

带联合机会约束的集合分割整数规划及其分支定价算法

李壮志

北京邮电大学数学科学学院, 北京

收稿日期: 2026年9月22日; 录用日期: 2026年10月15日; 发布日期: 2026年10月23日

摘要

本文研究一类带路径联合机会约束的集合分割整数规划问题, 各节点服务时间相互独立且服从有限离散分布。以路径变量为决策对象, 在多资源约束下要求每条路径各节点时间窗同时满足的概率不低于给定阈值。针对可行路径数量庞大和概率可行性判定复杂的特点, 设计分支定价算法: 以列生成求解线性松弛, 以资源约束初等最短路为定价子问题; 通过离散卷积与时间窗投影递推未归一化概率质量, 结合概率标签支配与带起点索引的弧分支, 明确完整定价认证线性松弛下界的条件。数值实验表明, 该方法可为30~100个服务节点的确定性算例构造经完整定价认证的线性松弛下界; 消融实验中, 改进策略使平均计算时间减少12.9%, 根下界认证率由94.4%提高至100%。20和30个服务节点的随机算例进一步揭示可靠性阈值对可行路径集合与目标值的影响。该方法为此类整数规划提供可行解与线性松弛下界。

关键词

联合机会约束, 集合分割整数规划, 分支定价, 列生成, 资源约束初等最短路

Branch-and-Price for Set-Partitioning Integer Programming with Joint Chance Constraints

Zhuangzhi Li

School of Mathematical Sciences, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing

Received: September 22, 2026; accepted: October 15, 2026; published: October 23, 2026

Abstract

This paper studies a class of set-partitioning integer programming problems with route-level joint

chance constraints. Service times at different nodes are mutually independent and follow finitely supported discrete distributions. Path-selection decisions are represented by variables, and multiple resource constraints are incorporated into the model. For each selected path, the joint chance constraint requires the probability of simultaneously satisfying the time windows of all service nodes to be no lower than a prescribed threshold. To address the large number of feasible paths and the complexity of evaluating probabilistic feasibility, a branch-and-price algorithm is developed. Column generation solves the linear relaxation, with pricing formulated as an elementary shortest path problem with resource constraints. We recursively propagate unnormalized probability mass via discrete convolution and time-window projection, and combine probability-based label dominance with origin-indexed arc branching to establish the conditions under which complete pricing certifies a valid lower bound for the linear programming relaxation. Numerical experiments show that the method can construct linear-relaxation lower bounds certified by complete pricing for deterministic instances with 30 to 100 service nodes. Ablation experiments show that the improved strategies reduce mean computation time by 12.9% and increase the root-bound certification rate from 94.4% to 100%. Stochastic instances with 20 and 30 service nodes further illustrate how the reliability threshold affects the feasible path set and the objective value. The proposed method provides feasible solutions and linear relaxation lower bounds for this class of integer programs.

Keywords

Joint Chance Constraints, Set-Partitioning Integer Programming, Branch-and-Price, Column Generation, Elementary Shortest Path Problem with Resource Constraints

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

成品油二次配送中的路径选择具有离散决策与多资源约束特征, 已有研究采用遗传算法求解配送调度模型[1], 并以两阶段算法处理大规模多油库配送问题[2]。从数学建模看, 联合机会约束可用于刻画多个随机约束同时满足的概率; Luedtke 等[3]针对右端项服从有限离散分布的线性概率约束问题, 给出混合整数规划表示及强化模型。李珍萍等[4]针对随机需求建立成品油二次配送库存-路径两阶段随机规划模型, 设计改进多割 L-shaped 算法和两阶段算法。胡玉真等[5]通过动态需求建模和多目标优化研究溢油应急资源配置, 采用动态权重调整处理不同响应阶段的目标权衡。上述研究分别涉及随机需求、动态目标与整数资源配置; 本文研究随机服务时间下的路径联合概率可行性。

该类路径选择问题可表述为整数规划[6]。列生成(Column Generation, CG)逐步加入路径用于求解线性松弛; 分支定价(Branch-and-Price, B&P)进一步处理整数性[7] [8]。定价通常建模为带资源约束的初等最短路径问题(Elementary Shortest Path Problem with Resource Constraints, ESPPRC), 由标签算法求解[9]。Bettinelli 等[10]已将分支切割定价用于带时间窗的多车场车辆路径问题。

随机服务时间使按均值构造的路径可能违反时间窗。Errico 等先研究带补救的先验优化[11], 后以分支切割定价求解路径机会约束模型[12]; Florio 等[13]研究含概率时长约束的随机需求路径问题。耿晓路和童小娇[14]综述了分布信息不完全时的分布鲁棒机会约束优化, 本文采用给定的有限离散服务时间分布。Parmentier [15]为非线性及随机资源约束最短路建立了资源界与枚举算法框架, 通过资源界排除部分

路径, 为随机定价中的状态比较和剪枝提供方法参照。

随机服务时间路径已有精确算法研究[11][12], 但成品油配送还涉及油库库存与分载距离。本文以真实检验数扩展概率标签, 结合油库特定弧分支与标签支配, 并通过规模、消融、容量及随机实验检验方法。各算法采用统一的 $F \times$ 车辆数 + 里程目标; 根节点 RMP 仅在完整定价后用作线性松弛下界。在数理规划研究中, 资源约束最短路的双向动态规划[16]、车辆路径问题的通用精确算法[17], 以及集合分割问题的整数列生成策略[18], 分别为定价、分支和可行解搜索提供方法参照。

2. 问题描述与数学模型

2.1. 问题描述与假设

考虑 M 个油库与 N 个加油站, 油库集合 $\mathcal{D} = \{1, \dots, M\}$, 加油站集合 $\mathcal{C} = \{1, \dots, N\}$, 油品集合 $\mathcal{P} = \{1, \dots, Q\}$ 。油库 m 对油品 q 的库存为 W_{mq} , 加油站 i 对油品 q 的需求为 g_{iq} (仓)。油罐车分为 L 个储油仓, 每仓只能装一种油品并卸往一个加油站; 车辆可一次联程配送多个加油站, 但相邻加油站间距不超过最远分载距离 MD ; 每个加油站 i 有严格时间窗 $[a_i, b_i]$, 卸油时长 S_i 为随机变量。车辆从油库出发完成配送后返回, 油库 m 可派车辆上限 K_m 。问题要求在仓容、库存、分载距离与时间窗等约束下, 为每个加油站安排服务车辆与配送次序, 并最小化车辆固定成本与总里程构成的加权综合成本。该目标不等同于严格字典序优化; 若业务必须保证“先最少车辆、再最短里程”, 应另行采用两阶段求解。

每站由一辆车服务一次, 路径不重复访问; 早到车辆可等待至 a_i 开始卸油。储油仓互不混油; 各站服务时间独立且服从离散有限分布。整条路径满足时间窗的联合概率须不低于 α , 定义见 3.2 节。暂不考虑途中补货与车型差异。

为递推概率质量, 以离散三角分布近似卸油时间, 众数和均值取确定性服务时间 $\bar{s}_i$, 支撑区间为 $[0.3\bar{s}_i, 1.7\bar{s}_i]$, 并按 1 min 取整归一化。支撑关于 $\bar{s}_i$ 对称, 期望不变 $\bar{s}_i$ 。当 $\bar{s}_i$ 依次为 18、26、34、42 和 50 min 时, 支撑点数为 27、37、49、59 和 71。

2.2. 弧流模型

设节点集合 $V = \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$, 其中 $\mathcal{C} = \{1, \dots, N\}$ 为加油站, $\mathcal{O} = \{N+1, \dots, N+M\}$ 为油库节点(油库 m 对应节点 $N+m$)。定义决策变量 $y_i^{mk} \in \{0, 1\}$ (油库 m 的第 k 辆车服务加油站 i)、 $x_{ij}^{mk} \in \{0, 1\}$ (该车由节点 i 行驶至节点 j) 与 $u^{mk} \in \{0, 1\}$ (油库 m 的第 k 辆车是否启用), t_i^{mk} 为该车在节点 i 的服务开始时间。记 d_{ij} 为节点间距离, v 为车速, C 为单位距离运输成本, F 为车辆固定成本, $\bar{s}_i = \mathbb{E}[S_i]$ 为确定性骨架模型采用的平均服务时长, 并令 $\bar{s}_{N+m} = 0$ 。弧流模型为:

$$\min Z = F \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^{K_m} u^{mk} + \sum_{i,j \in V} \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^{K_m} C d_{ij} x_{ij}^{mk} \quad (1)$$

$$\text{s.t. } \sum_{i \in \mathcal{C}} \sum_{q=1}^Q g_{iq} y_i^{mk} \leq L, \forall m, k \quad (2)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{C}} \sum_{k=1}^{K_m} g_{iq} y_i^{mk} \leq W_{mq}, \forall m, q \quad (3)$$

$$\sum_{j \in \mathcal{C}} x_{N+m,j}^{mk} = u^{mk}, \sum_{i \in \mathcal{C}} x_{i,N+m}^{mk} = u^{mk}, \forall m, k \quad (4)$$

$$y_i^{mk} \leq u^{mk}, \forall i \in \mathcal{C}, m, k \quad (5)$$

$$d_{ij} x_{ij}^{mk} \leq MD, \forall i, j \in \mathcal{C}, m, k \quad (6)$$

$$\sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^{K_m} y_i^{mk} = 1, \forall i \in \mathcal{C} \quad (7)$$

$$\sum_{i \in V} x_{ij}^{mk} = y_j^{mk}, \sum_{j \in V} x_{ij}^{mk} = y_i^{mk}, \forall j \in \mathcal{C}, m, k \quad (8)$$

$$x_{ij}^{mk} = 0, \forall i, j \in \mathcal{O}, m, k \quad (9)$$

$$x_{hj}^{mk} = x_{jh}^{mk} = 0, \forall h \in \mathcal{O} \setminus \{N+m\}, j \in \mathcal{C}, m, k \quad (10)$$

$$t_{N+m}^{mk} = 0, \forall m, k \quad (11)$$

$$a_j y_j^{mk} \leq t_j^{mk} \leq b_j y_j^{mk}, \forall j \in \mathcal{C}, m, k \quad (12)$$

$$t_j^{mk} \geq t_i^{mk} + \bar{s}_i + d_{ij} / v - M^{\text{TW}} (1 - x_{ij}^{mk}), \forall i \in \mathcal{C} \cup \{N+m\}, j \in \mathcal{C}, m, k \quad (13)$$

$$x_{ij}^{mk}, y_i^{mk}, u^{mk} \in \{0, 1\} \quad (14)$$

2.3. 集合分割主问题模型

定义一条可行路径 r 为车辆从油库 $m(r)$ 出发服务若干加油站后返回该油库的一次车程, 属性含覆盖关系 a_{ir} 、分油品装载量 $b_{qr} = \sum g_{iq}$ 与行驶成本 c_r 。设 R_α 为满足容量、分载距离及式(26)路径联合会约束的全部路径集合, $R_{m,\alpha} \subset R_\alpha$ 为油库 m 的路径集合; 在确定性实验中, R_α 退化为以 $\bar{s}_i$ 检验硬时间窗的路径集合。决策变量 $\lambda_r \in \{0, 1\}$ 表示是否选择路径 r 。集合分割主问题为:

$$\min \sum_{r \in R_\alpha} (c_r + F) \lambda_r \quad (15)$$

$$\text{s.t.} \sum_{r \in R_\alpha} a_{ir} \lambda_r = 1, \forall i \in \mathcal{C} \quad (16)$$

$$\sum_{r \in R_{m,\alpha}} \lambda_r \leq K_m, \forall m \quad (17)$$

$$\sum_{r \in R_{m,\alpha}} b_{qr} \lambda_r \leq W_{mq}, \forall m, q \quad (18)$$

$$\lambda_r \in \{0, 1\}, \forall r \in R_\alpha. \quad (19)$$

式(16)要求每个加油站恰好由一条路径覆盖。计算时, RMP 临时加入人工列 z_i 并赋予惩罚 $\mathcal{P} = 10^7$, 以维持分支节点的可行性。若整数解仍含人工列, 则该解对原问题不可行, 不能用于更新上界。式(17)和式(18)分别限制车辆数与分油品库存。全文算法和方法比较均采用式(15)的加权目标。取 $F = 1000$ 表示每启用一辆车增加 1000 个成本单位, 该设定不构成严格字典序优化。

3. 列生成与改进分支定价算法

3.1. 检验数与定价子问题

对主问题(15)~(19)的线性松弛, 令 π_i (自由变量)、 $v_m \leq 0$ 、 $\mu_{mq} \leq 0$ 分别为式(16)、(17)、(18)的对偶变量(等式约束的对偶为自由变量, $\leq$ 型约束的对偶非正)。路径 r (由油库 m 出发)的检验数为

$$\bar{c}_r = c_r + F - \sum_{i \in \mathcal{C}} \pi_i - v_m - \sum_{q \in \mathcal{P}} \mu_{mq} b_{qr} = c_r - \sum_{i \in \mathcal{C}} \tilde{p}_{im} + F - v_m, \quad (20)$$

其中 $\tilde{p}_{im} = \pi_i + \sum_{q \in \mathcal{P}} \mu_{mq} g_{iq}$ 为加油站 i 关于油库 m 的修正利润。若存在 $\bar{c}_r < 0$ 的路径, 加入主问题可降低目标值。油库 m 的定价子问题即寻找检验数最小的可行路径, 等价于求解 ESPPRC:

$$\min \sum_{(i,j) \in r} C d_{ij} - \sum_{i \in r} \tilde{p}_{im} \quad (21)$$

$$\text{s.t.} \sum_{i \in r} \sum_{q \in \mathcal{P}} g_{iq} \leq L \quad (22)$$

$$t_j = \max \{a_j, t_i + s_i + \tau_{ij}\} \leq b_j, \forall i, j \in r \quad (23)$$

$$d_{ij} \leq MD, \forall \text{相邻加油站 } i, j \in r \quad (24)$$

$$\text{每个加油站至多访问一次} \quad (25)$$

其中 $\tau_{ij} = d_{ij}/v$ 为行驶时间。式(21)~(25)为确定性版本(其中 $s_i = \bar{s}_i$)，随机版本在 3.2 节以机会约束处理。由于 $\tilde{p}_{im}$ 可正可负，该子问题需采用标签算法求解[9]。

3.2. 随机服务时间与路径实际可行概率

若路径 r 上每个加油站的服务开始时间落入其时间窗的概率不低于阈值 α ，则称路径 r 实际可行，即要求

$$\Pr \{a_i \leq t_i \leq b_i, \forall i \in r\} \geq \alpha. \quad (26)$$

设各站服务时间相互独立，并服从概率质量函数为 $ms_i(\cdot)$ 的离散有限分布。递推过程中保留的是整条子路径的联合概率质量，即式(26)中的联合概率，而不是各站的边缘概率。到达时间卷积质量 $h_j(z)$ 与时间窗投影算子定义如下：

$$h_j(z) = \sum_{k \in \Omega_{v_{j-1}}} ms_{v_{j-1}}(k) mt_{v_{j-1}}(z - k - \tau_{v_{j-1}, v_j}), mt_{v_j}(z) = \begin{cases} \sum_{u \leq a_{v_j}} h_j(u), & z = a_{v_j}, \\ h_j(z), & a_{v_j} < z \leq b_{v_j}, \\ 0, & z > b_{v_j}. \end{cases} \quad (27)$$

式中 τ_{v_{j-1}, v_j} 为站点 v_{j-1} 至 v_j 的行驶时间， h_j 是加入前一站服务时间后的原始到达质量；投影算子将早于 a_{v_j} 的质量全部搬运到 a_{v_j} (表示等待)，并舍弃晚于 b_{v_j} 的质量。首站也必须执行同一时间窗投影：若 $\tau_{D, v_1} \leq b_{v_1}$ ，则 $mt_{v_1}(z) = 1 \{z = \max(a_{v_1}, \tau_{D, v_1})\}$ ；否则 $mt_{v_1}(z) = 0$ 。其中 $1\{\cdot\}$ 为示性函数， D 为出发油库。随后逐站传播，路径 r 实际可行的概率为

$$\Pr \{r \text{ 实际可行} \} = \sum_{z \leq b_{|r|}} mt_{|r|}(z). \quad (28)$$

下面用一条包含 v_1, v_2 两站的路径说明式(27)~(28)。油库 D 至 v_1 的行驶时间为 $\tau_{D, v_1} = 10$ min， v_1 的服务时间取 5 或 10 min，概率均为 0.5； v_1 至 v_2 的行驶时间为 8 min，两站时间窗分别为 $[5, 30]$ 和 $[20, 35]$ min。初值为 $mt_{v_1}(10) = 1$ 。按式(27)，到达 v_2 的概率质量分别位于 $z = 10 + 5 + 8 = 23$ 和 $z = 10 + 10 + 8 = 28$ ，各为 0.5。两个时刻均处于 $[20, 35]$ 内，路径实际可行概率为 1。若把 v_2 的时间窗上界收紧到 25 min， $z = 28$ 处的概率质量被截去，路径实际可行概率降为 0.5。式(27)~(28)已把早到概率质量聚合到窗口下界，并截去迟到部分，因此无需另设等待修正规则。

3.3. 列生成算法流程

列生成把主问题的线性松弛写成受限主问题(Restricted Master Problem, RMP)。每轮先求解 RMP 并取得对偶变量，再求解定价子问题，把检验数为负的路径加入列池。所有定价子问题完整求解、未触及时间或标签上限，且不存在负检验数路径时， LB 才构成完整主问题线性松弛的下界[7] [8]。定价一旦被截

断, 本文只报告可行解, 不把当轮 RMP 值记作下界。随机情形仍按式(20)计算检验数, 服务时间分布改变的是路径可行集合。在离散分布和完整定价条件下, 收敛判据与确定性情形相同。

初始化列池: 加入满足时间窗的直送路径 (m, i, m) ; 为每个加油站加入 z_i 人工列求解受限主问题线性松弛, 得当前 RMP 值 z_{RMP} 与对偶变量 (π, ν, μ) 计算各站对油库 m 的修正利润 $\tilde{p}_{im}$ 用标签算法求解油库 m 的定价子问题将路径 r 加入列池列生成收敛, 令 $LB = z_{\text{RMP}}$; break 对最终列池求解整数规划, 得到上界 UB 已认证下界 LB (若取得)、上界 UB 与列池。

注: 若任一定价子问题达到时间或标签上限, 则当前 RMP 值不标记为已认证下界。

3.4. 定价子问题的标签算法

确定性情形下, 从油库延伸至加油站 i 的标签定义为四元组

$$\mathcal{L}_i = (V_i, t_i, Q_i, \mathcal{R}_i), \quad (29)$$

其中 V_i 为已访问集合(位掩码检测环), t_i 为最早服务开始时间, Q_i 为累计装载量, $\mathcal{R}_i$ 为累计检验数; 初始标签 $\mathcal{L}_0 = (\emptyset, 0, 0, 0)$ 。扩展到未访问站 j 的规则为

$$t_j = \max \{a_j, t_i + s_i + \tau_{ij}\} \leq b_j, Q_j = Q_i + \sum_q g_{jq} \leq L, d_{ij} \leq MD, \quad (30)$$

且 $\mathcal{R}_j = \mathcal{R}_i + Cd_{ij} - \tilde{p}_{jm}$ 。若标签 $\mathcal{L}^1$ 满足

$$V^1 \subseteq V^2, t^1 \leq t^2, Q^1 \leq Q^2, \mathcal{R}^1 \leq \mathcal{R}^2, \quad (31)$$

则 $\mathcal{L}^1$ 支配 $\mathcal{L}^2$, 后者可以剔除[9]。随机情形的标签写为 $\mathcal{L}_i = (V_i, Mt_i(\cdot), Q_i, \mathcal{R}_i)$, 其中 Mt_i 是未归一化的联合概率质量, $\mathcal{R}_i$ 仍按真实检验数累计。对于末节点相同的两个标签, 若标签 1 的已访问集合是标签 2 的子集, 装载量与检验数均不大于标签 2, 并且对任意 z 都有 $\sum Mt_i^1(u) \geq \sum Mt_i^2(u)$, 则标签 1 支配标签 2。服务时间卷积、确定性行驶时间平移和等待投影不会改变这一累积分布序。因此, 在采用相同后续站序时, 标签 1 不会比标签 2 更晚, 保留概率也不会更低。

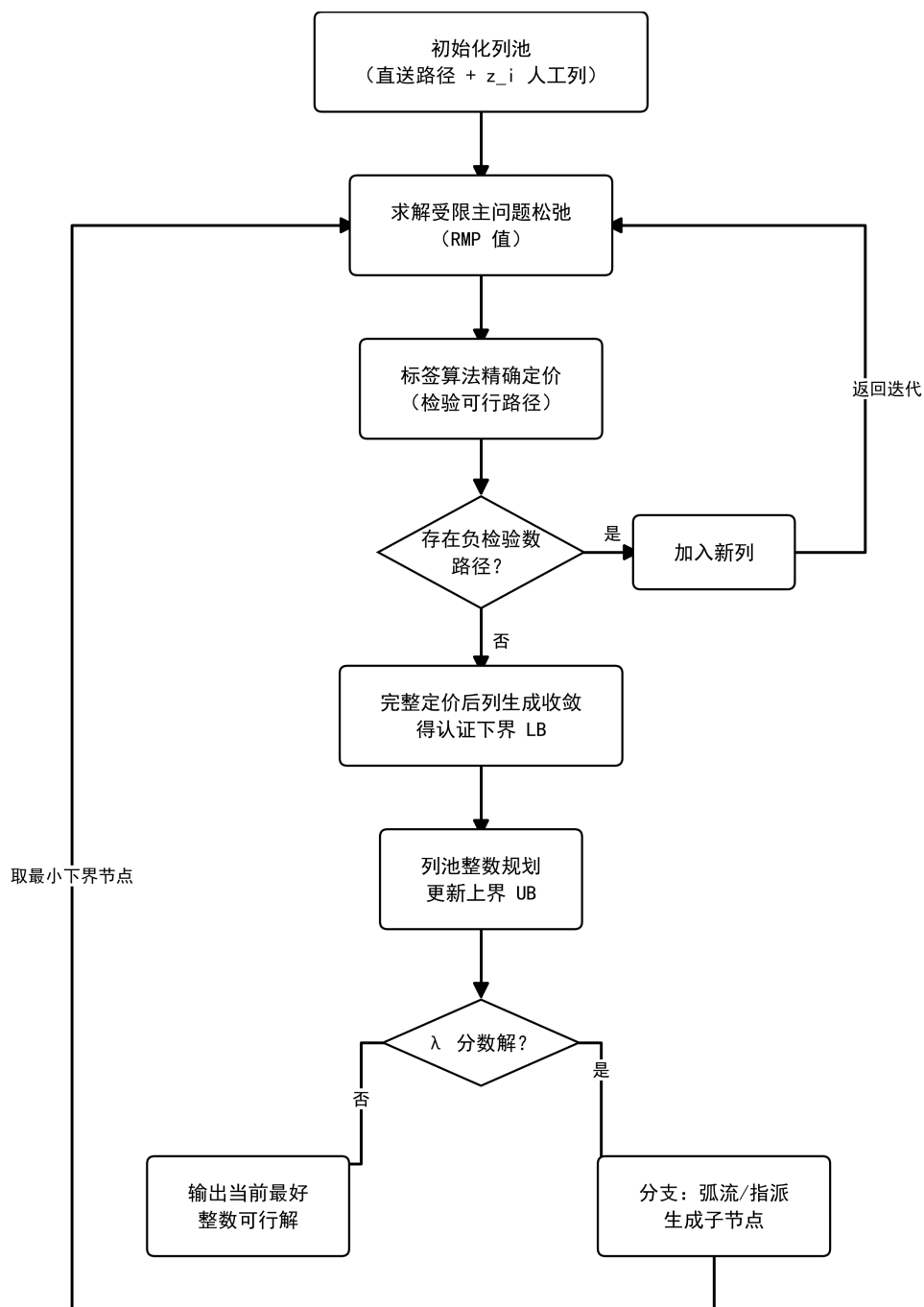
每次扩展后, 累计概率低于 α 的标签立即删除, 进入列池的完整路径因而满足式(26)。程序用队列依次处理新生的非支配标签。队列耗尽且未触及标签上限或时间上限时, 该次定价才记为完整。确定性统一实验把标签上限设为 5000; 对小规模算例, 还通过枚举全部可行路径核对定价结果。

3.5. 分支策略与算法流程

列生成产生分数解后, 算法优先按油库区分的弧流分支, 并计算 $\bar{x}_{ij}^m = \sum \delta_{ij}^r \lambda_r$ 。每个分数弧 (m, i, j) 对应强制和禁止两个子节点, 分支限制同时作用于初始列筛选与油库 m 的定价扩展。强制站点弧 $i \rightarrow j$ 时, 访问 i 的路径必须随后访问 j , 访问 j 的路径也必须从 i 到达。强制油库弧 $D_m \rightarrow j$ 只规定访问 j 的路径以 j 为首站, 不排除从 D_m 出发的其他路径。禁止分支删除含该弧的全部路径, 站库指派分支用于辅助处理。

节点下界仅经完整定价认证后用于剪枝; 含人工列的整数解不能更新上界。即使 RMP 解为整数, 定价未完成也不能关闭节点。预算耗尽的节点记为未解决。

生成初始列池(直送路径 + 高成本人工列)求解受限主问题线性松弛, 得对偶变量与当前 RMP 值 z_{RMP} 用标签算法求解定价子问题; 发现负检验数路径则加入列池令已认证节点下界 $LB = z_{\text{RMP}}$ 对当前列池求解整数规划, 更新上界 UB 安全剪枝选择带油库索引的分数弧/指派, 生成两个分支子节点并入队列将节点标记为未解决, 不宣称闭合弹出下界最小的节点, 重复列生成与分支当前最好整数可行解 UB 及对应路径集合(图 1)。



注：分支树未在预算内闭合时，返回当前最好整数可行解，并以已认证根 LP 下界计算根 LP 间隙。

Figure 1. Framework of the improved branch-and-price algorithm
图 1. 改进分支定价算法流程框架

4. 数值实验

4.1. 实验设置

算例在 100×100 区域内生成，包含 2 种油品，并设置容量 $L = 5$ 、时间窗、库存和分载距离约束。确

定性实验采用 3 个班次，随机实验的时间窗宽度为 180 min。确定性实验取 $M \in \{2, 3\}$ 、 $N \in \{30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100\}$ ，每种组合使用 3 个实例种子，共 48 例。主比较中，B&P、GA 和 ALNS 的单实例时限均为 15 s；B&P 最多处理 10 个分支节点，每次定价最多保留 5000 个标签。主要参数和算例生成规则见表 1。

Table 1. Parameter settings of instance generation

表 1. 算例生成参数

参数	取值	说明
油库数 M	2, 3	油库分布于区域边界
加油站数 N	30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100	围绕城市中心聚簇分布
油品种类 Q	2	汽油、柴油
站点需求 g_{iq}	1~5 仓	概率 0.1, 0.15, 0.25, 0.25, 0.25
油罐车仓容 L	确定性算例 5 (敏感性含 6, 8, 10); 随机实验 8	每个仓位一种油品
油库库存 W_{mq}	总需求 $\times 1.2$	按油库容量比例分配
时间窗 $[a_i, b_i]$	3 个班次时段(每段 240 min)	随机实验采用 180 min 随机窗口
随机服务时间 S_i	离散三角分布	众数和均值为 $\bar{s}_i$ ，支撑为 $[0.3\bar{s}_i, 1.7\bar{s}_i]$ ，粒度 1 min
最远分载距离 MD	50 km	相邻两站距离上限
行驶速度 v	60 km/h	距离 1 km 对应 1 min
单位距离成本 C	1	
车辆固定成本 F	1000	加权目标中每启用一辆车的固定成本
油库车辆数上限 K_m	N (不约束)	车辆使用量由加权目标决定

4.2. 不同规模算例的对比结果

表 2 和图 2 比较了 B&P、两阶段遗传算法(GA)、库存可行的最近油库指派加顺序插入启发式(NI)以及自实现 ALNS 在 48 个确定性算例上的结果。四种方法均按式(15)的 $1000 \times \text{车辆数} + \text{里程}$ 评价，所得方案均通过覆盖、容量、库存、时间窗和分载距离校验。在 15 s 时限内，39 例 B&P 结果取得经完整定价认证的根 LP 下界，平均根 LP 间隙为 0.219%，最大为 2.017%；其中 7 例在预算内完成分支树认证。对未完成认证的算例，表中报告当前最好可行解，未认证的 RMP 值不作为下界。

对 16 组规模均值作等权平均后，B&P 的加权目标比 GA 低 10.9%，比 NI 低 14.5%，各组均保持稳定优势。与 ALNS 相比，B&P 平均低 0.17%，逐实例比较为 45 胜、1 平、2 负；单侧配对 Wilcoxon 检验经 Holm 校正后仍有 $p < 0.001$ 。由于两者平均差值仅为 0.17%，该结果表明 B&P 与 ALNS 在当前算例上的解质量总体接近，而 B&P 还能提供经认证的线性松弛下界。

主实验采用 $L = 5$ ，平均每条路径服务约 1.27 个站。为考察容量影响，另取 $M = 2$ 、 $N = 30$ 及 3 个相同种子，在 90 s 预算下比较容量 $L = 5$ 与 10。表 3 显示容量增至 10 后，车辆数由 24.00 降至 11.67，每条路径站数由 1.25 增至 2.58，里程由 2359 km 降至 1246 km。两组根下界均获认证；容量 $L = 10$ 的平均根 LP 间隙由 1.30% 增至 3.75%，表明长路径增加定价难度。结果为限时可行解。GA 和 ALNS 各采用一个算法种子，统计检验基于实例配对差异。

Table 2. Weighted-objective comparison of instances of different sizes under a common 15-second budget
表 2. 统一 15 秒预算下不同规模算例的加权目标比较

规模	B&P 车辆	B&P 目标	ALNS 车辆	ALNS 目标	GA 车辆	GA 目标	NI 车辆	NI 目标
2 × 30	24.0	26358.5	24.0	26376.1	26.7	29484.0	27.7	30378.2
3 × 30	24.0	26270.2	24.0	26289.4	26.7	29360.5	29.3	32038.0
2 × 40	31.7	35170.9	31.7	35194.2	36.0	40066.0	37.3	41416.2
3 × 40	31.7	34437.5	31.7	34451.0	35.0	38225.5	36.3	39458.4
2 × 50	41.0	45490.1	41.0	45524.5	45.3	50501.8	48.0	53252.5
3 × 50	41.0	43910.6	41.0	43946.6	44.0	47415.7	47.0	50265.3
2 × 60	48.3	52542.9	48.3	52598.2	54.0	58947.7	57.3	62340.3
3 × 60	48.3	52082.6	48.3	52154.7	53.3	57802.1	56.7	61029.5
2 × 70	55.0	59982.2	55.3	60443.5	62.3	68292.4	63.7	69559.0
3 × 70	55.0	59444.4	55.3	59947.0	59.7	65022.8	64.0	69178.8
2 × 80	62.3	67982.4	62.3	68144.2	69.3	76080.1	73.7	80428.3
3 × 80	62.3	67776.6	62.7	68343.7	67.3	73767.9	72.7	78961.9
2 × 90	70.3	77405.7	70.3	77567.3	80.0	88205.5	82.7	91051.3
3 × 90	70.3	76294.7	70.7	76834.6	81.0	88143.5	83.3	90302.6
2 × 100	77.7	84780.7	77.0	84351.1	90.7	99041.0	90.0	98239.5
3 × 100	78.0	84365.1	77.0	83519.3	90.0	97526.6	90.7	98003.2

注：每行是 3 个实例种子的平均值，目标值均为 $1000 \times \text{车辆数} + \text{总里程}$ 。B&P、GA 与 ALNS 均采用 15 s 实时时限；B&P 另设 10 个分支节点和每次定价 5000 标签上限。NI 为无迭代的库存可行构造基线，不纳入同时效率判断。所有方法使用完全相同的实例、距离矩阵、约束检验器和目标定义。

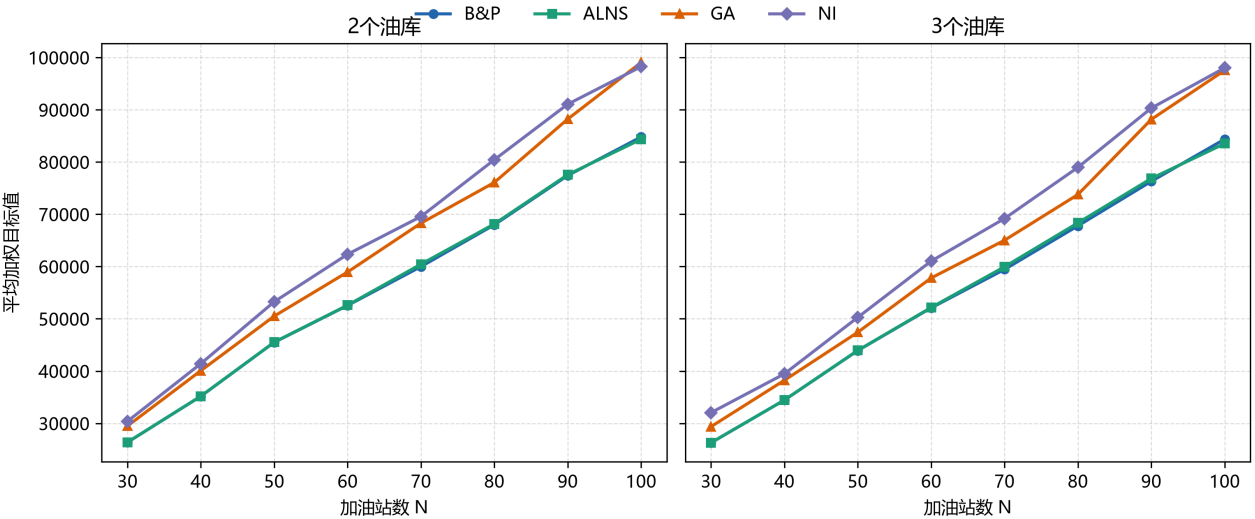


Figure 2. Weighted-objective comparison of four methods under a common 15-second budget
图 2. 统一 15 秒预算下四种方法的加权目标对比

为分离算法改进本身的作用，另取 $N = 30, 50, 70$ 、 $M = 2, 3$ 的 18 个算例进行同预算消融。基础 B&P 采用油库指派优先、跨油库聚合的站点弧分支，不启用标签支配；改进 B&P 采用油库特定弧优先分支和

标签支配，其余设置完全相同。由表 4 可见，改进版平均用时由 7.78 s 降至 6.78 s，减少 12.9%；在更短时间内，平均已处理节点由 3.94 增至 4.50，根下界认证率由 94.4% 提高到 100%，认证根 LP 间隙均值由 0.483% 降至 0.458%。两版分支树认证率均为 16.7%，表明改进主要体现在定价效率和预算内搜索吞吐量上。

Table 3. Route-density comparison under different vehicle capacities (mean and standard deviation across 3 seeds)
表 3. 不同车辆容量下的路径密度比较(3 个种子均值标准差)

L	车辆数	每条路径站数	总里程(km)	目标值	根下界认证率	根 LP 间隙(%)
5	24.00 ± 1.00	1.25 ± 0.05	2359 ± 154	26359 ± 848	3/3	1.30
10	11.67 ± 0.58	2.58 ± 0.13	1246 ± 78	12912 ± 510	3/3	3.75

注：固定 $M = 2$ 、 $N = 30$ 及实例种子 0、1、2，仅改变车辆容量；两组均采用 90 s、30 节点和 25000 标签上限。“每条路径站数”按 N /车辆数逐实例计算后取均值。表中均为当前最好整数可行解；3 个实例均取得认证根 LP 下界，但分支树均未在预算内闭合。

Table 4. Ablation comparison of the basic and improved B&P under the same budget
表 4. 基础 B&P 与改进 B&P 的同预算消融比较

站点数	算法	时间(s)	已处理节点	根下界认证率(%)	分支树认证率(%)	根 LP 间隙(%)
总体	基础 B&P	7.78	3.94	94.4	16.7	0.483
总体	改进 B&P	6.78	4.50	100.0	16.7	0.458

注：汇总 $N = 30, 50, 70$ 、 $M = 2, 3$ 及 3 个种子的 18 例。两版均采用 15 s、10 节点和 5000 标签上限。基础版采用油库指派优先、跨油库聚合站点弧分支且不使用标签支配；改进版采用油库特定弧优先分支和标签支配，其余设置相同。已处理节点数反映固定预算内的搜索吞吐量；根 LP 间隙仅对取得认证根下界的算例求均值。

图 3 进一步给出同一代表性算例在两种车辆容量下的实际配送路径。 $L = 5$ 时多数路线仅服务 1 至 2 个站； $L = 10$ 时多站串联路线明显增加，与表 3 的总体统计结果一致。

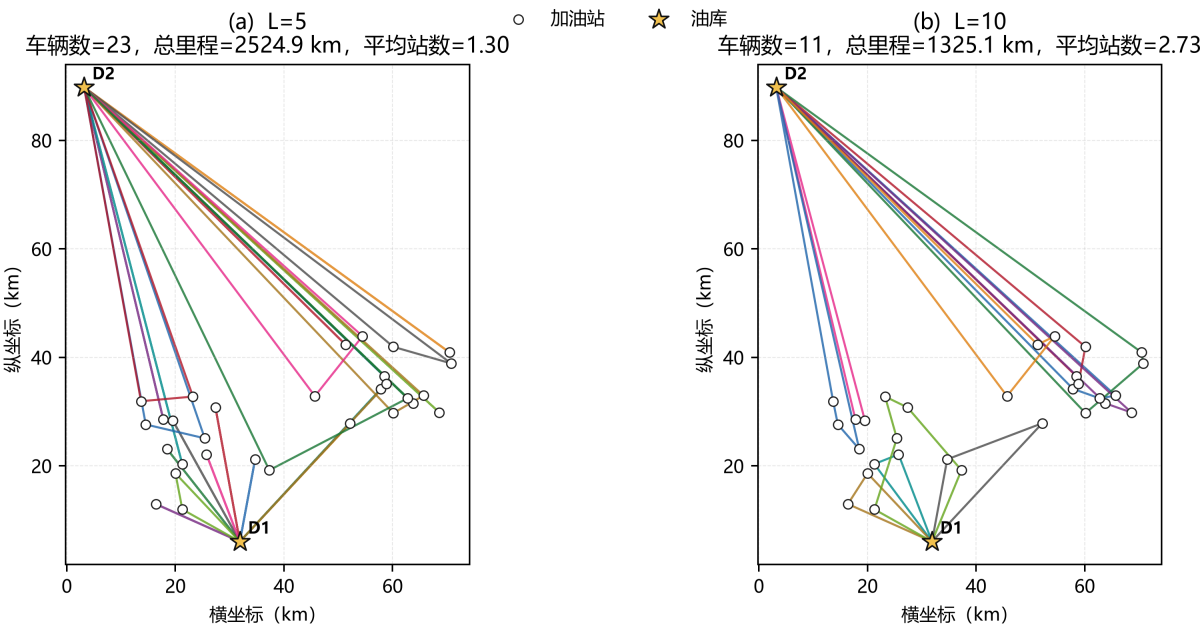


Figure 3. Delivery routes of a representative instance under different vehicle capacities
图 3. 不同车辆容量下代表性算例的配送路径

4.3. 随机服务时间下机会约束的影响

随机实验设置为 $M = 2$ 、 $N \in \{20, 30\}$ 、 $L = 8$ 和 180 min 窗宽，每个规模使用 6 个随机种子，并对 $\alpha = 0.80, 0.85, 0.90, 0.95, 0.99$ 分别求解。服务时间采用 2.1 节所述离散三角分布，均值为 18、26、34、42 和 50 min。单次预算为 60 s、10 个分支节点和 25,000 个标签。机会约束的可行域随 α 单调收缩，因此同一实例在较严格阈值下取得的方案也作为较宽松阈值的候选上界；这一共享只改善可行解，不改变各阈值的下界认证。

Table 5. Branch-and-price results for chance-constraint thresholds at $N = 20$ and 30 (mean $\pm$ standard deviation over 6 random seeds)
表 5. $N = 20$ 、30 时机会约束阈值的分支定价结果(各 6 个随机种子均值 $\pm$ 标准差)

N	α	目标值	总里程(km)	车辆数	最小路径可行概率	根下界认证率	根 LP 间隙(%)
20	0.80	10,996	996 $\pm$ 234	10.0 $\pm$ 1.1	0.978 $\pm$ 0.054	6/6	3.16
20	0.85	10,996	996 $\pm$ 234	10.0 $\pm$ 1.1	0.978 $\pm$ 0.054	6/6	3.16
20	0.90	10,996	996 $\pm$ 234	10.0 $\pm$ 1.1	0.998 $\pm$ 0.004	6/6	3.16
20	0.95	10,996	996 $\pm$ 234	10.0 $\pm$ 1.1	0.998 $\pm$ 0.004	6/6	3.16
20	0.99	10,996	996 $\pm$ 234	10.0 $\pm$ 1.1	1.000 $\pm$ 0.000	6/6	3.16
30	0.80	16,196	1529 $\pm$ 354	14.7 $\pm$ 1.6	1.000 $\pm$ 0.000	3/6	2.37
30	0.85	16,201	1534 $\pm$ 357	14.7 $\pm$ 1.6	0.987 $\pm$ 0.033	4/6	2.48
30	0.90	16,378	1545 $\pm$ 363	14.8 $\pm$ 1.5	1.000 $\pm$ 0.000	4/6	2.48
30	0.95	16,378	1545 $\pm$ 363	14.8 $\pm$ 1.5	1.000 $\pm$ 0.000	3/6	2.37
30	0.99	16,379	1546 $\pm$ 362	14.8 $\pm$ 1.5	1.000 $\pm$ 0.000	3/6	2.37

注：每个规模使用 6 个随机种子；目标值列为均值，其余连续指标为均值 $\pm$ 标准差。每次求解采用 60 s、10 节点和 25,000 标签上限。由于 $R_{99} \subseteq \dots \subseteq R_{80}$ ，同一实例在较严格阈值下得到的可行解也可作为较宽松阈值的有效上界，故表中按嵌套可行域共享当前最好可行解，以减少限时搜索波动。根 LP 间隙只对完成完整定价的样本计算；“-”表示该组未取得认证根下界。

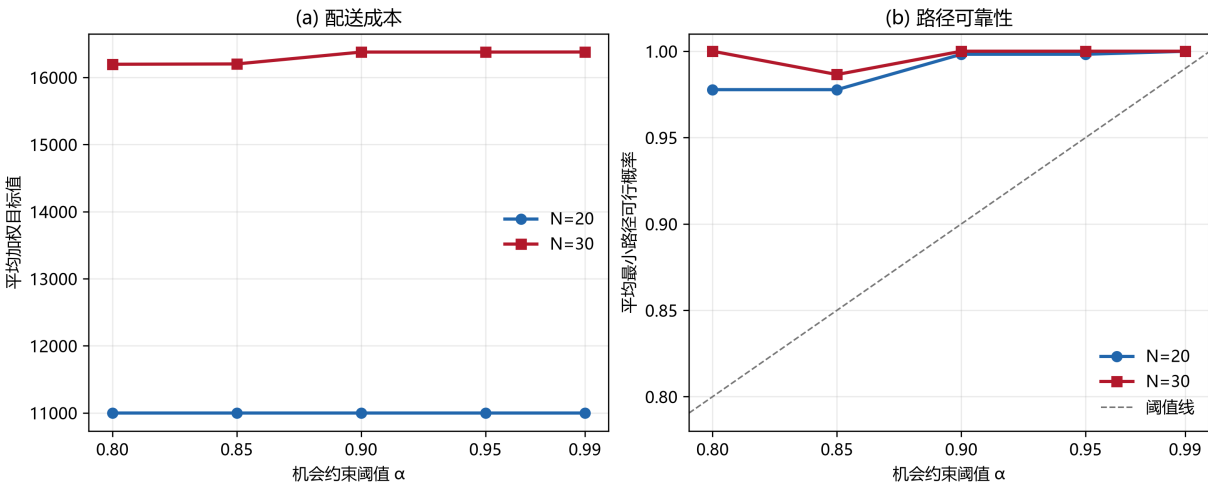


Figure 4. Effects of the chance-constraint threshold on the weighted objective and minimum route feasibility probability
图 4. 机会约束阈值对加权目标与最小路径可行概率的影响

表 5 和图 4 给出机会约束结果。卸油时长均值 18~50 min 和 180 min 时间窗下，阈值 α 从 0.80 提高

到 0.99 时, $N = 20$ 组的平均目标值保持 10,996, 最低路径可行概率由 0.978 升至 1.000; $N = 30$ 组的平均目标值由 16,196 增至 16,379, 增幅 1.1%, 车辆数由 14.7 增至 14.8。提高阈值主要影响少数路径。 $N = 20$ 的 30 次求解均取得认证根下界, $N = 30$ 为 17 次; 规模增加使随机定价更难。成本影响还取决于服务时间波动与窗宽。

4.4. 讨论

消融实验表明, 油库特定弧分支与标签支配提高了搜索效率和根下界认证率。容量是主实验路径较短的重要原因, 增大容量有利于多站联程。机会约束主要影响可靠性接近阈值的路径, 可能改变顺序、缩短路径或增加车辆。两类参数应结合实际运力和服务要求设定。

5. 结论

本文建立多油库成品油配送的机会约束集合分割模型, 并设计概率标签与油库特定弧分支相结合的分支定价算法。主要结果如下:

(1) 模型联合处理多油库、库存、容量、时间窗及随机卸油时间。在 48 个 30~100 站算例上, 方案均通过约束校验; B&P 目标比 GA 和 NI 低 10.9% 和 14.5%, 与 ALNS 平均相差 0.17%, 并可提供认证根 LP 下界。

(2) 油库特定弧分支与标签支配使平均计算时间减少 12.9%, 已处理节点由 3.94 增至 4.50, 根下界认证率由 94.4% 升至 100%。

(3) 车辆容量由 5 增至 10 后, 每条路径平均服务站数由 1.25 增至 2.58, 总里程由 2359 km 降至 1246 km。机会约束可控制整条路径的时间可行概率及其成本。

该方法可输出满足业务约束的路径, 并在完整定价后提供经认证的线性松弛下界, 为车辆配置和可靠性控制提供依据。

致 谢

感谢在论文撰写和修改过程中提供意见与帮助的师兄。

参考文献

- [1] 马义飞, 孙晓燕. 成品油二次配送调度优化模型及其遗传算法求解[J]. 运筹与管理, 2010, 19(6): 73-78.
- [2] 张立峰, 易万里, 刘晓兰. 基于两阶段算法的大规模成品油二次配送优化[J]. 系统工程理论与实践, 2016, 36(11): 2951-2963.
- [3] Luedtke, J., Ahmed, S. and Nemhauser, G.L. (2010) An Integer Programming Approach for Linear Programs with Probabilistic Constraints. *Mathematical Programming*, **122**, 247-272. <https://doi.org/10.1007/s10107-008-0247-4>
- [4] 李珍萍, 焦鹏博, 韩倩倩, 等. 成品油二次配送库存-路径优化模型与两阶段算法[J]. 系统科学与数学, 2023, 43(5): 1120-1137.
- [5] 胡玉真, 邢铁奇, 吴佳萍, 等. 基于动态需求建模的溢油应急资源多目标优化研究[J/OL]. 系统科学与数学, 2026. <https://link.cnki.net/urlid/11.20260303.1415.032>, 2026-09-28.
- [6] 孙小玲, 李端. 整数规划新进展[J]. 运筹学学报, 2014, 18(1): 39-68.
- [7] Barnhart, C., Johnson, E.L., Nemhauser, G.L., Savelsbergh, M.W.P. and Vance, P.H. (1998) Branch-and-Price: Column Generation for Solving Huge Integer Programs. *Operations Research*, **46**, 316-329. <https://doi.org/10.1287/opre.46.3.316>
- [8] Lübbecke, M.E. and Desrosiers, J. (2005) Selected Topics in Column Generation. *Operations Research*, **53**, 1007-1023. <https://doi.org/10.1287/opre.1050.0234>
- [9] Feillet, D., Dejax, P., Gendreau, M. and Gueguen, C. (2004) An Exact Algorithm for the Elementary Shortest Path Problem with Resource Constraints: Application to Some Vehicle Routing Problems. *Networks*, **44**, 216-229.

- <https://doi.org/10.1002/net.20033>
- [10] Bettinelli, A., Ceselli, A. and Righini, G. (2011) A Branch-and-Cut-and-Price Algorithm for the Multi-Depot Heterogeneous Vehicle Routing Problem with Time Windows. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, **19**, 723-740. <https://doi.org/10.1016/j.trc.2010.07.008>
 - [11] Errico, F., Desaulniers, G., Gendreau, M., Rei, W. and Rousseau, L. (2016) A Priori Optimization with Recourse for the Vehicle Routing Problem with Hard Time Windows and Stochastic Service Times. *European Journal of Operational Research*, **249**, 55-66. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2015.07.027>
 - [12] Errico, F., Desaulniers, G., Gendreau, M., Rei, W. and Rousseau, L. (2018) The Vehicle Routing Problem with Hard Time Windows and Stochastic Service Times. *EURO Journal on Transportation and Logistics*, **7**, 223-251. <https://doi.org/10.1007/s13676-016-0101-4>
 - [13] Florio, A.M., Hartl, R.F., Minner, S. and Salazar-González, J. (2021) A Branch-and-Price Algorithm for the Vehicle Routing Problem with Stochastic Demands and Probabilistic Duration Constraints. *Transportation Science*, **55**, 122-138. <https://doi.org/10.1287/trsc.2020.1002>
 - [14] 耿晓路, 童小娇. 分布鲁棒机会约束优化问题的研究[J]. 运筹学学报, 2020, 24(1): 115-130.
 - [15] Parmentier, A. (2018) Algorithms for Non-Linear and Stochastic Resource Constrained Shortest Path. *Mathematical Methods of Operations Research*, **89**, 281-317. <https://doi.org/10.1007/s00186-018-0649-x>
 - [16] Righini, G. and Salani, M. (2006) Symmetry Helps: Bounded Bi-Directional Dynamic Programming for the Elementary Shortest Path Problem with Resource Constraints. *Discrete Optimization*, **3**, 255-273. <https://doi.org/10.1016/j.disopt.2006.05.007>
 - [17] Pessoa, A., Sadykov, R., Uchoa, E. and Vanderbeck, F. (2020) A Generic Exact Solver for Vehicle Routing and Related Problems. *Mathematical Programming*, **183**, 483-523. <https://doi.org/10.1007/s10107-020-01523-z>
 - [18] Maher, S.J. and Rönnberg, E. (2023) Integer Programming Column Generation: Accelerating Branch-and-Price Using a Novel Pricing Scheme for Finding High-Quality Solutions in Set Covering, Packing, and Partitioning Problems. *Mathematical Programming Computation*, **15**, 509-548. <https://doi.org/10.1007/s12532-023-00240-w>