Pure Mathematics 理论数学, 2011, 1, 8-11
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2011.11002 Published Online April 2011 (http://www.hanspub.org/journal/pm/)

Stability of Two Classes of High-Order Nonlinear Recursive Sequences

Bin Zhao[1,2], Jingmin Wang[1], Yizhi Chen[2]
[1]College of Science, Northwest A & F University, Yangling
[2]Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an
Email: zhaobin835@nwsuaf.edu.cn
Received: Mar. 18th, 2011; revised: Mar. 28th, 2011; accepted: Mar. 31st, 2011.

Abstract: Consider the global asymptotic stability of two classes of high-order nonlinear recursive sequences:

$$x_{n+1}=\frac{\sum\limits_{i\in \mathbf{Z}_k-\{i_0,i_1,\cdots,i_{t-1}\}} Ax_{n-i}+A\prod\limits_{s=0}^{t-1}x_{n-i_s}+B}{\sum\limits_{i\in \mathbf{Z}_k-\{i_0,i_1,\cdots,i_t\}} Ax_{n-i}+A\prod\limits_{s=0}^{t}x_{n-i_s}+A+B},n=0,1,\cdots, \text{ and } x_{n+1}=\frac{\sum\limits_{i\in \mathbf{Z}_k-\{i_0,i_1,\cdots,i_t\}} Ax_{n-i}+A\prod\limits_{s=0}^{t}x_{n-i_s}+A+B}{\sum\limits_{i\in \mathbf{Z}_k-\{i_0,i_1,\cdots,i_{t-1}\}} Ax_{n-i}+A\prod\limits_{s=0}^{t-1}x_{n-i_s}+B},n=0,1,\cdots,$$

where $A,B\in[0,\infty)$, $A+B>0$, $k\in\{1,2,\cdots\}$, $1\le t\le k$, $\{i_0,i_1,\cdots,i_t\}\subset Z_k$, $i_m\ne i_n\ (\forall\, m\ne n)$, and the initial values $x_{-k},x_{-k+1},\cdots,\ x_0\in(0,\infty)$. We prove that $\bar{x}=1$ is a globally asymptotically stable equilibrium of them and a new access is presented to research the theories of recursive sequences.

Keywords: Recursive Sequence; Equilibrium; Global Asymptotic Stability

两类高阶非线性递归序列的稳定性

赵　斌[1,2*]，王经民[1]，陈益智[2]
[1]西北农林科技大学理学院，杨凌
[2]西北大学数学系，西安
Email: zhaobin835@nwsuaf.edu.cn
收稿日期：2011 年 3 月 18 日；修回日期：2011 年 3 月 28 日；录用日期：2011 年 3 月 31 日

摘　要：研究了两类高阶非线性递归序列，形如

$$x_{n+1}=\frac{\sum\limits_{i\in \mathbf{Z}_k-\{i_0,i_1,\cdots,i_{t-1}\}} Ax_{n-i}+A\prod\limits_{s=0}^{t-1}x_{n-i_s}+B}{\sum\limits_{i\in \mathbf{Z}_k-\{i_0,i_1,\cdots,i_t\}} Ax_{n-i}+A\prod\limits_{s=0}^{t}x_{n-i_s}+A+B},n=0,1,\cdots, \text{以及 } x_{n+1}=\frac{\sum\limits_{i\in \mathbf{Z}_k-\{i_0,i_1,\cdots,i_t\}} Ax_{n-i}+A\prod\limits_{s=0}^{t}x_{n-i_s}+A+B}{\sum\limits_{i\in \mathbf{Z}_k-\{i_0,i_1,\cdots,i_{t-1}\}} Ax_{n-i}+A\prod\limits_{s=0}^{t-1}x_{n-i_s}+B},n=0,1,\cdots,$$

其中 $A,B\in[0,\infty)$，$A+B>0$，$k\in\{1,2,\cdots\}$，$1\le t\le k$，$\{i_0,i_1,\cdots,i_t\}\subset Z_k$，并且 $i_m\ne i_n\ (\forall\, m\ne n)$，初始值 $x_{-k},x_{-k+1},\cdots,\ x_0\in(0,\infty)$ 的全局渐近稳定性。证明了 $\bar{x}=1$ 是它们的全局渐近稳定平衡点，为递归序列理论的研究提供了一种新的途径。

关键词：递归序列；平衡点；全局渐近稳定性

1. 引言

在文献[1]中，Alaa. E. Hamza 和 R. Khalaf-Allah 提出研究下面有理递归序列的全局渐近稳定性：

$$x_{n+1}=\frac{A\prod\limits_{i=l}^{K}x_{n-2i-1}}{B+C\prod\limits_{i=l}^{n-1}x_{n-2i}},\quad n=0,1,\cdots, \tag{E1}$$

其中 $A,B,C\in R_+\equiv(0,\infty)$，$l$，$k$ 为非负整数，$l<k$。

基金项目：国家自然学基金(11001217)。

在文献[2]中，T.Nesemann 利用文献[6]中的强负反馈性研究了下面的递归序列：

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-1}+x_nx_{n-2}}{x_nx_{n-1}+x_{n-2}},\quad n=0,1,\cdots, \tag{E2}$$

其中，初始值 $x_{-2},x_{-1},x_0\in R_+$。

在文献[3]中，Papaschinopoulos 和 Schinas 研究了下面非线性递归序列的全局渐近稳定性：

$$x_{n+1}=\frac{\sum\limits_{i\in \mathbf{Z}_k-\{j-1,j\}}x_{n-i}+x_{n-j}x_{n-j+1}+1}{\sum\limits_{i\in \mathbf{Z}_k}x_{n-i}},\quad n=0,1,\cdots, \tag{E3}$$

其中 $k\in\{1,2,3,\cdots\},\{j,j-1\}\subset \mathbf{Z}_k\equiv\{0,1,\cdots,k\}$，初始值 $x_{-k},x_{-k+1},\cdots,x_0\in R_+$。

在文献[4,5]中，李先义研究了下面两个非线性递归序列的全局渐近稳定性：

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-1}x_{n-2}x_{n-3}+x_{n-1}+x_{n-2}+x_{n-3}+a}{x_{n-1}x_{n-2}+x_{n-1}x_{n-3}+x_{n-2}x_{n-3}+1+a},\quad n=0,1,\cdots, \tag{E4}$$

且 $$x_{n+1}=\frac{x_nx_{n-1}x_{n-3}+x_n+x_{n-1}+x_{n-3}+a}{x_nx_{n-1}+x_nx_{n-3}+x_{n-1}x_{n-3}+1+a},\quad n=0,1,\cdots, \tag{E5}$$

其中 $a\in[0,+\infty)$ 初始值 $x_{-3},x_{-2},x_{-1},x_0\in R_+$。

本文研究下列两类递归序列：

$$x_{n+1}=\frac{\sum\limits_{i\in \mathbf{Z}_k-\{i_0,i_1,\cdots,i_{t-1}\}}Ax_{n-i}+A\prod\limits_{s=0}^{t-1}x_{n-i_s}+B}{\sum\limits_{i\in \mathbf{Z}_k-\{i_0,i_1,\cdots,i_t\}}Ax_{n-i}+A\prod\limits_{s=0}^{t}x_{n-i_s}+A+B},\quad n=0,1,\cdots, \tag{1}$$

以及

$$x_{n+1}=\frac{\sum\limits_{i\in \mathbf{Z}_k-\{i_0,i_1,\cdots,i_t\}}Ax_{n-i}+A\prod\limits_{s=0}^{t}x_{n-i_s}+A+B}{\sum\limits_{i\in \mathbf{Z}_k-\{i_0,i_1,\cdots,i_{t-1}\}}Ax_{n-i}+A\prod\limits_{s=0}^{t-1}x_{n-i_s}+B},\quad n=0,1,\cdots, \tag{2}$$

其中 $A,B\in[0,\infty),A+B>0$，$k\in\{1,2,\cdots\}$，$1\le t\le k$，$\{i_0,i_1,\cdots,i_t\}\subset Z_k$，并且 $i_m\ne i_n\,(\forall\ m\ne n)$，初始值 $x_{-k},x_{-k+1},\cdots,x_0\in R_+$ 的全局渐近稳定性。我们用一种有别于常用方法的有效方法，推导出了这两类递归序列正平衡点的全局渐近稳定性，从而避免了利用文献[1-5, 10, 11]等中的方法去推导这两类递归序列正平衡点的全局渐近稳定性而带来的巨大困难。

由于递归序列(1)与递归序列(2)的全局渐近稳定性实质上是一样的，所以下面只需讨论递归序列(2)便可。

易知递归序列(2)的正平衡点 $\overline{x}$ 满足

$$\overline{x}=\frac{A(k-t)\overline{x}+A\overline{x}^{t+1}+A+B}{A(k-t+1)\overline{x}+A\overline{x}^{t}+B}$$

则有

$$(\overline{x}-1)\left[A(k-t)\overline{x}+A(\overline{x}+1)+B\right]=0$$

由此可知递归序列(2)有唯一的一个正平衡点 $\overline{x}=1$，同理可知它也为递归序列(1)的唯一正平衡点。

2. 两类递归序列(1)与(2)的全局渐近稳定性

本节，我们将研究两类递归序列(1)与(2)的正平衡点 $\overline{x}=1$ 的全局渐近稳定性。我们需用到下面两个引理：

引理 1 设 $k\in\{1,2,3,\cdots\}$，$t\in\{1,2,\cdots k\}$，若 $(a_1,a_2,\cdots,a_t,b_0,b_1,\cdots,b_{k-t})\in R_+^{k+1}-\{(1,1,\cdots,1)\}$，且 $M=\max\left\{a_m,\frac{1}{a_m},b_n,\frac{1}{b_n}\middle|1\le m\le t,0\le n\le k-t\right\}$，则

$$\frac{1}{M}<\frac{A\left(\sum\limits_{j=0}^{k-t}b_j+\prod\limits_{i=1}^{t}a_i+1\right)+B}{A\left(a_t+\sum\limits_{j=0}^{k-t}b_j+\prod\limits_{i=1}^{t-1}a_i\right)+B}<M \tag{3}$$

证明：

因为 $(a_1,a_2,\cdots,a_t,b_0,b_1,\cdots,b_{k-t})\in R_+^{k+1}-\{(1,1,\cdots,1)\}$ 且 $M=\max\left\{a_m,\frac{1}{a_m},b_n,\frac{1}{b_n}\middle|1\le m\le t,0\le n\le k-t\right\}$，则有 $M>1$，并且对于任意 $a\in\left\{a_m,\frac{1}{a_m},b_n,\frac{1}{b_n}\,|\,1\le m\le t,0\le n\le k-t\right\}$，或者有 $M\ge a>\frac{1}{M}$，$M>a\ge\frac{1}{M}$。

易证

$$\prod_{i=1}^{t}a_i+1<a_tM+\prod_{i=1}^{t-1}a_iM$$

且

$$a_t + \prod_{i=1}^{t-1} a_i < \prod_{i=1}^{t} a_i M + M.$$

由此可得

$$\begin{aligned} &A\sum_{j=0}^{k-t} b_j + A\left(\prod_{i=1}^{t} a_i + 1\right) + B \\ &< Aa_t M + A\sum_{j=0}^{k-t} b_j + A\prod_{i=1}^{t-1} a_i M + B \\ &< Aa_t M + A\sum_{j=0}^{k-t} b_j M + A\prod_{i=1}^{t-1} a_i M + BM \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} &A\sum_{j=0}^{k-t} b_j + A\left(a_t + \prod_{i=1}^{t-1} a_i\right) + B \\ &< A\sum_{j=0}^{k-t} b_j + A\left(\prod_{i=1}^{t} a_i M + M\right) + B \\ &< A\sum_{j=0}^{k-t} b_j M + A\left(\prod_{i=1}^{t} a_i + 1\right) M + BM \end{aligned}$$

故 $\dfrac{1}{M} < \dfrac{A\left(\sum_{j=0}^{k-t} b_j + \prod_{i=1}^{t} a_i + 1\right) + B}{A\left(a_t + \sum_{j=0}^{k-t} b_j + \prod_{i=1}^{t-1} a_i\right) + B} < M.$

设 n 为正整数，ρ 表示 R_+^n 上的部分度量（参见[7]），它的定义为

$\rho(x,y) = -\log\ \min\left\{\dfrac{x_i}{y_i}, \dfrac{y_i}{x_i} \middle| 1 \le i \le n\right\}$，其中 $x = (x_1,\cdots,x_n)$，$y = (y_1,\cdots,y_n) \in R_+^n$。

Thompson 在[7]中证明了 (R_+^n, ρ) 是一个完备度量空间。Krause 和 Nussbaum 在[8]中证明了：在 R_+^n 上，部分度量所表示的距离与欧几里得范数所表示的距离是等价的。

引理 2[9]设 $T: R_+^n \to R_+^n$ 是一个连续映射，有唯一不动点 $x^* \in R_+^n$。若存在 $l \ge 1$,使得对于部分度量 ρ 有

$$\rho(T^l x, x^*) < \rho(x, x^*), \forall\, x \ne x^*$$

成立,则 x^* 是全局渐近稳定的。

定理 1 两类递归序列(1)与(2)的唯一正平衡点 $\bar{x} = 1$ 是全局渐近稳定的。

证明 设 $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ 是递归序列(2)的一个初始条件为 $x_{-k}, x_{-k+1}, \cdots, x_0 \in R_+^{k+1}$ 的解，使得 $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ 不终于等于 1（否则，若终于等于 1，则无须证明）。给定映射 $T: R_+^{k+1} \to R_+^{k+1}$，

$$T(a_0, a_1, \cdots, a_k) = (a_1, a_2, \cdots, a_k, f(a_0, a_1, \cdots, a_k)),$$

其中

$$f(a_0, a_1 \cdots, a_k) = \frac{\sum_{i \in \mathbf{Z}_k - \{i_0, i_1, \cdots, i_t\}} Aa_{k-i} + A\prod_{s=0}^{t} a_{k-i_s} + A + B}{\sum_{i \in \mathbf{Z}_k - \{i_0, i_1, \cdots, i_{t-1}\}} Aa_{k-i} + A\prod_{s=0}^{t-1} a_{k-i_s} + B}, n = 0,1,\cdots, \quad (2)$$

那么,初始条件为 $y_0 = (x_{-k}, x_{-k+1}, \cdots, x_0)$ 的系统 $y_{n+1} = Ty_n$ 的解 $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的第一个分量就代表了递归序列(2)的解 $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$。

由引理 1 可知：对于任意 $n \ge 0$，不等式

$$x_{n+1} > \min\left\{x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-k}, \frac{1}{x_n}, \frac{1}{x_{n-1}}, \cdots, \frac{1}{x_{n-k}}\right\},$$

$$x_{n+1} < \max\left\{x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-k}, \frac{1}{x_n}, \frac{1}{x_{n-1}}, \cdots, \frac{1}{x_{n-k}}\right\}$$

成立。从而，对于 $x^* = (1,1,\cdots,1)$ 和部分度量 ρ，我们有

$$\rho(T^{k+1}(y_n), x^*) < \rho(y_n, x^*), \forall\, n \ge 0.$$

这样，由引理 2 可知：递归序列(2)的唯一正平衡点 $\bar{x} = 1$ 是全局渐近稳定的。同理可证递归序列(1)的唯一正平衡点 $\bar{x} = 1$ 也是全局渐近稳定的。

参考文献 (References)

[1] Alaa. E. Hamza, R. Khalaf-Allah. On the recursive sequence $x_{n+1} = \dfrac{A\prod_{i=l}^{K} x_{n-2i-1}}{B + C\prod_{i=l}^{n-1} x_{n-2i}}$ Comput. Math. Appl, 2008, 56(7): 1726-1731.

[2] T. Nesemann. Positive nonlinear difference equations: Some results and applications . Nonlinear Anal, 2001, 47(7): 4707-4717.

[3] G. Papaschinopoulos, C. J. Schinas. Global asymptotic stability and oscillation of a family of difference equations. J. Math. Anal. Appl, 2004, 294(2): 614-620.

[4] Xianyi Li. Global behavior for a fourth-order rational difference equation. J. Math. Anal. Appl, 2005, 312(2): 555-563.

[5] Xianyi Li. Qualitative properties for a fourth-order rational difference equation. J. Math. Anal. Appl, 2005, 311(1): 103-111.

[6] A. M. Amleh, N. Kruse, G. Ladas. On a class of difference equations with strong negative feedback. J. Differ. Equa. Appl, 1999, 5(4): 497-515.

[7] A. C. Thompson. On certain contraction mappings in a partially ordered vector space. Proc. Amer. Math. Soc, 1963, 14(3):

438-443.
[8] U. Krause, R. D. Nussbaum. A limit set trichotomy for self-mappings of normal cones in Banach spaces. Nonlinear Anal, 1993, 20(7): 855-870.
[9] N. Kruse, T. Nesemann. Global asymptotic stability in some discrete dynamical systems. J. Math. Anal. Appl, 1999, 235(1): 151-158.
[10] 何万生, 胡林霞, 李万同. Global attractivity in a higher order nonlinear difference equaiton[J]. 纯粹数学与应用数学, 2004, 20(3): 213-218.
[11] 杨逢建, 邹静晔, 贺铁山. 具有可变时滞的非线性非自治差分方程的线性化全局渐近稳定性及其应用[J]. 纯粹数学与应用数学, 2006, 22(2): 210-215, 231.