in Different Environmental Temperatures. *Scientific Reports*, **14**, Article No. 14410. <https://doi.org/10.1038/s41598-024-65462-x>
- [3] Song, J., Zhao, K. and Liu, Y. (2023) Survey on Mission Planning of Multiple Unmanned Aerial Vehicles. *Aerospace*, **10**, Article No. 208. <https://doi.org/10.3390/aerospace10030208>
- [4] Skaltsis, G.M., Shin, H.S. and Tsourdos, A. (2023) A Review of Task Allocation Methods for UAVs. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, **109**, Article No. 76. <https://doi.org/10.1007/s10846-023-02011-0>
- [5] Ghauri, S.A., Sarfraz, M., Qamar, R.A., Sohail, M.F. and Khan, S.A. (2024) A Review of Multi-UAV Task Allocation Algorithms for a Search and Rescue Scenario. *Journal of Sensor and Actuator Networks*, **13**, Article No. 47. <https://doi.org/10.3390/jsan13050047>
- [6] Alqefari, S. and Menai, M.E.B. (2025) Multi-UAV Task Assignment in Dynamic Environments: Current Trends and Future Directions. *Drones*, **9**, Article No. 75. <https://doi.org/10.3390/drones9010075>
- [7] Qamar, R.A., Sarfraz, M., Rahman, A. and Ghauri, S.A. (2023) Multi-Criterion Multi-UAV Task Allocation under Dynamic Conditions. *Journal of King Saud University-Computer and Information Sciences*, **35**, Article ID: 101734. <https://doi.org/10.1016/j.jksuci.2023.101734>
- [8] Yu, J., Zhang, H. and Zhang, Y. (2025) Distributed UAV Swarms for 3D Urban Area Coverage with Incomplete Information Using Event-Triggered Hierarchical Reinforcement Learning. *Computers & Industrial Engineering*, **199**, Article ID: 110734. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2024.110734>
- [9] Guo, S., Zhou, L., Liang, S., Cao, K. and Song, Z. (2024) Connectivity-Enhanced 3D Deployment Algorithm for Multiple

- UAVs in Space-Air-Ground Integrated Network. *Aerospace*, **11**, Article No. 969. <https://doi.org/10.3390/aerospace11120969>
- [10] Zhao, J., Xu, A., Zhang, X., Zhang, Y., Zhang, Y., Cao, M., *et al.* (2024) Overview and Prospects of Visibility Analysis Approaches. *Proceedings*, **110**, Article No. 28. <https://doi.org/10.3390/proceedings2024110028>
- [11] Hanif, M., Shimizu, T., Lu, Z., *et al.* (2024) Efficient Angle-Aware Coverage Control for Large-Scale 3D Map Reconstruction Using Drone Networks. *SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration*, **17**, 144-155. <https://doi.org/10.1080/18824889.2024.2346375>
- [12] Tsiakas, K., Tsardoulis, E. and Symeonidis, A.L. (2024) Autonomous Full 3D Coverage Using an Aerial Vehicle, Performing Localization, Path Planning, and Navigation towards Indoors Inventorying for the Logistics Domain. *Robotics*, **13**, Article No. 83. <https://doi.org/10.3390/robotics13060083>
- [13] Zhang, C., Xu, C., Li, G. and He, B. (2025) A Distributed Task Allocation Approach for Multi-UAV Persistent Monitoring in Dynamic Environments. *Scientific Reports*, **15**, Article No. 6437. <https://doi.org/10.1038/s41598-025-89787-3>
- [14] Zhao, X., Liu, Y., Zhu, S., Zhang, T., Gong, Y. and Li, L. (2026) Multi-Stage Task Allocation Strategy for UAV Clusterin Multi-Object Tracking. *Journal of Cloud Computing*, **15**, Article No. 21. <https://doi.org/10.1186/s13677-025-00832-y>
- [15] 全国大学生数学建模组委会. 2025 “高教杯”全国大学生数学建模竞赛题[EB/OL]. <https://www.cmathc.org.cn/mcm/st/301.html>, 2025-09-04.
- [16] Huang, H., Jiang, Z., Yan, T. and Bai, Y. (2024) Dynamic Task Allocation for Heterogeneous Multi-UAVs in Uncertain Environments Based on 4DI-GWO Algorithm. *Drones*, **8**, Article No. 236. <https://doi.org/10.3390/drones8060236>
- [17] Kong, X., Zhou, Y., Li, Z. and Wang, S. (2024) Multi-UAV Simultaneous Target Assignment and Path Planning Based on Deep Reinforcement Learning in Dynamic Multiple Obstacles Environments. *Frontiers in Neurorobotics*, **17**, Article ID: 1302898. <https://doi.org/10.3389/fnbot.2023.1302898>