Pure Mathematics 理论数学, 2011, 1, 60-63
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2011.12013 Published Online July 2011 (http://www.hanspub.org/journal/pm/)

The Bound on Edge Domination Numbers of Graphs

Jingjing Chen[1], **Chunxiang Wang**[2]
[1]International Business Economic College of Wuhan Textile University, Wuhan
[2]School of Mathematics and Statistics, Huazhong Normal University, Wuhan
Email: wcxiang@mail.ccnu.edu.cn
Received Mar. 18th, 2011; revised May 4th, 2011; accepted May 6th 2011.

Abstract: Let G be a graph without isolated vertices. A function $f: E(G) \to \{-1, 1\}$ is called the signed edge domination function (SEDF) of G if $\sum_{e' \in N[e]} f(e') \ge 1$ for every edge $e \in E(G)$. The signed edge domination number $\gamma_s'(G) = \min\{\sum_{e \in E(G)} f(e) \mid f$ is an SEDF of $G\}$. A function $f: E(G) \to \{-1, 1\}$ is called the signed star domination function (SSDF) of G if $\sum_{e \in E(v)} f(e) \ge 1$ for every vertex $v \in V(G)$. The signed star domination number $\gamma_{ss}'(G) = \min\{\sum_{e \in E(G)} f(e) \mid f$ is an SSDF of $G\}$.We prove that for any planar graph G of order n, $\gamma_s'(G) \le n-1$. And we apply the property: If G is a connected cubic graph of order n, then $\beta'(G) \ge \frac{7}{16}n$, then we obtain that: For any cubic graph G of order n ($n \ge 1$), $\gamma_s'(G) \le \frac{5}{8}n$. Finally for any 4-regular graph G of order n, $\gamma_{ss}'(G) \ge n+1$ if n is odd and $\gamma_{ss}'(G) \ge n$ if n is even.

Keywords: Bound; Edge Domination Numbers; Cubic Graph

图的边控数的界

陈晶晶[1]，**王春香**[2]
[1]武汉纺织大学外经贸学院，武汉
[2]武汉华中师范大学，武汉
Email: wcxiang@mail.ccnu.edu.cn
收稿日期：2011 年 3 月 18 日；修回日期：2011 年 5 月 4 日；录用日期：2011 年 5 月 6 日

摘　要：令 G 是一个没有孤立点的图。函数 $f: E(G) \to \{-1,1\}$，如果对每条边 $e \in E(G)$，$\sum_{e' \in N[e]} f(e') \ge 1$，则 f 称为符号控制函数。$\gamma_s'(G) = \min\{\sum_{e \in E(G)} f(e) \mid f$ 是 G 的符号边控制函数$\}$ 称为符号控制数。函数 $f: E(G) \to \{-1,1\}$，如果对每个点 $v \in V(G)$，$\sum_{e \in E(v)} f(e) \ge 1$，则称 f 为符号星控制函数。符号星控制函数记为 $\gamma_{ss}'(G) = \min\{\sum_{e \in E(G)} f(e) \mid f$ 是 G 的符号星控制函数$\}$。我们利用平面图的特性得到：对任何 n 阶平面图 G 有 $\gamma_s'(G) \le n-1, (n \ge 1)$。同时利用连通 3-正则图中 $\beta'(G) \ge \frac{7}{16}n$ 得到：如果 G 是 n 点连通的 3-正则图（$n \ge 1$），则 $\gamma_s'(G) \le \frac{5}{8}n$。最后，对任何 4-正则图 G 有 n 点，如果 n 是奇数，则 $\gamma_{ss}'(G) \ge n+1$；如果 n 是偶数，则 $\gamma_{ss}'(G) \ge n$。

关键词：界；边控数；3-正则图

1. 引入

本文讨论有限、无向、简单图(无环、无重边)。在以下论文中若没有出现的记号和术语我们采用文献[1]中的记号和术语。$V(G)$和 $E(G)$分别表示图 G 的点集合和边集合。如果 $xy \in E(G)$，则称 x 和 y 相邻。对于 G 的子图 H，$N_H(x)$ 表示 x 在 H 中的邻点集合，且 $d_H(x) = |N_H(x)|$ 表示 x 在 H 中的度。如果上下文不发生混淆，$N(x)$ 和 $d(x)$ 分别代替 $N_H(x)$ 和 $d_H(x)$。

在图 G 中剖分一条边 $e=xy$ 是指在 G 中加入一个新点 v，令 $G'=G-e+vx+vy$，我们称是 G' 通过剖分边 e 得到的图。对于 $A,B\subseteq V(G)$，$E(A, B)$表示一个端点在 A 中另一个端点在 B 中的边的集合。令 $e(A, B)=|E(A, B)|$. 令 $e(G)$表示图 G 中的边数。当 $A=\{a\}$，$e(a, B)(=d_B(a))=e(A, B)$。对于 $e=uv\in E(G)$，$N_G(e)=\{e'\in E(G)\mid e'$ 和 e 有一个公共的端点$\}$称为 e 在图 G 中的边的边邻域。$N_G[e]=N_G(e)\cup\{e\}$ 称为 e 在图 G 中的闭的边邻域。如果 $v\in V(G)$，则 $E_G(v)=\{uv\in E(G)\mid v\in V(G)\}$ 称为 e 在图 G 中的开边邻域。$N_G[e]$ 和 $E_G(v)$ 分别简记为 $N[e]$ 和 $E(v)$。

令图 $G=(V,E)$，$M\subseteq E$，如果 M 中任何两条边不相邻，则称 M 为图 G 的匹配。如果点 v 关联匹配 M 中某个边，则称匹配 M 饱和点 v，或点 v 被 M-饱和，否则 v 称为 M-不饱和点。如果 G 中所有点都是 M-饱和的，则匹配 M 称为完美匹配。如果 G 中没有匹配 M' 使得 $|M'|>|M|$, 则 M 称为图 G 的最大匹配。记 $\beta'(G)$ 为图 G 中最大匹配 M 中的边数。

定义 1 [2]令 G 是一个图，函数 $f:E(G)\rightarrow\{-1,1\}$, 如果对每条边 $e\in E(G)$，$\sum_{e'\in N[e]} f(e')\ge 1$，则 f 称为符号控制函数。$\gamma_s'(G)=\min\{\sum_{e\in N[e]} f(e)\mid f$ 是 G 的符号边控制函数$\}$ 称为图 G 的符号控制数。

定义 2 [3] 令 G 是一个没有孤立点的图。函数 $f:E(G)\rightarrow\{-1,1\}$, 如果对每个点 $v\in V(G)$，$\sum_{e\in E(v)} f(e)\ge 1$，则称 f 为符号星控制函数。符号星控制函数记为 $\gamma_{ss}'(G)=\min\{\sum_{e\in E(G)} f(e)\mid f$ 是 G 的符号星控制函数$\}$。

在文献[3]中，Baogen Xu 提出下列猜想：

猜想 G 是 n 点图($n\ge 1$)有 $\gamma_s'(G)\le n-1$。

在这篇文章中，我们证明这个猜想对于平面图和 3-正则图是成立的。

2. 主要结论

引理 1 令 T 是 n 点树，则它的任何符号边控制函数 f 都满足 $\sum_{e\in E(T)} f(e)\le n-1$。

证明 我们定义树 T 的函数，$f:E(T)\rightarrow\{-1,1\}$, 令 $f(e)=1,\ e\in E(T)$，显然 f 是 T 的符号边控制函数且 $\sum_{e\in E(T)} f(e)=n-1$。因此，对 T 的任何符号边控制函数 f 有 $\sum_{e\in E(T)} f(e)\le n-1$。

定理 2 任何 n 点平面图 G, 有不等式 $\gamma_s'(G)\le n-1$ 成立。

证明 不失一般性，假定 G 连通。否则我们考虑 G 的每个连通分支。令 G 有 φ 个面。如果 $\varphi=1$，由引理 1，结论显然成立。下面设 $\varphi\ge 2$。令 $\{f_0,f_1,\cdots,f_{\varphi-1}\}$ 是一个面的序列满足 f_i 和 $f_{i+1}(i=0,1,\cdots,\varphi-2,\varphi-1)$ 有公共边 $e_i(i=0,1,\cdots,\varphi-2,\varphi-1)$，其中 $e_{\varphi-1}$ 是 f_0 和 $f_{\varphi-1}$ 的公共边。如果 $\varphi-1$ 是偶数，令 $C=\{e_j\}_{j=1,3,\cdots,\varphi-2.}$ 如果 $\varphi-1$ 是奇数，令 $C=\{e_j\}_{j=1,3,\cdots,\varphi-1.}$ 显然 $|C|\ge\frac{\varphi-1}{2}$。

定义函数 $f:E(G)\rightarrow\{-1,1\}$, 令 $f(e)=-1,\ e\in C$ 和 $f(e')=1,\ e'\in E(G)\setminus C$.对任何点 $v\in V(G)$，令 $E^+(v)=\{e\mid f(e)=1,\ e\in E(G)\}$ 和 $E^-(v)=\{e\mid f(e)=-1,\ e\in E(G)\}$。既然任何一个面至多有一条边赋–1，因此对任何点 $v\in V(G)$，则有 $|E^+(v)|\ge|E^-(v)|$。从而对任何一条赋–1 的边，有 $\sum_{e\in N[e]} f(e)\ge 1$ 成立，对任何赋 1 的边，有 $\sum_{e\in N[e]} f(e)\ge 1$ 成立。因此 f 是 G 的符号边控制函数。故 $\gamma_s'(G)\le e(G)-2|C|\le e(G)-\phi+1$ 既然 G 是平面图，由欧拉公式有 $n-e(G)+\varphi=2$.故 $\gamma_s'(G)\le n-1$。

引理 3 [4] 如果 G 是 n 点连通的 3-正则图，则 $\beta'(G)\ge\frac{7}{16}n$。

定理 4 如果 G 是 n 点连通的 3-正则图($n\ge 1$)，则 $\gamma_s'(G)\le\frac{5}{8}n$。

证明 令 M 是 G 的极大匹配。由引理 3，$|M|\ge\frac{7}{16}n$。定义 G 的函数 $f:E(G)\rightarrow\{-1,1\}$, 令 $f(e)=-1,\ e\in M$ 和 $f(e')=1,\ e'\in E(G)\setminus M$。如果 $e\in M$，则 $\sum_{e''\in N[e]} f(e'')=4-1=3\ge 1$。如果 $e\in E(G)\setminus M$，则 $\sum_{e''\in N[e]} f(e'')\ge 3-2=1$。因此，$f$ 是 G 的符号边控制函数。既然 G 是 3-正则图，故 $e(G)=\frac{1}{2}\sum_{x\in V(G)}(d(x))=\frac{3}{2}n$。

从而 $\gamma_s'(G)\le\frac{3}{2}n-2\times\frac{7}{16}n=\frac{5}{8}n$。

引理 5 每一个 2-边连通的 3-正则图有完美匹配。

定理 6 如果 G 是 n 阶 3-正则图($n\ge 1$)且至多一条割边，则 $\gamma_s'(G)\le\frac{1}{2}n$。

证明 分下列两种情形：

情形 1. G 有完美匹配 P。

定义 G 的函数 $f:E(G)\to\{-1,1\}$，令 $f(e)=-1,\ e\in P$ 和 $f(e')=1,\ e'\in E(G)\setminus P$。如果 $e\in P$，则 $\sum_{e''\in N[e]}f(e'')=4-1=3\ge 1$。如果 $e\in E(G)\setminus P$，则 $\sum_{e''\in N[e]}f(e'')\ge 3-2=1$。因此，$f$ 是 G 的符号边控制函数。从而

$$\gamma_s'(G)\le\frac{3}{2}n-2\times\frac{1}{2}n=\frac{1}{2}n$$

情形 2. G 没有完美匹配。

由引理 5，G 有割边，设割边 $e=xy$，由条件知，图 G 割边唯一。令 $N(x)=\{x_1,x_2,y\}$ 和 $N(y)=\{y_1,y_2,x\}$。用 $\{x_2y,xy_1\}$ 取代 $N(e)$ 中边 $\{x_2x,y_1y\}$ 使得所得图 G' 是 3-正则的 2-边连通图。则 G' 完美匹配 P'。定义 G' 的符号边控制函数 $f':E(G')\to\{-1,1\}$，令 $f'(e)=-1,e\in P'$ 和 $f'(e')=1,e'\in E(G')\setminus P'$，则得到 G 的一个函数 $f:E(G)\to\{-1,1\}$，令 $f(e)=f'(e)$ $e\in E(G)\setminus\{x_2x,y_1y\}$ 和 $f(xx_2)=f'(x_2y)$，$f(yy_1)=f'(xy_1)$。既然 G' 是 3-正则的 2-边连通图，因此 G' 有完美匹配 P'，由情形 1 知，$\gamma_s'(G')\le\frac{3}{2}n-2\times\frac{1}{2}n=\frac{1}{2}n$。既然 $\sum_{e\in E(G)}f(e)=\sum_{e\in E(G')}f'(e)\le\frac{n}{2}$，故我们只需证明 f 是 G 的符号边控制函数。

断言 f 是 G 的符号边控制函数。

证明：分三种情形：

子情形 2.1 xy_1，yy_2 (或 xx_1，x_2y)属于 P'。

从上面的运算可知，$f(uv)=f'(uv)$ 对所有的边 $uv\in E(G)-N[e]$，且 $f(xx_1)=f(x_2x)=f(x_2x)=1$，$f(yy_1)=f(yy_2)=-1$。当 $e\in P'-\{xy_1,yy_1\}\subseteq E(G)$ 时，则 $\sum_{e''\in N[e]}f(e'')=3-2=1$。$f(N[xy])=3-2=1$，$f(N[x_1x])=f(N[x_2x])=4-1=3\ge 1$，$f(N[yy_1])=f(N[yy_2])=3-2=1$。因此 f 是 G 的符号边控制函数。

子情形 2.2 xx_1，yy_2 (或 xy_1，x_2y)属于 P'。

由上面的运算，$f(xx_1)=f(yy_2)=-1$，$f(x_2x)=f(xy)=f(yy_1)=1$，$f(uv)=f'(uv)$，对所有的边 $uv\in E(G)-N[e]$。令 $M=\{uv\in E(G):f(uv)=-1\}$，则 M 是 G 的完美匹配，这与情形 2 中 G 没有完美匹配相矛盾。

子情形 2.3 xy 属于 P'。

从上面的运算可知，$f(xx_1)=f(yy_2)=f(yy_1)=f(x_2x)=1$，$f(xy)=-1$，$f(uv)=f'(uv)$，对 $uv\in E(G)-N[e]$。令 $M=\{uv\in E(G):f(uv)=-1\}$，则 M 是 G 的完美匹配，这与情形 2 中 G 没有完美匹配相矛盾。

从上面的断言可知，f 是 G 的符号边控制函数。因此 $\gamma_s'(G)\le\frac{1}{2}n$。

如果 G' 是通过剖分边 e,e' 得到的图，剖分点记为 x 和 x'，且 $d_{G'}(x,x')=k$，则我们称两条边 e,e' 的距离为 $d_G(e,e')=k-1$。

推论 7 对于 n 点（$n\ge 1$) 3-正则图 G，如果任何两条边 e 和 e' 满足 $d(e,e')\ge 5$ 则 $\gamma_s'(G)\le\frac{1}{2}n$。

定理 8 对于 n 点（$n\ge 1$) k-正则图 G，有不等式 $\gamma_s'(G)\ge\frac{k}{4k-2}n$ 成立。

证明 令 f 是 G 的符号边控制函数。对任何边 $e=uv$，既然 $\sum_{e'\in N[e]}f(e')\ge 1$，则在 e 的闭邻域中至多 $\left\lfloor\frac{d(u)+d(v)}{2}\right\rfloor-1=k-1$ 条边赋值为–1。如果我们记数所有边的闭邻域，则赋值为–1 的边至多出现 $\frac{nk}{2}(k-1)$ 次。但是，赋值为–1 的边重复记数为 $2k-1$ 次，因此至多 $\frac{nk(k-1)}{2(2k-1)}$ 条边赋值为–1，故

$$\gamma_s'(G)\ge\frac{nk}{2}-2\frac{nk(k-1)}{2(2k-1)}=\frac{kn}{4k-2}$$

推论 9 对于 n 点 3-正则图 G，有 $\gamma_s'(G)\ge\frac{3}{10}n$。

引理 10 [3] 任何 n 点图满足 $\delta(G)\ge 1$, 有 $\gamma_{ss}'(G)\ge\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$。

定理 11 对 n 点 3-正则图 G，如果 G 有完美匹配，则有 $\gamma_{ss}'(G)=\frac{n}{2}$。

定理 12 对 n 点 4-正则图 G，如果 n 是奇数，有 $\gamma_{ss}'(G)\ge n+1$；如果 n 是偶数 $\gamma_{ss}'(G)\ge n$。

证明 既然 $d(v)=4$，对所有点 $v\in V(G)$，与 v 相邻的边中至多一条边赋值为–1。既然一条边相邻两个点，则至多 $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ 条边赋值为–1，因此，

$$\gamma_{ss}'(G)\ge 2n-2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor,$$

即：如果 n 是奇数，有 $\gamma'_{ss}(G) \geq n+1$；如果 n 是偶数 $\gamma'_{ss}(G) \geq n$ 。

参考文献 (References)

[1] J. A. Bondy, U. S. R. Murty. Graph theory with applications. Waltham: Academic Press, 1976.
[2] B. Xu. On signed edge domination numbers of graphs. Discrete Mathematics, 2001, 239(1-3): 179-189.
[3] B. Xu. On edge domination numbers of graphs. Discrete Mathematics, 2005, 294(3): 311-316.
[4] A. M. Hobbs, E. Schmeichel. On the maximum number of independent edges in cubic graphs. Discrete Mathematics, 1982, 42: 317-320.