

多目标区间值优化问题的近似最优性条件

师茗萱, 王海军

太原师范学院数学与统计学院, 山西 晋中

收稿日期: 2026年9月8日; 录用日期: 2026年10月6日; 发布日期: 2026年10月14日

摘 要

本文考虑带不等式约束的多目标区间值优化问题利用两种序关系分别建立了近似强KKT条件和强互补近似KKT条件。在无任何约束规范的前提下, 证明了近似强KKT条件和强互补近似KKT条件的充分和必要条件。

关键词

多目标区间值优化问题, 最优性条件, LU -序关系, CW -序关系

Approximate Optimality Conditions for Multiobjective Interval-Valued Optimization Problems

Mingxuan Shi, Haijun Wang

School of Mathematics and Statistics, Taiyuan Normal University, Jinzhong Shanxi

Received: September 8, 2026; accepted: October 6, 2026; published: October 14, 2026

Abstract

This paper addresses multiobjective interval-valued optimization problems subject to inequality constraints. Two types of order relations are adopted to establish the approximate strong KKT conditions and the strong complementary approximate KKT conditions, respectively. In the absence of any constraint qualification, both sufficient and necessary conditions for these approximate KKT conditions are proved.

Keywords

Multiobjective Interval-Valued Optimization Problems, Optimality Conditions, LU -Order Relation,

CW-Order Relation

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在工程设计、资源调度与经济决策等实际场景中, 往往同时存在多个相互矛盾、无法同时达到最优的优化目标, 单目标优化模型难以客观刻画此类复杂决策需求, 因此开展多目标优化理论研究具有重要现实与理论价值。最优性条件是最优化理论的核心内容。为最优解的刻画和求解提供理论支撑, 经典 KKT 最优性条件的成立需要严苛的约束规范, 难以适配复杂的实际问题。近似 KKT 条件则通过松弛梯度平衡, 弱化了对约束规范的要求, 适用性更强。因此近似最优性条件受到众多学者的关注。

Haeser [1]率先提出连续变分不等式的近似 Karush-Kuhn-Tucker (AKKT)最优性条件。在此基础上, Giorgi 等人[2]将 AKKT 条件的适用范围拓展至含等式与不等式约束的多目标优化问题, 证明了在无需任何约束规范的前提下, 该条件是可行点成为局部弱有效解的必要条件, 且在凸性假设下证明了最优性充分条件。随后, Feng 和 Li [3]针对仅含不等式约束的光滑多目标优化问题, 构建了近似强 Karush-Kuhn-Tucker (ASKKT)条件, 证实了局部有效点必满足 ASKKT 条件。后续, Maurya 和 Mishra [4]进一步拓展研究, 针对含等式与不等式约束的光滑多目标优化问题提出强互补近似 Karush-Kuhn-Tucker (SCAKKT)条件, 该条件与 AKKT、ASKKT 条件存在差异。在上述研究基础上, Deng [5]等人将这类近似最优性条件推广到讨论带等式与不等式约束的多目标分式规划问题。之后还有众多文献将近似 KKT 条件推广到带其他约束的优化问题上, 例如带双层约束[6], 锥约束[7][8], 半无限约束[9][10]的最优化问题上。

现实生活中的许多不确定性问题, 随机优化与模糊优化在数据不足时难以应用, 而区间值优化规划能够更简便、高效地处理含不确定性的优化问题。目前已有许多文献研究了区间值优化问题的各类求解方法: Alefeld 与 Mayer [11]综述了区间算术的相关应用, Ishibuchi 和 Tanaka [12]提出了基于区间中心与半宽的闭区间序关系, 并给出多目标区间值优化问题的解概念。Wu [13]针对实数域全体闭区间上的两类偏序(LU 序与 CW 序), 给出区间值优化问题的两种解定义以及其充分必要条件; 之后, 很多学者将区间值优化问题的 KKT 条件推广到带有不同类型约束函数的问题上, Rani 等人[14]针对含消失约束的多目标区间规划, 推导了最优性条件与对偶结论。Yadav 和 Gupta [15]在约束规范与凸性假设下, 给出带消失约束的多目标区间半无限优化问题最优解的充要条件, 并构建了该问题的 Wolfe 型、Mond-Weir 型对偶模型。Van Su 与 Hang [16]研究带消失约束的非光滑半无限区间值多目标规划, 借助 Hadamard 导数推导 KKT 型最优充要条件及对偶理论。诸多文献围绕拉格朗日对偶[17]、KKT 条件[18][19]与多目标优化[20][21]展开研究, 但是对于多目标区间值优化问题的近似最优性条件的研究还很少见, 受上述文献启发, 我们讨论区间值多目标优化问题的近似最优性条件。

本文的结构安排如下: 第 2 节回顾本文所需预备知识; 第 3 节定义多目标区间值优化问题的两类近似 KKT 条件, 并证明了多目标区间值优化问题的最优性充分和必要条件; 第 4 节则给出强互补近似 KKT 条件及其充分和必要条件。

2. 预备知识

记 I 为实数集 R 上全体闭区间构成的集族。若 $A \in I$, 记 $A = [a^L, a^U]$, 其中 a^L 、 a^U 分别表示区间 A

的下界与上界。设 $A = [a^L, a^U]$, $B = [b^L, b^U] \in I$, 区间的运算定义如下[11]:

- (1) $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\} = [a^L + b^L, a^U + b^U]$;
- (2) $-A = \{-a \mid a \in A\} = [-a^U, -a^L]$;
- (3) $A - B = A + (-B) = [a^L - b^U, a^U - b^L]$;
- (4) $kA = \{ka \mid a \in A\} = \begin{cases} [ka^L, ka^U] & k \geq 0 \\ [ka^U, ka^L] & k < 0 \end{cases}$.

接下来我们回顾区间的序关系:

定义 2.1. [17] 设 $A = [a^L, a^U]$, $B = [b^L, b^U]$ 都是闭区间, 则 LU -序关系定义为:

- (1) $A \preceq_{LU} B$ 当且仅当 $a^L \leq b^L$ 且 $a^U \leq b^U$;
- (2) $A \prec_{LU} B$ 当且仅当 $A \preceq_{LU} B$ 且 $A \neq B$ 。这意味着下列关系至少一个成立:

$$\begin{cases} a^L < b^L \\ a^U \leq b^U \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a^L \leq b^L \\ a^U < b^U \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a^L < b^L \\ a^U < b^U \end{cases}.$$

定义 2.2. [12] 设区间 $A = [a^L, a^U] \in I$, 记中心为 $a^C = \frac{1}{2}(a^L + a^U)$, 半宽 $a^W = \frac{1}{2}(a^U - a^L)$ 。记 $A = \langle a^C, a^W \rangle$, $B = \langle b^C, b^W \rangle$, 则 CW -序关系定义为:

- (1) $A \preceq_{CW} B \Leftrightarrow a^C \leq b^C$ 且 $a^W \leq b^W$;
- (2) $A \prec_{CW} B \Leftrightarrow A \preceq_{CW} B$ 且 $A \neq B$ 。

定义 2.3. [17] 设 X 为 R^n 中的开集, 区间值函数 $f: R^n \rightarrow I$, 满足 $f(x) = [f^L(x), f^U(x)]$, 若实值函数 f^L 和 f^U 在 x_0 处均可微, 则称 f 在 x_0 处弱可微。

本文我们考虑如下多目标区间值优化问题

$$(MIVP) \begin{cases} \min & F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)) \\ \text{s.t.} & g_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, m \end{cases}$$

其中 $f_i(x) = [f_i^L(x), f_i^U(x)]$, $i = 1, 2, \dots, p$ 均为区间值弱可微函数, 约束函数 $g_j: R^n \rightarrow R$ 在 R^n 上为实值可微函数, $j = 1, \dots, m$, 可行集记 $X = \{x \in R^n \mid g_j(x) \leq 0, \forall j = 1, \dots, m\}$ 。

定义 2.4. [17] 若对任意 $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, 每个分量 $f_i = [f_i^L, f_i^U]$ 均为闭区间, 则 $F = (f_1, f_2, \dots, f_p)$ 为区间值 p 维向量。称 $F = (f_1, f_2, \dots, f_p)$ 与 $S = (s_1, s_2, \dots, s_p)$ 为两个区间值 p 维向量。定义如下偏序关系:

- (i) $F \preceq_{LU} S$ 当且仅当对任意下标 $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, 均有 $f_i \preceq_{LU} s_i$;
- (ii) $F \prec_{LU} S$ 当且仅当对任意下标 $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ 满足 $f_i \preceq_{LU} s_i$, 且至少存在一个下标 i_0 使得 $f_{i_0} \prec_{LU} s_{i_0}$ 。

下面根据多目标区间值优化问题的两种序关系分别给出问题(MIVP)的最优解定义:

定义 2.5. [17] $x^0 \in Z$ 为问题(MIVP)的可行解。

(1) 若存在 $\delta > 0$, 对任意可行点 $x \in X \cap B(x^0, \delta)$, 均不满足 $F(x) \prec_{LU} F(x^0)$, 则称 x^0 为(MIVP)的局部 Type-I Pareto 解。

(2) 若存在 $\delta > 0$, 对任意可行点 $x \in X \cap B(x^0, \delta)$, 均不满足 $F(x) \prec_{CW} F(x^0)$, 则称 x^0 为(MIVP)的局部 Type-II Pareto 解。

定义 2.6. [17] f 是定义在 R^n 上的区间值函数。若对任意 $x \in R^n$ 以及 $\lambda \in (0, 1)$, 满足:

$$f(\lambda x^0 + (1 - \lambda)x) \preceq_{LU} \lambda f(x^0) + (1 - \lambda)f(x),$$

则称 f 在 x^0 处是 LU -凸的。

引理 2.1. [11] $f: R^n \rightarrow I$ 为区间值函数, $A = [a^L, a^U]$ 是区间, 则 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$ 成立当且仅当 $\lim_{x \rightarrow c} f^L(x) = a^L$, $\lim_{x \rightarrow c} f^U(x) = a^U$ 。

引理 2.2. [21] 设 f 是定义在 R^n 上的区间值函数, 则下列命题成立:

- (i) f 在 x^0 处 LU -凸当且仅当 f^L 与 f^U 在 x^0 处是凸的;
- (ii) f 在 x^0 处 CW -凸当且仅当 f^C 与 f^W 在 x^0 处是凸的。

3. 多目标区间值优化问题的近似强 KKT 条件

首先根据 LU -序关系给出多目标区间值优化问题的 LU -近似强 KKT 条件的定义。

定义 3.1. 存在序列 x^k , 乘子序列 $\lambda_i^{k,L} \in R_+^p$ 、 $\lambda_i^{k,U} \in R_+^p$ 以及 $\mu_j^k \in R_+^m$, 满足:

(LU-A0) $x^k \rightarrow x^0$,

(LU-A1) $\sum_{i=1}^p \lambda_i^{k,L} \nabla f_i^L(x^k) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^{k,U} \nabla f_i^U(x^k) + \sum_{j=1}^m \mu_j^k \nabla g_j(x^k) \rightarrow 0$,

(LU-A2) $\lambda_i^{k,L} \geq 1, \lambda_i^{k,U} \geq 1, i=1, \dots, p$,

(LU-A3) $g_j(x^0) < 0 \Rightarrow$ 对充分大的 k , $u_j^k = 0, j=1, \dots, m$ 。

则称多目标区间值优化问题(MIVP)在可行点 $x^0 \in X$ 处满足 LU 序关系下的区间近似强 KKT 条件(LU-ASKKT 条件)。

注 1. 区间值优化问题(MIVP)中的目标函数的每个分量都满足 $f_i^L(x) = f_i^U(x)$, 则定义 3.1 退化为[3]中的实值函数的 ASKKT 条件。

由定义 3.1, 类似的可以定义在 CW -序关系下的 CW -ASKKT 条件如下:

定义 3.2. 存在序列 x^k , 乘子序列 $\lambda_i^{k,C} \in R_+^p$ 、 $\lambda_i^{k,W} \in R_+^p$ 以及, 满足:

(CW-A0) $x^k \rightarrow x^0$,

(CW-A1) $\sum_{i=1}^p \lambda_i^{k,C} \nabla f_i^C(x^k) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^{k,W} \nabla f_i^W(x^k) + \sum_{j=1}^m \mu_j^k \nabla g_j(x^k) \rightarrow 0$,

(CW-A2) $\lambda_i^{k,C} \geq 1, \lambda_i^{k,W} \geq 1, i=1, \dots, p$,

(CW-A3) $g_j(x^0) < 0 \Rightarrow$ 对充分大的, $\mu_j^k = 0, j=1, \dots, m$ 。

则称区间值多目标优化问题(MIVP)在可行点处满足 CW 序关系下的区间近似强 KKT 条件(CW -ASKKT 条件)。

定理 3.1. (必要条件) 若 x^0 为区间值多目标规划问题(MIVP)的局部 Type-I Pareto 解, 则 x^0 满足 LU -ASKKT 条件。

证明. 设 x^0 是(MIVP)的局部 Type-I Pareto 解, 首先证明 x^0 是以下标量化问题的局部极小点。

$$\begin{aligned} & \min \sum_{i=1}^p (f_i^L(x) + f_i^U(x)), \\ & \text{s.t. } x \in X, f_i^L(x) \leq f_i^L(x^0), f_i^U(x) \leq f_i^U(x^0), i=1, \dots, p. \end{aligned} \quad (1)$$

假设 x^0 不是(1)的局部极小点, 即对于任意 $\varepsilon \in (0, \delta)$, 在 $\bar{x} \in X \cap B(x^0, \varepsilon)$ 满足:

$f_i^L(\bar{x}) \leq f_i^L(x^0), f_i^U(\bar{x}) \leq f_i^U(x^0)$ 且:

$$\sum_{i=1}^p (f_{i_0}^L(\bar{x}) + f_{i_0}^U(\bar{x})) < \sum_{i=1}^p (f_{i_0}^L(x^0) + f_{i_0}^U(x^0))$$

这就意味着至少存在一个下标 i_0 , 得:

$$f_{i_0}^L(\bar{x}) + f_{i_0}^U(\bar{x}) < f_{i_0}^L(x^0) + f_{i_0}^U(x^0).$$

结合约束 $f_i^L(\bar{x}) \leq f_i^L(x^0)$, $f_i^U(\bar{x}) \leq f_i^U(x^0)$ 对全部 i 成立, 则以下

$$\begin{cases} f_{i_0}^L(\bar{x}) < f_{i_0}^L(x^0) \\ f_{i_0}^U(\bar{x}) = f_{i_0}^U(x^0) \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} f_{i_0}^L(\bar{x}) = f_{i_0}^L(x^0) \\ f_{i_0}^U(\bar{x}) < f_{i_0}^U(x^0) \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} f_{i_0}^L(\bar{x}) < f_{i_0}^L(x^0) \\ f_{i_0}^U(\bar{x}) < f_{i_0}^U(x^0) \end{cases}$$

必有其中一种情况成立。即 $F(\bar{x}) \prec_{LU} F(x^0)$, 且 $\bar{x} \in X \cap B(x^0, \delta)$ 。这与 x^0 是局部 Type-I Pareto 解的定义矛盾。

进一步, 为了能够使用外罚函数来构造 ASKKT 条件所需要的点序列与乘子序列, 我们将优化问题 (1) 转化为一个带约束的标量极小化子问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^p (f_i^L(x) + f_i^U(x)) + \frac{1}{2} \|x - x^0\|^2, \\ \text{s.t.} \quad & f_i^L(x) \leq f_i^L(x^0), f_i^U(x) \leq f_i^U(x^0), \|x - x^0\| \leq \delta, x \in X \end{aligned}$$

由 x^0 为问题 (1) 的局部 Type-I Pareto 解, 对于 $\frac{1}{2} \|x - x^0\|^2$ 仅在 $x = x^0$ 时取 0, 故 x^0 为此问题唯一全局极小点。

设数列 $\{\rho_k\}$ 满足 $\rho_k > 0$ 且 $\rho_k \rightarrow +\infty (k \rightarrow \infty)$, 定义外罚函数:

$$\begin{aligned} \Psi_k(x) = & \sum_{i=1}^p (f_i^L(x) + f_i^U(x)) + \frac{1}{2} \|x - x^0\|^2 \\ & + \frac{\rho_k}{2} \left[\sum_{i=1}^p \left((f_i^L(x) - f_i^L(x^0))_+^2 + (f_i^U(x) - f_i^U(x^0))_+^2 \right) + \sum_{j=1}^m g_j^2(x)_+ \right] \end{aligned}$$

其中 $f(x)_+ = \max\{0, f(x)\}$ 。对于以下优化问题:

$$\min_{\|x - x^0\| \leq \delta} \Psi_k(x),$$

由于约束 $\|x - x^0\| \leq \delta$ 确定的闭球是 R^n 中的有界闭集, 罚函数 $\Psi_k(x)$ 是由可微函数组合构成的, 所以 $\Psi_k(x)$ 连续, 根据极值定理, 连续函数定义在紧集上必存在极小点, 因此一定存在最优解, 记为 x^k 。又由于闭球 $B(x^0, \delta)$ 紧, Ψ_k 连续, 结合外罚收敛理论, 当罚参数 $\rho_k \rightarrow +\infty$ 时, 不符合约束 $\|x - x^0\| \leq \delta$ 的点会使罚项趋于正无穷, 因而无法成为罚函数的极小点, 即: 当 $k \rightarrow +\infty$ 时, $x^k \rightarrow x^0$, 即满足了 ASKKT 条件的(A1)条件。当 k 充分大时, x^k 满足约束 $\|x - x^0\| \leq \delta$, 所以 $\nabla \Psi_k(x^k) = 0$, 即:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^p \nabla f_i^L(x^k) + \sum_{i=1}^p \nabla f_i^U(x^k) + (x^k - x^0) + \rho_k \sum_{i=1}^p (f_i^L(x^k) - f_i^L(x^0))_+ \nabla f_i^L(x^k) \\ & + \rho_k \sum_{i=1}^p (f_i^U(x^k) - f_i^U(x^0))_+ \nabla f_i^U(x^k) + \rho_k \sum_{j=1}^m g_j(x^k)_+ \nabla g_j(x^k) = 0, \end{aligned}$$

构造乘子序列:

$$\lambda_i^{k,L} = 1 + \rho_k (f_i^L(x^k) - f_i^L(x^0))_+, \quad \lambda_i^{k,U} = 1 + \rho_k (f_i^U(x^k) - f_i^U(x^0))_+, \quad \mu_j^k = \rho_k g_j(x^k)_+.$$

有:

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i^{k,L} \nabla f_i^L(x^k) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^{k,U} \nabla f_i^U(x^k) + (x^k - x^0) + \sum_{j=1}^m \mu_j^k \nabla g_j(x^k) = 0,$$

显然, $\lambda_i^{k,L} \geq 1, \lambda_i^{k,U} \geq 1$, 满足(LU-A2)。结合 $x^k \rightarrow x^0 (k \rightarrow +\infty)$, 可得:

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i^{k,L} \nabla f_i^L(x^k) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^{k,U} \nabla f_i^U(x^k) + \sum_{j=1}^m \mu_j^k \nabla g_j(x^k) \rightarrow 0 (k \rightarrow +\infty),$$

即(LU-A1)成立。

若 $g_j(x^0) < 0$, 由 g_j 连续性, 存在充分大的 K , 当 $k > K$ 时, $g_j(x^k) < 0$, 故 $g_j(x^k)_+ = 0$, $\mu_j^k = 0$, 条件(LU-A3)成立。综上, 满足区间值优化问题的 LU-ASKKT 条件, 定理得证。

下面给出一个算例, 说明在不满足约束规范时传统 KKT 失效, 但本文的 LU-ASKKT 条件仍然成立。

例 1. 考虑二维多目标区间值优化问题:

$$\begin{aligned} \min F(x) &= (F_1(x), F_2(x)), \\ \text{s.t. } g_1(x) &= x_1^2 \leq 0, \quad g_2(x) = x_2 \leq 0. \end{aligned}$$

其中 $F_1(x) = [x_1^2 - x_2, x_1^2 - x_2 + 1]$, $F_2(x) = [2x_1^2 - x_2, 2x_1^2 - x_2 + 1]$, 取解 $\bar{x} = (0, 0)$ 。容易验证, $\bar{x}$ 是该问题的局部 Type-I Pareto 解。在 $\bar{x}$ 处:

$$\nabla f_1^L(\bar{x}) = (0, -1)^T, \quad \nabla f_1^U(\bar{x}) = (0, -1)^T, \quad \nabla f_2^L(\bar{x}) = (0, -1)^T, \quad \nabla f_2^U(\bar{x}) = (0, -1)^T.$$

同时, 约束函数的梯度为 $\nabla g_1(\bar{x}) = (0, 0)^T$, $\nabla g_2(\bar{x}) = (0, 1)^T$ 。由于 $\nabla g_1(\bar{x}) = (0, 0)^T$, 不满足 MFCQ 约束规范, 因此经典 KKT 条件无法直接应用。下面验证本文提出的 LU-ASKKT 条件。取序列 $x^k = \left(\frac{1}{k}, 0\right)$, 则 $x^k \rightarrow \bar{x}$ 。在 x^k 处, 有:

$$\nabla f_1^L(x^k) = \left(\frac{2}{k}, -1\right)^T, \quad \nabla f_1^U(x^k) = \left(\frac{2}{k}, -1\right)^T, \quad \nabla f_2^L(x^k) = \left(\frac{4}{k}, -1\right)^T, \quad \nabla f_2^U(x^k) = \left(\frac{4}{k}, -1\right)^T.$$

并且 $\nabla g_1(x^k) = \left(\frac{2}{k}, 0\right)^T$, $\nabla g_2(x^k) = (0, 1)^T$ 。令 $\lambda_1^{L,k} = \lambda_1^{U,k} = \lambda_2^{L,k} = \lambda_2^{U,k} = \frac{1}{2}$, 以及 $\mu_1^k = 0$, $\mu_2^k = 2$ 。则:

$$\begin{aligned} & \lambda_1^{L,k} \nabla f_1^L(x^k) + \lambda_1^{U,k} \nabla f_1^U(x^k) + \lambda_2^{L,k} \nabla f_2^L(x^k) + \lambda_2^{U,k} \nabla f_2^U(x^k) + \mu_1^k \nabla g_1(x^k) + \mu_2^k \nabla g_2(x^k) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{k}, -1\right)^T + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{k}, -1\right)^T + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{k}, -1\right)^T + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{k}, -1\right)^T + 2(0, 1)^T = \left(\frac{6}{k}, 0\right)^T. \end{aligned}$$

进一步可知, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{6}{k}, 0\right)^T = (0, 0)^T$ 。同时, $\lambda_i^{L,k} \geq 0$, $\lambda_i^{U,k} \geq 0$, $\mu_j^k \geq 0$ 。故满足 LU-ASKKT 条件, 即 $\bar{x} = (0, 0)$ 满足本文提出的近似强 KKT 条件。

定理 3.2. 若 x^0 为区间值多目标规划问题(MIVP)的局部 Type-II Pareto 解, 则 x^0 满足 CW-ASKKT 条件。

证明. 根据定义 2.2, CW-序通过区间的中心和半宽的比较, 它与 LU-序在最优解定义和可微结构上具有形式同构性。因此证明思路与定理 3.1 一致: 将定理 3.1 中基于 LU-序的区间上界、下界函数 $F_i^L(x)$, $F_i^U(x)$ 分别替换为 CW-序对应的区间中心函数 $F_i^C(x)$ 与半宽函数 $F_i^W(x)$; 同时将 Type-I Pareto 解换为 Type-II Pareto 解, LU-ASKKT 条件换为 CW-ASKKT 条件, 外罚函数构造、乘子定义以及极限推导步骤完全沿用定理 3.1。

接下来, 我们给出凸性假设下, 故 ASKKT 点就是(MIVP)的 Type-I Pareto 解。

定理 3.3. (充分条件) 设: $f_i (i \in I)$ 为 LU-凸函数, $g_j (j \in J)$ 为凸函数, 问题(MIVP)在 $x^0 \in \Omega$ 处满足 LU-ASKKT 条件, 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} [\lambda_i^{k,L}, \lambda_i^{k,U}] = [\lambda_i^{0,L}, \lambda_i^{0,U}]$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_j^k = \mu_j^0$, 则 x^0 是(MIVP)的 Type-I Pareto 解。

证明. 采用反证法, 假设 x^0 不是 Type-I Pareto 解, 则存在可行点 $\bar{x} \in X$, 使得 $F(\bar{x}) \prec_{LU} F(x^0)$, 即:

$$f_i^L(\bar{x}) \leq f_i^L(x^0), f_i^U(\bar{x}) \leq f_i^U(x^0), \forall i=1, \dots, p,$$

且至少存在下标 i_0 , 满足 $f_{i_0}^L(\bar{x}) < f_{i_0}^L(x^0)$ 或 $f_{i_0}^U(\bar{x}) < f_{i_0}^U(x^0)$ 。由 f_i 是 LU -凸函数、 g_j 是凸函数:

$$f_i^L(\bar{x}) - f_i^L(x^k) \geq \nabla f_i^L(x^k)^\top (\bar{x} - x^k), \quad (2)$$

$$f_i^U(\bar{x}) - f_i^U(x^k) \geq \nabla f_i^U(x^k)^\top (\bar{x} - x^k), \quad (3)$$

$$g_j(\bar{x}) - g_j(x^k) \geq \nabla g_j(x^k)^\top (\bar{x} - x^k). \quad (4)$$

对(2)-(4)式子两边分别乘 $\lambda_i^{k,L} \geq 1, \lambda_i^{k,U} \geq 1, \mu_j^k \geq 0$, 并求和:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^p \lambda_i^{k,L} (f_i^L(\bar{x}) - f_i^L(x^k)) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^{k,U} (f_i^U(\bar{x}) - f_i^U(x^k)) + \sum_{j=1}^m \mu_j^k (g_j(\bar{x}) - g_j(x^k)) \\ & \geq \left[\sum_{i=1}^p \lambda_i^{k,L} \nabla f_i^L(x^k) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^{k,U} \nabla f_i^U(x^k) + \sum_{j=1}^m \mu_j^k \nabla g_j(x^k) \right]^\top (\bar{x} - x^k), \end{aligned}$$

整理移项得:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^p \lambda_i^{k,L} f_i^L(\bar{x}) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^{k,U} f_i^U(\bar{x}) + \sum_{j=1}^m \mu_j^k g_j(\bar{x}) \\ & \geq \sum_{i=1}^p \lambda_i^{k,L} f_i^L(x^k) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^{k,U} f_i^U(x^k) + \sum_{j=1}^m \mu_j^k g_j(x^k) \\ & \quad + \left[\sum_{i=1}^p \lambda_i^{k,L} \nabla f_i^L(x^k) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^{k,U} \nabla f_i^U(x^k) + \sum_{j=1}^m \mu_j^k \nabla g_j(x^k) \right]^\top (\bar{x} - x^k), \end{aligned}$$

因 $\bar{x} \in X$, 故 $g_j(\bar{x}) \leq 0$, 结合 $\mu_j^k \geq 0$ 有 $\sum_{j=1}^m \mu_j^k g_j(\bar{x}) \leq 0$, 故:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^p \lambda_i^{k,L} f_i^L(\bar{x}) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^{k,U} f_i^U(\bar{x}) \geq \sum_{i=1}^p \lambda_i^{k,L} f_i^L(x^k) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^{k,U} f_i^U(x^k) + \sum_{j=1}^m \mu_j^k g_j(x^k) \\ & \quad + \left[\sum_{i=1}^p \lambda_i^{k,L} \nabla f_i^L(x^k) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^{k,U} \nabla f_i^U(x^k) + \sum_{j=1}^m \mu_j^k \nabla g_j(x^k) \right]^\top (\bar{x} - x^k), \end{aligned} \quad (5)$$

令 $k \rightarrow \infty$, 考虑 $\sum_{j=1}^m \mu_j^k g_j(x^k)$, 若 $g_j(x^0) < 0$, 由 $(LU-A3)$, k 充分大时 $\mu_j^k = 0$, 该项恒为 0; 若 $g_j(x^0) = 0$,

则 $g_j(x^k) \rightarrow 0$, 结合 $\mu_j^k \rightarrow \mu_j^0$, 得 $\mu_j^k g_j(x^k) \rightarrow 0$ 。综上 $\sum_{j=1}^m \mu_j^k g_j(x^k) \rightarrow 0$, 由 $x^k \rightarrow x^0$ 与条件 $(LU-A1)$ 梯度项趋于 0, 对(5)式两边令 $k \rightarrow \infty$:

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i^{0,L} (f_i^L(\bar{x}) - f_i^L(x^0)) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^{0,U} (f_i^U(\bar{x}) - f_i^U(x^0)) \geq 0, \quad (6)$$

但根据反证假设: $f_i^L(\bar{x}) - f_i^L(x^0) \leq 0, f_i^U(\bar{x}) - f_i^U(x^0) \leq 0$, 且至少一项严格小于 0, 又 $\lambda_i^{k,L} \geq 1, \lambda_i^{k,U} \geq 1$, 因此(6)式左侧求和严格小于 0, 与(5)式矛盾。故原假设不成立, x^0 是(MIVP)全局 Type-I Pareto 解。

定理 3.4. 设: $f_i (i \in I)$ 为 LU -凸函数, $g_j (j \in J)$ 为凸函数, 问题(MIVP)在 $x^0 \in \Omega$ 处满足 CW -ASKKT 条件, 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} [\lambda_i^{k,C}, \lambda_i^{k,W}] = [\lambda_i^{0,C}, \lambda_i^{0,W}]$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_j^k = \mu_j^0$, 则 x^0 是(MIVP)的 Type-II Pareto 解。

证明. 证明逻辑与定理 3.3 类似。

4. 多目标区间值优化问题的强互补近似 KKT 条件

本节, 我们将[4]中的实值目标函数的强互补近似 KKT 条件推广到区间值优化问题上, 并给出其充分以及必要条件。

定义 4.1. 设 $x^0 \in X$ 为(MIVP)可行点, 若存在序列 x^k 、区间乘子 $\lambda_i^{k,L}, \lambda_i^{k,U}$ 、约束乘子 $\mu_j^k \in R_+^m$, 满足:

$$(LU-C0) \quad x^k \rightarrow x^0 (k \rightarrow \infty),$$

$$(LU-C1) \quad \sum_{i=1}^p \lambda_i^{k,L} \nabla f_i^L(x^k) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^{k,U} \nabla f_i^U(x^k) + \sum_{j=1}^m \mu_j^k \nabla g_j(x^k) \rightarrow 0,$$

$$(LU-C2) \quad \lambda_i^{k,L} > 0, \lambda_i^{k,U} > 0, \forall i, k,$$

$$(LU-C3) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_i^{k,L} (f_i^L(x^k) - f_i^L(x^0)) = 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_i^{k,U} (f_i^U(x^k) - f_i^U(x^0)) = 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_j^k g_j(x^k) = 0, \forall i, j.$$

则称多目标区间值优化问题(MIVP)在可行点 $x^0 \in X$ 处满足 LU 序关系下的区间强互补近似 KKT 条件(LU-SCAKKT 条件)。

注 2. 若区间值优化问题(MIVP)中的目标函数的每个分量都满足 $f_i^L(x) = f_i^U(x)$, 则定义 4.1 退化为[4]中的实值函数的 SCAKKT 条件。

类似定义 3.2, 我们也可以得到在 CW-序关系下的 SCAKKT 条件。

定义 4.2. 设 $x^0 \in X$ 为(MIVP)可行点, 若存在序列 $\{x^k\} \subset R^n$ 、乘子 $\{\lambda_i^{k,C}\}, \{\lambda_i^{k,W}\}$ 、约束乘子 $\{\mu_j^k\} \subset R_+$, 满足:

$$(CW-C0) \quad x^k \rightarrow x^0 (k \rightarrow \infty),$$

$$(CW-C1) \quad \sum_{i=1}^p \lambda_i^{k,C} \nabla f_i^C(x^k) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^{k,W} \nabla f_i^W(x^k) + \sum_{j=1}^m \mu_j^k \nabla g_j(x^k) \rightarrow 0,$$

$$(CW-C2) \quad \lambda_i^{k,C} > 0, \lambda_i^{k,W} > 0, \forall i, k,$$

$$(CW-C3) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_i^{k,C} (f_i^C(x^k) - f_i^C(x^0)) = 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_i^{k,W} (f_i^W(x^k) - f_i^W(x^0)) = 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_j^k g_j(x^k) = 0, \forall i, j.$$

则称多目标区间值优化问题(MIVP)在可行点 $x^0 \in X$ 处满足 CW-序关系下的区间强互补近似 KKT 条件(CW-SCAKKT 条件)。

注 3. 与 ASKKT 条件相比, SCAKKT 条件在梯度渐近平衡的基础上进一步加入了互补条件, 对目标函数乘子和约束乘子与相应函数值之间的关系进行了限制。因此, SCAKKT 条件包含了更多的最优性信息, 能够提供更强的最优性刻画。文献[4]中已有例子表明, ASKKT 条件可推出 SCAKKT 条件, 但反之一般不成立。

定理 4.1. (必要条件) 若 x^0 是(MIVP)的局部 Type-I Pareto 解, 则 x^0 满足-SCAKKT 条件。

证明. 设 x^0 为局部 Type-I Pareto 有效解, 则存在 $\delta > 0$, 不存在 $\bar{x} \in X \cap B(x^0, \delta)$ 满足 $F(\bar{x}) \prec_{LU} F(x^0)$, 构造标量化约束优化子问题:

$$\begin{aligned} & \min \sum_{i=1}^p (f_i^L(x) + f_i^U(x)) \\ & \text{s.t. } f_i^L(x) \leq f_i^L(x^0), f_i^U(x) \leq f_i^U(x^0), g_j(x) \leq 0, x - x^0 \leq \delta, \forall i, j. \end{aligned}$$

由定理 3.1 可知 x^0 是该问题的唯一极小点, 取 $w_i > 0$, 引入正则项构造优化问题:

$$\begin{aligned} \min \sum_{i=1}^p w_i (f_i^L(x) + f_i^U(x)) + \frac{1}{2} \|x - x^0\|^2, \\ \text{s.t. } f_i^L(x) \leq f_i^L(x^0), f_i^U(x) \leq f_i^U(x^0), g_j(x) \leq 0, x - x^0 \leq \delta, \forall i, j. \end{aligned}$$

x^0 仍是上述问题的唯一极小点。取罚参数序列 $\{\rho_k\}$ 满足 $\rho_k \rightarrow +\infty (k \rightarrow \infty)$, 定义外罚函数:

$$\begin{aligned} \Psi_k(x) = \sum_{i=1}^p w_i (f_i^L(x) + f_i^U(x)) + \frac{1}{2} \|x - x^0\|^2 + \frac{\rho_k}{2} \left\{ \sum_{i=1}^p (f_i^L(x) - f_i^L(x^0))_+^2 \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^p (f_i^U(x) - f_i^U(x^0))_+^2 + \sum_{j=1}^m (g_j(x))_+^2 \right\}, \end{aligned}$$

其中 $(f(x))_+ = \max\{0, f(x)\}$, 考虑如下优化问题:

$$\min_{\|x - x^0\| \leq \delta} \Psi_k(x)$$

由于闭球 $\bar{B}(x^0, \delta)$ 紧集且 Ψ_k 连续, 最优解必然存在, 记其全局最优解为 x^k 。因 x^0 是可行点, 代入罚函数得 $\Psi_k(x^0) = \sum_{i=1}^p w_i (f_i^L(x^0) + f_i^U(x^0))$, 结合 x^k 为极小点有 $\Psi_k(x^k) \leq \Psi_k(x^0)$, 展开不等式:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p w_i (f_i^L(x^k) + f_i^U(x^k)) + \frac{1}{2} \|x^k - x^0\|^2 + \frac{\rho_k}{2} \left\{ \sum_{i=1}^p (f_i^L(x^k) - f_i^L(x^0))_+^2 \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^p (f_i^U(x^k) - f_i^U(x^0))_+^2 + \sum_{j=1}^m (g_j(x^k))_+^2 \right\} \leq \sum_{i=1}^p w_i (f_i^L(x^0) + f_i^U(x^0)), \end{aligned}$$

假设存在子列 $x^{k_t} \rightarrow z \neq x^0$, 则括号内罚项和严格大于 0, $\rho_{k_t} \rightarrow +\infty$ 左侧趋于正无穷, 与上界矛盾, 故必有 $x^k \rightarrow x^0$ 。当 k 分大时 x^k 为闭球内点, 满足 $\nabla \Psi_k(x^k) = 0$ 。对罚函数求梯度得:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p w_i \nabla f_i^L(x^k) + \sum_{i=1}^p w_i \nabla f_i^U(x^k) + (x^k - x^0) + \rho_k \sum_{i=1}^p (f_i^L(x^k) - f_i^L(x^0))_+ \nabla f_i^L(x^k) \\ + \rho_k \sum_{i=1}^p (f_i^U(x^k) - f_i^U(x^0))_+ \nabla f_i^U(x^k) + \rho_k \sum_{j=1}^m (g_j(x^k))_+ \nabla g_j(x^k) = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

定义乘子序列:

$$\begin{aligned} \lambda_i^{k,L} &= w_i + \rho_k (f_i^L(x^k) - f_i^L(x^0))_+ > 0, \\ \lambda_i^{k,U} &= w_i + \rho_k (f_i^U(x^k) - f_i^U(x^0))_+ > 0, \\ \mu_j^k &= \rho_k (g_j(x^k))_+ \geq 0. \end{aligned}$$

将乘子代入式(7)得:

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i^{k,L} \nabla f_i^L(x^k) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^{k,U} \nabla f_i^U(x^k) + \sum_{j=1}^m \mu_j^k \nabla g_j(x^k) = x^0 - x^k,$$

对上式两边令 $k \rightarrow \infty$, 由 $x^k \rightarrow x^0$ 可知右侧极限为 0, 于是:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^p \lambda_i^{k,L} \nabla f_i^L(x^k) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^{k,U} \nabla f_i^U(x^k) + \sum_{j=1}^m \mu_j^k \nabla g_j(x^k) \right] = 0,$$

(LU-C1)成立。再由 $\Psi_k(x^k) \leq \Psi_k(x^0)$ 移项可得:

$$\frac{1}{2}\|x^k - x^0\|^2 + \frac{\rho_k}{2} \left\{ \sum_{i=1}^p \left(f_i^L(x^k) - f_i^L(x^0) \right)_+^2 + \sum_{i=1}^p \left(f_i^U(x^k) - f_i^U(x^0) \right)_+^2 + \sum_{j=1}^m \left(g_j(x^k) \right)_+^2 \right\} \leq 0,$$

令 $k \rightarrow \infty$, 因此

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k \left\{ \sum_{i=1}^p \left(f_i^L(x^k) - f_i^L(x^0) \right)_+^2 + \sum_{i=1}^p \left(f_i^U(x^k) - f_i^U(x^0) \right)_+^2 + \sum_{j=1}^m \left(g_j(x^k) \right)_+^2 \right\} = 0,$$

结合乘子定义, $\lambda_i^{k,L} - w_i = \rho_k \left(f_i^L(x^k) - f_i^L(x^0) \right)_+$, $\lambda_i^{k,U} - w_i = \rho_k \left(f_i^U(x^k) - f_i^U(x^0) \right)_+$, $\mu_j^k = \rho_k \left(g_j(x^k) \right)_+$, 可推导出:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_i^{k,L} \left(f_i^L(x^k) - f_i^L(x^0) \right) = 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_i^{k,U} \left(f_i^U(x^k) - f_i^U(x^0) \right) = 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_j^k g_j(x^k) = 0, \forall i, j.$$

LU-C3 成立。综上, 局部 Type-I Pareto 有效解 x^0 满足全部 LU-SCAKKT 条件, 定理 4.1 得证。

定理 4.2. 若 x^0 是(MIVP)的局部 Type-II Pareto 解, 则 x^0 满足 CW-SCAKKT 条件。

证明. 证明逻辑类似定理 4.1。

定理 4.3. (充分条件) 设目标函数 $F_i(x) = [f_i^L(x), f_i^U(x)]$ 均为 LU-凸函数, 约束 $g_j(x)$ 为凸函数, $x^0 \in X$ 满足 LU-SCAKKT 条件, 区间乘子序列收敛: $\lim_{k \rightarrow \infty} [\lambda_i^{k,L}, \lambda_i^{k,U}] = [\lambda_i^{0,L}, \lambda_i^{0,U}]$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_j^k = \mu_j^{0,L}$, 则 x^0 是(MIVP)的 Type-I Pareto 有效解。

证明. 证明逻辑类似定理 3.3。

定理 4.4. 设目标函数 $F_i(x) = [f_i^C(x), f_i^W(x)]$ 均为 CW-凸函数, 约束 $g_j(x)$ 为凸函数, 区间乘子序列收敛: $\lim_{k \rightarrow \infty} [\lambda_i^{k,C}, \lambda_i^{k,W}] = [\lambda_i^{0,C}, \lambda_i^{0,W}]$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_j^k = \mu_j^0$, 满足 CW-SCAKKT 条件, 则 x^0 是(MIVP)的 Type-II Pareto 有效解。

证明. 证明逻辑类似定理 3.3。

5. 总结

本文研究了带不等式约束的多目标区间值优化问题的近似最优性条件。针对 LU-序与 CW-序两类常用区间偏序关系, 分别引入区间值框架下的近似强 KKT 条件与强互补近似 KKT 条件。在不施加任何约束规范的前提下, 利用外罚函数证明了上述近似 KKT 条件的必要性; 在区间凸性假设下, 进一步建立了对应的充分性结果。未来可结合本文建立的近似最优性条件, 进一步研究相应的数值算法, 或者带有平衡约束和消失约束的多目标区间值优化问题。

参考文献

- [1] Haeser, G. and Schuverdt, M.L. (2011) On Approximate KKT Condition and Its Extension to Continuous Variational Inequalities. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **149**, 528-539. <https://doi.org/10.1007/s10957-011-9802-x>
- [2] Giorgi, G., Jiménez, B. and Novo, V. (2016) Approximate Karush-Kuhn-Tucker Condition in Multiobjective Optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **171**, 70-89. <https://doi.org/10.1007/s10957-016-0986-y>
- [3] Feng, M. and Li, S. (2018) An Approximate Strong KKT Condition for Multiobjective Optimization. *TOP*, **26**, 489-509. <https://doi.org/10.1007/s11750-018-0491-6>
- [4] Maurya, J. and Mishra, S. (2022) Strong Complementary Approximate Karush-Kuhn-Tucker Conditions for Multiobjective Optimization Problems. *Yugoslav Journal of Operations Research*, **32**, 219-234. <https://doi.org/10.2298/yjor210315024m>
- [5] Deng, X., Yang, Y. and Tang, L. (2025) Approximate Karush-Kuhn-Tucker Conditions for Multiobjective Fractional Programming Problems. *Journal of Industrial and Management Optimization*, **21**, 2689-2708. <https://doi.org/10.3934/jimo.2024189>

- [6] Lv, J., Peng, Z. and Wan, Z. (2024) Approximate Karush-Kuhn-Tucker Condition for Multi-Objective Optimistic Bilevel Programming Problems. *Journal of Industrial and Management Optimization*, **20**, 270-299. <https://doi.org/10.3934/jimo.2023077>
- [7] Andreani, R., Gómez, W., Haeser, G., Mito, L.M. and Ramos, A. (2022) On Optimality Conditions for Nonlinear Conic Programming. *Mathematics of Operations Research*, **47**, 2160-2185. <https://doi.org/10.1287/moor.2021.1203>
- [8] Xu, M., Ye, J.J. and Zhang, L. (2015) Smoothing Augmented Lagrangian Method for Nonsmooth Constrained Optimization Problems. *Journal of Global Optimization*, **62**, 675-694. <https://doi.org/10.1007/s10898-014-0242-7>
- [9] Le, T.T. (2022) Karush-Kuhn-Tucker Optimality Conditions and Duality for Nonsmooth Multiobjective Semi-Infinite Programming Problems with Vanishing Constraints. *Applied Set-Valued Analysis and Optimization*, **4**, 659-684.
- [10] Lai, K.K., Maurya, J.K. and Mishra, S.K. (2022) Multiobjective Approximate Gradient Projection Method for Constrained Vector Optimization: Sequential Optimality Conditions without Constraint Qualifications. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **410**, Article 114122. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2022.114122>
- [11] Alefeld, G. and Mayer, G. (2000) Interval Analysis: Theory and Applications. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **121**, 421-464. [https://doi.org/10.1016/s0377-0427\(00\)00342-3](https://doi.org/10.1016/s0377-0427(00)00342-3)
- [12] Ishibuchi, H. and Tanaka, H. (1990) Multiobjective Programming in Optimization of the Interval Objective Function. *European Journal of Operational Research*, **48**, 219-225. [https://doi.org/10.1016/0377-2217\(90\)90375-1](https://doi.org/10.1016/0377-2217(90)90375-1)
- [13] Wu, H. (2007) The Karush-Kuhn-Tucker Optimality Conditions in an Optimization Problem with Interval-Valued Objective Function. *European Journal of Operational Research*, **176**, 46-59. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2005.09.007>
- [14] Rani, B.J., Ahmad, I. and Kummari, K. (2023) On Optimality and Duality for Multiobjective Interval-Valued Programming Problems with Vanishing Constraints. *Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization*, **13**, 354-384.
- [15] Yadav, T. and Gupta, S.K. (2024) Optimality and Duality Analysis for Multiobjective Interval-Valued Semi-Infinite Optimization Problem Having Vanishing Constraints. *Computational and Applied Mathematics*, **43**, 56-57. <https://doi.org/10.1007/s40314-023-02569-3>
- [16] Van Su, T. and Hang, D.D. (2022) Optimality Conditions and Duality Theorems for Nonsmooth Semi-Infinite Interval-Valued Mathematical Programs with Vanishing Constraints. *Computational and Applied Mathematics*, **41**, 422-423. <https://doi.org/10.1007/s40314-022-02139-z>
- [17] Wu, H. (2009) The Karush-Kuhn-Tucker Optimality Conditions in Multiobjective Programming Problems with Interval-Valued Objective Functions. *European Journal of Operational Research*, **196**, 49-60. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2008.03.012>
- [18] Wu, H. (2009) The Karush-Kuhn-Tucker Optimality Conditions for Multi-Objective Programming Problems with Fuzzy-Valued Objective Functions. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, **8**, 1-28. <https://doi.org/10.1007/s10700-009-9049-2>
- [19] Osuna-Gómez, R., Hernández-Jiménez, B., Chalco-Cano, Y. and Ruiz-Garzón, G. (2017) New Efficiency Conditions for Multiobjective Interval-Valued Programming Problems. *Information Sciences*, **420**, 235-248. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2017.08.022>
- [20] Ahmad, I., Singh, D. and Dar, B.A. (2015) Optimality Conditions in Multiobjective Programming Problems with Interval Valued Objective Functions. *Control and Cybernetics*, **44**, 19-45.
- [21] Singh, D., Dar, B.A. and Kim, D.S. (2016) KKT Optimality Conditions in Interval Valued Multiobjective Programming with Generalized Differentiable Functions. *European Journal of Operational Research*, **254**, 29-39. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2016.03.042>