*Pure Mathematics* 理论数学, 2011, 1, 163-166
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2011.12032 Published Online July 2011 (http://www.hanspub.org/journal/pm/)

# New Exact Analytic Solutions to a Coupled KdV Equations with Variable Coefficients*

**Baojian Hong**
Department of Basic Courses, Nanjing Institute of Technology, Nanjing
Email: hongbaojian@163.com
Received: Mar. 14th, 2011; revised: Apr. 26th, 2011; accepted: Apr. 28th, 2011.

**Abstract:** Based on the homogeneous balance principle and general variable separation approach, with the aid of two generalized Riccati equations and Mathematica software, we first find some exact analytic solutions to a coupled KdV equations with variable coefficients, including several kinds of soliton-like solutions, periodical-like solutions and solitary wave solutions with variable speed. Some of them are found for the first time.

**Keywords:** Coupled KdV Equations with Variable Coefficients; Exact Analytic Solutions; Riccati Equations; Solitary Wave Solutions with Variable Speed

# 一类变系数组合 KdV 方程新的精确解析解*

**洪宝剑**
南京工程学院基础部，南京
Email: hongbaojian@163.com
收稿日期：2011 年 3 月 14 日；修回日期：2011 年 4 月 26 日；录用日期：2011 年 4 月 28 日

**摘　要：**在齐次平衡法和分离变量的基础上，通过两个推广的 Riccati 方程，借助 Mathematica 软件，求出了一类变系数组合 KdV 方程的一些精确解析解，包括各种类孤立子解、类周期解和变速孤立波解，部分解为首次发现。

**关键词：**变系数组合 KdV 方程；精确解析解；Riccati 方程；变速孤立波

## 1. 引言

非线性发展方程的求解是广大物理学、力学、地球科学、生命科学、应用数学、和工程技术工作者研究的一个重要课题，多年来众多科学家为此做了大量的工作。常系数非线性方程只能近似地反映实际物质运动变化规律，而变系数非线性方程却能更加准确地描述物质的属性，因此研究变系数非线性方程的精确解显得十分重要，近年来，人们已经发现了一些有效的求解方法，如：反散射法[1]、Backlund 变换法[2]、Darboux 变换法[3]、Jacobi 椭圆函数法[4]等等[5,6]。本文运用两个推广形式的 Riccati 方程组[7-8]求解一类变系数组合 KdV 方程

$$\begin{cases} u_t+\alpha(t)uu_x+\beta(t)vv_x+\gamma(t)u_{xxx}=0 \\ v_t+\delta(t)uv_x+\gamma(t)v_{xxx}=0 \end{cases} \tag{1}$$

*基金项目：南京工程学院重点科研基金资助项目(QKJA2010011)。

方程(1)是 Hirota-Satsuma 组合 KdV 方程[9]的推广，当 $v=v(x,t)=0$ 时，(1)转化为变系数 KdV 方程[10-11]，文献[12]利用 $F$ 展开法研究了方程(1)的 Jacobi 椭圆函数解。本文将利用两个推广的 Riccati 方程研究(1)的精确解，得到了许多新的结果。

## 2. 推广的 Riccati 方程法

对非线性发展方程：

$$P(u,u_t,u_x,uu_x,u_{xt},u_{xx},u_{xxx},\cdots)=0 \tag{2}$$

我们寻求如下形式的解：

$$u(x,t)=\sum_{i=0}^{n}a_i f^i(\xi)+\sum_{j=1}^{n}b_j f^{j-1}(\xi)g(\xi) \tag{3}$$

其中 $a_0=a_0(t),a_i=a_i(t),b_j=b_j(t)$，$(i、j=1,2,\cdots,n)$，$\xi=\xi(x,t)$ 均是关于相应变元的任意函数，$n$ 是待定常数，它可以通过平衡最高阶导数项和非线性项确定，

 

而 $f(\xi)$、$g(\xi)$ 满足如下投影 Riccati 方程组：

(1) $f'(\xi)=-qf(\xi)g(\xi), g'(\xi)=q\left[1-g^2(\xi)-rf(\xi)\right],$

$$g^2(\xi)=1-2rf(\xi)+\left(r^2+\varepsilon\right)f^2(\xi) \tag{4}$$

这里 ' 表示 $\frac{d}{\mathrm{d}\xi}$，$r$、$q$ 为任何实数，$\varepsilon=\pm1$，后面雷同，方程组(4)有下列解：

$$f_1(\xi)=\frac{a}{b\cosh(q\xi)+c\sinh(q\xi)+ar},$$

$$g_1(\xi)=\frac{b\sinh(q\xi)+c\cosh(q\xi)}{b\cosh(q\xi)+c\sinh(q\xi)+ar} \tag{5}$$

其中 $a,b,c$ 满足条件：当 $\varepsilon=1$ 时 $c^2=a^2+b^2$，当 $\varepsilon=-1$ 时 $b^2=a^2+c^2$。

(2) $f'(\xi)=qf(\xi)g(\xi), g'(\xi)=q\left[1+g^2(\xi)-rf(\xi)\right],$

$$g^2(\xi)=-1+2rf(\xi)+\left(1-r^2\right)f^2(\xi) \tag{6}$$

方程组(6)有下列解：

$$f_2(\xi)=\frac{a}{b\cos(q\xi)+c\sin(q\xi)+ar},$$

$$g_2(\xi)=\frac{b\sin(q\xi)-c\cos(q\xi)}{b\cos(q\xi)+c\sin(q\xi)+ar} \tag{7}$$

其中 $a,b,c$ 满足条件： $a^2=b^2+c^2$。

将(3)，(4)和(3)，(6)分别代入(1)并令 $f^i(\xi)g^j(\xi)$ 系数为零 $(i=1,2,\cdots;\ j=0,1,\cdots)$，可得一关于所有待定系数的非线性代数方程组(NAEs)，借助 Mathematica 软件求解该 NAEs 便可由(5)(7)得(1)的精确解。

## 3. 方程(1)的精确解

由齐次平衡原则可设

$$u(\xi)=a_0+a_1f(\xi)+a_2f^2(\xi)+a_3f(\xi)g(\xi)+a_4g(\xi) \tag{8}$$

$$v(\xi)=b_0+b_1f(\xi)+b_2f^2(\xi)+b_3f(\xi)g(\xi)+b_4g(\xi) \tag{9}$$

其中 $\xi=\xi(x,t)=kx+\omega(t)+\xi_0$，$\omega(t)$，$k,a_i,b_i$ $(i=1,2,3,4)$ 待定，$\xi_0$ 为任意常数。

**情形 1**

将(4)(8)(9)代入(1)并令 $f^i(\xi)g^j(\xi)$ $(i=1,2,\cdots;\ j=0,1)$ 系数为零，得一关于 $a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,b_0,b_1,b_2,b_3,b_4,k,\omega(t)$ 的代数方程组，借助 mathematica 和吴消元法可得解：

(1) $\alpha(t)=c_1\delta(t),\beta(t)=c_2\delta(t),\gamma(t)=c_3\delta(t)$

$$\begin{gathered}a_1=a_3=a_4=0,b_1=b_3=b_4=0,r=0,\varepsilon=\pm1,\omega=-\left(a_0k+4k^3q^2c_3\right)\int\delta(t)\mathrm{d}t\\ a_2=-12\varepsilon k^2q^2c_3,b_2=\mp12\varepsilon k^2q^2c_3\sqrt{\frac{1-c_1}{c_2}},b_0=\pm\frac{a_0+a_0c_1-16k^2q^2c_3}{\sqrt{c_2-c_1c_2}}\end{gathered} \tag{10}$$

其中 $c_2-c_1c_2\neq0$，$c_1,c_2,c_3,k,q,a_0$ 均为任意常数，后面雷同。

(2) $\gamma(t)=c_3\delta(t),\alpha(t)=c_1\delta(t)+c_2\beta(t)$

$$\begin{gathered}a_2=a_3=a_4=0,b_2=b_3=b_4=0,r=\pm\sqrt{-\varepsilon},\varepsilon=\pm1,\omega=-\left(a_0k+k^3q^2c_3\right)\int\delta(t)\mathrm{d}t\\ a_1=\pm6k^2q^2c_3\sqrt{-\varepsilon},b_1=\pm6k^2q^2c_3\sqrt{\frac{\delta(t)-c_1\delta(t)-c_2\beta(t)}{-\varepsilon\beta(t)}},b_0=\pm a_0\sqrt{\frac{\delta(t)-c_1\delta(t)-c_2\beta(t)}{\beta(t)}}\end{gathered} \tag{11}$$

由(5)(8)(9)(10)和(5)(8)(9)(11)我们可以得到下列解

$$u_1(\xi_1)=a_0+\frac{-12\varepsilon k^2q^2c_3a^2}{\left[b\cosh(q\xi_1)+c\sinh(q\xi_1)\right]^2},$$

$$v_1(\xi_1)=\pm\frac{a_0+a_0c_1-16k^2q^2c_3}{\sqrt{c_2-c_1c_2}}\mp\frac{12\varepsilon k^2q^2a^2c_3}{\left[b\cosh(q\xi_1)+c\sinh(q\xi_1)\right]^2}\sqrt{\frac{1-c_1}{c_2}}$$

$$\xi_1=\xi_1(x,t)=kx-\left(a_0k+4k^3q^2c_3\right)\int\delta(t)\mathrm{d}t+\xi_0$$

$$u_2(\xi)=a_0\pm\frac{6k^2q^2c_3\sqrt{-\varepsilon}}{b\cosh(q\xi_2)+c\sinh(q\xi_2)\pm a\sqrt{-\varepsilon}},$$

$$v_2(\xi_2)=\pm a_0\sqrt{\frac{\delta(t)-c_1\delta(t)-c_2\beta(t)}{\beta(t)}}\pm\frac{6k^2q^2c_3a\sqrt{\frac{\delta(t)-c_1\delta(t)-c_2\beta(t)}{-\varepsilon\beta(t)}}}{b\cosh(q\xi_2)+c\sinh(q\xi_2)\pm a\sqrt{-\varepsilon}}$$

其中 $\xi_2=\xi_2(x,t)=kx-\left(a_0k+k^3q^2c_3\right)\int\delta(t)\mathrm{d}t+\xi_0$

**情形 2**

同理将(6)、(8)(9)代入(1)并令 $f^i(\xi)g^j(\xi)\ (i=1,2,\cdots;\ j=0,1)$ 系数为零，得一关于 $a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,b_0,b_1,\ b_2,b_3,b_4,k,\omega(t)$ 的代数方程组，借助 mathematica 和吴消元法可得解：

(3) $\alpha(t)=c_1\delta(t),\beta(t)=c_2\delta(t),\gamma(t)=c_3\delta(t)$

$$a_1=a_3=a_4=0,b_1=b_3=b_4=0,r=0,\omega=\left(-a_0k+4k^3q^2c_3\right)\int\delta(t)\mathrm{d}t$$
$$a_2=12k^2q^2c_3,b_2=\mp12k^2q^2c_3\sqrt{\frac{-1-c_1}{c_2}},b_0=\pm\frac{-a_0+a_0c_1}{\sqrt{-c_2-c_1c_2}} \tag{12}$$

(4) $\gamma(t)=c_3\delta(t),\beta(t)=c_1\delta(t)+c_2\alpha(t)$

$$a_2=a_3=a_4=0,b_2=b_3=b_4=0,r=\pm1,\omega=\left(-a_0k+k^3q^2c_3\right)\int\delta(t)\mathrm{d}t$$
$$a_1=-6k^2q^2rc_3,b_1=\mp6k^2q^2rc_3\sqrt{\frac{-\alpha(t)+\delta(t)}{c_1\delta(t)+c_2\alpha(t)}},b_0=\pm a_0\sqrt{\frac{-\alpha(t)+\delta(t)}{c_1\delta(t)+c_2\alpha(t)}} \tag{13}$$

由(7)(8)(9)(12)和(7)(8)(9)(13)我们可以得到下列解

$$u_3(\xi_3)=a_0+\frac{12k^2q^2c_3a^2}{\left[b\cos(q\xi_3)+c\sin(q\xi_3)\right]^2},$$

$$v_3(\xi_3)=\pm\frac{-a_0+a_0c_1}{\sqrt{-c_2-c_1c_2}}\mp\frac{12k^2q^2a^2c_3\sqrt{\frac{-1-c_1}{c_2}}}{\left[b\cos(q\xi_3)+c\sin(q\xi_3)\right]^2}$$

$$\xi_3=\xi_3(x,t)=kx+\left(-a_0k+4k^3q^2c_3\right)\int\delta(t)\mathrm{d}t+\xi_0$$

$$u_4(\xi_4)=a_0-\frac{6k^2q^2rc_3a}{b\cos(q\xi_4)+c\sin(q\xi_4)+ar},$$

$$v_4(\xi_4)=\pm a_0\sqrt{\frac{-\alpha(t)+\delta(t)}{c_1\delta(t)+c_2\alpha(t)}}\mp\frac{6k^2q^2rac_3\sqrt{\frac{-\alpha(t)+\delta(t)}{c_1\delta(t)+c_2\alpha(t)}}}{b\cos(q\xi_4)+c\sin(q\xi_4)+ar}$$

$$\xi_4=\xi_4(x,t)=kx+\left(-a_0k+k^3q^2c_3\right)\int\delta(t)\mathrm{d}t+\xi_0$$

若在 $u_1,v_1$ 和 $u_3,v_3$ 中取 $c=0,b=a$ 或 $b=0,c=a$，我们可以得到类钟型孤子解、类奇异孤立波解和类周期解：

$$u_{11}(\xi_{11})=a_0-12\varepsilon k^2q^2c_3\,\mathrm{sech}^2(q\xi_{11}),$$

$$v_{11}(\xi_{11})=\pm\frac{a_0+a_0c_1-16k^2q^2c_3}{\sqrt{c_2-c_1c_2}}\mp12\varepsilon k^2q^2c_3\sqrt{\frac{1-c_1}{c_2}}\,\mathrm{sech}^2(q\xi_{11})$$

$$u_{12}(\xi_{12})=a_0-12\varepsilon k^2q^2c_3\,\mathrm{csch}^2(q\xi_{12}),$$

$$v_{12}(\xi_{12})=\pm\frac{a_0+a_0c_1-16k^2q^2c_3}{\sqrt{c_2-c_1c_2}}\mp12\varepsilon k^2q^2c_3\sqrt{\frac{1-c_1}{c_2}}\,\mathrm{csch}^2(q\xi_{12})$$

 

$$u_{31}(\xi_{31}) = a_0 + 12k^2q^2c_3\sec^2(q\xi_{31}),$$

$$v_{31}(\xi_{31}) = \pm\frac{-a_0 + a_0c_1}{\sqrt{-c_2 - c_1c_2}} \mp 12k^2q^2c_3\sqrt{\frac{-1-c_1}{c_2}}\sec^2(q\xi_{31})$$

$$u_{32}(\xi_{32}) = a_0 + 12k^2q^2c_3\csc^2(q\xi_{32}),$$

$$v_{32}(\xi_{32}) = \pm\frac{-a_0 + a_0c_1}{\sqrt{-c_2 - c_1c_2}} \mp 12k^2q^2c_3\sqrt{\frac{-1-c_1}{c_2}}\csc^2(q\xi_{32})$$

其中 $\xi_{11} = \xi_{12} = kx - (a_0k + 4k^3q^2c_3)\int\delta(t)\mathrm{d}t + \xi_0$，

$\xi_{31} = \xi_{32} = kx - (a_0k - 4k^3q^2c_3)\int\delta(t)\mathrm{d}t + \xi_0$

这里的波速是 $t$ 的函数，随 $t$ 的改变而改变。

**注记：**解 $u_{11}, v_{11}, u_{31}, v_{31}$ 包含文献[12]中的解(3.25)(3.26)(3.31)(3.32)，若选择 $a, b, c$ 不同的取值，我们可以得到方程(1)其他新的精确解，据我们所知，这里的四组解是新的。

## 4. 结论

本文运用两个推广的 Riccati 方程组，求解一类变系数组合 KdV 方程，得到了该方程的一些精确解析解，包括类孤立波解，类周期解和变速孤立波解。实践证明这种方法可以适用于许多其它非线性方程，如何将该方法推广到具高次非线性耦合及离散方程，还值得进一步研究。

## 参考文献 (References)


[1] M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson. Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering. New York: Cambridge University Press, 1991.

[2] D. C. Lu, B. J. Hong, and L. X. Tian. Backlund transformation and *n*-soliton-like solutions to the combined KdV-Burgers equation with variable coefficients. International Journal of Nonlinear Science, 2006, 2(1): 3-10.

[3] V. B. Matveev, M. A. Salle. Darbooux transformation and soliton. Berlin: Springer, 1991.

[4] B. J. Hong. New Jacobi elliptic functions solutions for the variable-coefficient mKdV equation. Applied Mathematics and Computation, 2009, 215(8): 2908-2913.

[5] E. G. Fan. Two new applications of the homogeneous balance method. Physics Letters A, 2000, 265(5-6): 353-357.

[6] D. C. Lu, B. J. Hong, and L. X. Tian. New explicit exact solutions for the generalized coupled Hirota-Satsuma kdv system. Computers & Mathematics with Applications, 2007, 53(8): 1181-1190.

[7] D. C. Lu, B. J. Hong. New exact solutions for the (2+1)-dimensional Generalized Broer-Kaup System. Applied Mathematics and Computation, 2008, 199(2): 572-580.

[8] D. C. Lu, B. J. Hong, and L. X. Tian. New Solitary wave and periodic wave solutions for general types of KdV and KdV-Burgers equations. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2009, 14(1): 77-84.

[9] R. Hirota, J. Satsuma. Soliton solutions of a coupled Korteweg-de Vries equation. Physics Letters A, 1981, 85(8-9): 407-415.

[10] M. L. Wang, Y. M. Wang. A new Backlund transformation and multi-soliton solutions to the KdV equation with general variable coefficients. Physics Letters A, 2001, 287(3-4): 211-216.

[11] E. G. Fan. Auto-Backlund transformation and similarity reductions for general variable coefficient KdV equations. Physics Letters A, 2002, 294(1): 26-30.

[12] Y. B. Zhou, M. L. Wang, and Y. M. Wang. Perodic wave solutions to a coupled Kdv equations with variable coefficients. Physics Letters A, 2003, 308(1): 31-36.


 