Pure Mathematics 理论数学, 2011, 1, 215-223
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2011.13041 Published Online October 2011 (http://www.hanspub.org/journal/pm/)

The Order and Zeros of the Solutions of the Differential Equation with Polynomial Coefficients

Peixiong Ding, Zongxuan Chen
School of Mathematical Sciences, South China Normal University, Guangzhou
Email: rongws14@126.com; chzx@vip.sina.com
Received: Jul. 26th, 2011; revised: Aug. 30th, 2011; accepted: Sep. 1st, 2011.

Abstract: This paper investigates the properties of solutions to a linear differential equation $f^{(k)} + A_{k-1} f^{(k-1)} + \cdots + A_0 f = 0$, whose coefficients A_j are polynomial. If A_s plays a main role and satisfy some particular conditions, we draw a conclusion that A_s make a compact connection with the solutions of this equation.

Keywords: Linear Differential Equation; Order; Linearly Independent

多项式系数的齐次微分方程解的级与零点

丁培雄，陈宗煊
华南师范大学数学科学学院，广州
Email: rongws14@126.com; chzx@vip.sina.com
收稿日期：2011 年 7 月 26 日；修回日期：2011 年 8 月 30 日；录用日期：2011 年 9 月 1 日

摘　要：本文研究的是齐次线性微分方程 $f^{(k)} + A_{k-1} f^{(k-1)} + \cdots + A_0 f = 0$ 的解的性质，其中系数 A_j 是多项式，A_s 起控制作用，在满足某些条件的情况下，我们得到了：该方程的若干个线性无关解的级与零点收敛指数跟 A_s 有紧密联系。

关键词：齐次线性微分方程；级；线性无关

1. 结论与说明

本文使用值分布理论的标准记号(见[1])，分别用 $\sigma(f)$ 和 $\lambda(f)$ 表示亚纯函数 f 的级和零点收敛指数。许多学者研究了以下齐次线性微分方程

$$f^{(k)} + A_{k-1} f^{(k-1)} + \cdots + A_0 f = 0, \tag{1}$$

后，得到了一些深刻有趣的结论，例如在文献[2]中陈述了如下结论。它由 S. Bank 和 J. Langley 所证明。

定理 A 设 $k \ge 2, A_0, \cdots, A_{k-1}$ 是整函数，满足对某 $s, 0 \le s \le k-2$,

(i) A_s 是超越的；

(ii) 对任一 $j > s$，或者 A_j 是多项式或者 $\sigma(A_j) < \sigma(A_s)$。则(a)对于方程(1)的任意 $s+2$ 个线性无关解 $f_1, \cdots, f_{s+2}$，存在 p 满足 $1 \le p \le s+2$，使得 f_p / f_1 是无穷级。(b)并且，如果 $\max\{\lambda(f_1), \lambda(f_2)\} < \infty$，则解 $f = af_1 + bf_p$ 满足 $\lambda(f) = \infty$，其中 a, b 均为非零常数。

根据这个定理，自然而然会提出这样的两个问题：(1) 既然在该定理的条件下 f_p / f_1 是无穷级，那么其超级

的值是多少，相应地，解 $f=af_1+bf_p$ 是否等于这个值；(2) 假如该方程的系数没有一个是超越整函数，全是多项式，也是 A_s 起控制作用，结论会怎样。

本文主要考虑的是第二个问题，并得到了相应的比较好的结论，如下：

定理 1.1 假如齐次线性微分方程(1)的系数 $A_0,A_1,\cdots,A_{k-1}(k\ge 2)$ 都是多项式，存在正整数 $s,0\le s\le k-2$，使得

$$\frac{\deg A_s}{k-s}>\max_{j\ne s}\left\{\frac{\deg A_j}{k-j}\right\},$$

则(a)对于方程的任意 $s+2$ 个非平凡线性无关解 $f_1,f_2,\cdots,f_{s+2}$，存在某正整数 $p,2\le p\le s+2$，使得

$$\sigma\left(\frac{f_p}{f_1}\right)=1+\frac{\deg A_s}{k-s}.$$

(b)更进一步如果 $\max\left\{\lambda(f_1),\lambda(f_p)\right\}<1+\dfrac{\deg A_s}{k-s}$，则解 $f=af_1+bf_p$ 满足

$$\lambda(f)=1+\frac{\deg A_s}{k-s}.$$

其中 a,b 是任意非零常数。

2. 必要的引理

证明中用到以下几个引理，在相关的值分布理论的书籍或线性微分方程的文章经常可见。利用类似于文献[3]中引理 2.2 的证明方法，可以证明本文的引理 2.1。

引理 2.1 设 $g(z)$ 是整函数，$\sigma(g)<\infty$，则存在无穷的对数测度的集 $D\subset(1,\infty)$ 使得

$$\lim_{\substack{r\to\infty\\ r\in D}}\frac{\log T(r,g)}{\log r}=\lim_{\substack{r\to\infty\\ r\in D}}\frac{\log\log M(r,g)}{\log r}=\lim_{\substack{r\to\infty\\ r\in D}}\frac{\log v(r,g)}{\log r}=\sigma(g),$$

其中 $v(r,g)$ 是 $g(z)$ 的中心指标。

引理 2.2 设 $F(r)$ 与 $G(r)$ 是 $(0,\infty)$ 中的非减函数。如果(i)在除去一个有限测度的 r 集外，$F(r)\le G(r)$，或(ii)当 $r\notin H\cup(0,1]$ 时，$F(r)\le G(r)$，其中 $H\subset(1,\infty)$ 是一对数测度有限的集合。则对任给常数 $\alpha>1$，存在 $r_0>0$ 当 $r>r_0$ 时有 $F(r)\le G(\alpha r)$。

引理 2.3[4] 设 $f(z)$ 是超越整函数，δ 是常数满足 $0<\delta<1/8$，z 是圆周 $|z|=r$ 上使得 $|f(z)|>M(r,f)v(r)^{-1/8+\delta}$ 的点，则除去对数测度有限的 r 值集外有

$$\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}=\left\{\frac{v(r)}{z}\right\}^k(1+\eta_k(z)),$$

其中 $\eta_k(z)=O\left\{v(r)^{-1/8+\delta}\right\}$，$k$ 为任一正整数。

引理 2.4[5] 设 $f(z)$ 是开平面上有限级 ρ 级超越亚纯函数，$\Gamma=\left\{(k_1,j_1),(k_2,j_2),\cdots,(k_m,j_m)\right\}$ 是由不同整数对组成的有限集，满足 $k_i>j_i\ge 0,i=1,\cdots,m$，又设 $\varepsilon>0$ 是给定的常数。则

(i) 存在零测度集 $E_1\subset[0,2\pi)$，使得如果 $\psi_0\in[0,2\pi)-E_1$，则存在常数 $R_0=R_0(\psi_0)>0$，对满足 $\arg z=\psi_0$ 及 $|z|\ge R_0$ 的所有 z 及所有 $(k,j)\in\Gamma$，都有

$$\left|f^{(k)}/f^{(j)}\right|\le|z|^{(k-j)(\rho-1+\varepsilon)}.$$

(ii) 存在对数测度为有限的集合 $E_2\subset(1,\infty)$，使得对满足 $|z|\notin E_2\cup[0,1]$ 的所有 z 及所有 $(k,j)\in\Gamma$，上式成立。

引理 2.5[6] 假如齐次线性微分方程(1)的系数 $A_0,A_1,\cdots,A_{k-1}$ 都是多项式，存在正整数 $s,1\le s\le k$，使得

$$\frac{\deg A_s}{k-s} > \max_{j\neq s}\left\{\frac{\deg A_j}{k-j}\right\},$$

则对于方程的任一非平凡解 f 有 $\sigma(f)\le 1+\dfrac{\deg A_s}{k-s}$.

3. 定理 1.1 的证明

证明：(a)由引理 2.5，方程(1)的解的级都小于等于 $\dfrac{\deg A_s}{k-s}+1$。假如定理的结论不成立，则对任意的 $p(2\le p\le k-2)$，只能有 $\sigma\left(\dfrac{f_p}{f_1}\right)<\dfrac{\deg A_s}{k-s}+1$。

记 $\beta=\dfrac{\deg A_s}{k-s}+1$，并定义

$$\alpha \triangleq \max\left\{\sigma\left(\frac{f_p}{f_1}\right),\frac{\deg A_j}{k-j}+1 \mid j\neq s, 2\le p\le s+2\right\},$$

则容易得到 $\alpha<\beta$。

以下分(I) (II) (III) 三部分证明：

(I) 做一系列的变换。

设 $f_1,f_2,\cdots,f_{s+2}$ 是方程(1)的 $s+2$ 个线性无关解，并对方程(1)做一系列变换：

首先，令 $v_1=(f/f_1)'$，代入方程(1)中，整理可得新方程

$$v_1^{(k-1)}+A_{1,k-2}v_1^{(k-2)}+\cdots+A_{1,0}v_1=0, \tag{2}$$

其中系数 $A_{1,j}(j=0,1,2,\cdots,k-2)$ 满足

$$A_{1,j}=A_{j+1}+C_{j+2}^1A_{j+2}\frac{f_{1'}}{f_1}+\cdots+C_{k-1}^{k-j-2}A_{k-1}\frac{f_1^{(k-j-2)}}{f_1}+C_k^{k-j-1}\frac{f_1^{(k-j-1)}}{f_1}, \tag{3}$$

且 $v_{1,1}=\left(\dfrac{f_2}{f_1}\right)',v_{1,2}=\left(\dfrac{f_3}{f_1}\right)',\cdots,v_{1,s+1}=\left(\dfrac{f_{s+2}}{f_1}\right)'$ 是方程(4)的 $s+1$ 个线性无关解。

继续令 $v_2=(v_1/v_{1,1})'$，并代入方程(2)整理得新方程

$$v_2^{(k-2)}+A_{2,k-3}v_2^{(k-3)}+\cdots+A_{2,0}v_2=0, \tag{4}$$

其中系数 $A_{2,j}(j=0,1,2,\cdots,k-3)$，满足

$$A_{2,j}=A_{1,j+1}+C_{j+2}^1A_{1,j+2}\frac{v_{1,1}'}{v_{1,1}}+\cdots+C_{k-2}^{k-j-3}A_{1,k-2}\frac{v_{1,1}^{(k-j-3)}}{v_{1,1}}+C_{k-1}^{k-j-2}\frac{v_{1,1}^{(k-j-2)}}{v_{1,1}}, \tag{5}$$

且 $v_{2,1}=\left(\dfrac{v_{1,2}}{v_{1,1}}\right)',v_{2,2}=\left(\dfrac{v_{1,3}}{v_{1,1}}\right)',\cdots,v_{2,s}=\left(\dfrac{v_{1,s+1}}{v_{1,1}}\right)'$ 是方程(4)的 s 个线性无关解。

一般地，重复以上步骤，当做到第 $m(m\le s)$ 次变换时得到方程

$$v_m^{(k-m)}+A_{m,k-m-1}v_m^{(k-m-1)}+\cdots+A_{m,0}v_m=0,$$

然后令 $v_{m+1}=(v_m/v_{m,1})'$，且代入该方程作第 $m+1$ 次变换得到新方程

$$v_{m+1}^{(k-m-1)}+A_{m+1,k-m-2}v_{m+1}^{(k-m-2)}+\cdots+A_{m+1,0}v_{m+1}=0, \tag{6}$$

其中系数 $A_{m+1,j}(j=0,1,2,\cdots,k-m-2)$ 满足

$$A_{m+1,j}=A_{m,j+1}+C_{j+2}^1A_{m,j+2}\frac{v_{m,1}'}{v_{m,1}}+\cdots+C_{k-m-1}^{k-m-j-2}A_{m,k-m-1}\frac{v_{m,1}^{(k-m-j-2)}}{v_{m,1}}+C_{k-m}^{k-m-j-1}\frac{v_{m,1}^{(k-m-j-1)}}{v_{m,1}}, \tag{7}$$

且 $v_{m+1,1}=\left(\dfrac{v_{m,2}}{v_{m,1}}\right)',\cdots,v_{m+1,s+1-m}=\left(\dfrac{v_{m,s+2-m}}{v_{m,1}}\right)'$ 是方程的 $s+1-m$ 个线性无关解。

(II) 对系数进行估计。

由 α 的定义，$\sigma\left(\frac{f_p}{f_1}\right)\le\alpha$，通过简单运算可知以上各方程(包括(2)(4)(6))的解 $v_{i,j}$ 也满足 $\sigma\left(v_{i,j}\right)\le\alpha$。根据引理 2.4，对任意的 $\varepsilon>0$，存在对数测度为有限的集合 $E_1\subset\left(1,\infty\right)$，使得对满足 $\left|z\right|=r\in\left(1,+\infty\right)-E_1$ 的所有 z 有

$$\sum_{t=1}^{s+1}\left|\frac{v_{t,1}^{(j)}}{v_{t,1}}\right|\le r^{j(\alpha-1+\varepsilon)},\ j=1,2,\cdots,k$$

为方便描述，记 $\delta=\alpha-1+\varepsilon$，则上式可写为

$$\sum_{t=1}^{s+1}\frac{v_{t,1}^{(j)}}{v_{t,1}}=O\left(r^{j\delta}\right),\ j=1,2,\cdots,k \tag{8}$$

在 $\left|z\right|=r\in\left(1,+\infty\right)-E_1$ 的所有 z 处，分别对方程(2)(4)(6)的一部分系数进行估计，分三部分(i)(ii)(iii)(值得一提的是,我们并不需要对每一个系数做估计，这跟用到的证明方法有关)：

(i)首先，对方程(2)的一部分系数进行估计。

根据 α 的定义，当 $j\ne s$ 时，$\deg A_j\le\left(k-j\right)\left(\alpha-1\right)$，所以 $\left|A_j\right|\le r^{(k-j)(\alpha-1+\varepsilon)},\ j\ne s$ 或

$$A_j=O\left(r^{(k-j)\delta}\right),\ j\ne s \tag{9}$$

于是根据(3)式，当 $j=s-1$ 时，

$$A_{1,s-1}=A_s+C_{s+1}^1A_{s+1}\frac{f_1'}{f_1}+\cdots+C_{k-1}^{k-s-1}A_{k-1}\frac{f_1^{(k-s-1)}}{f_1}+C_k^{k-s}\frac{f_1^{(k-s)}}{f_1},$$

将(9)式代入上式得

$$\begin{aligned}A_{1,s-1}&=A_s+O\left(r^{(k-s-1)\delta}\right)\frac{f_1'}{f_1}+\cdots+O\left(r^{\delta}\right)\frac{f_1^{(k-s-1)}}{f_1}+C_k^{k-s}\frac{f_1^{(k-s)}}{f_1}\\&=A_s+\sum_{p=1}^{k-s-1}O\left(r^{(k-s-p)\delta}\right)\frac{f_1^{(p)}}{f_1}+C_k^{k-s}\frac{f_1^{(k-s)}}{f_1}\\&=A_s+\sum_{p=0}^{k-s-1}O\left(r^{(k-s-p)\delta}\right)\frac{f_1^{(p)}}{f_1}+C_k^{k-s}\frac{f_1^{(k-s)}}{f_1},\end{aligned} \tag{10}$$

当 $s\le j\le k-2$ 时，将(9)式代入(3)式

$$\begin{aligned}A_{1,j}&=O\left(r^{(k-j-1)\delta}\right)+O\left(r^{(k-j-2)\delta}\right)\frac{f_1'}{f_1}+\cdots+O\left(r^{\delta}\right)\frac{f_1^{(k-j-2)}}{f_1}+C_k^{k-j-1}\frac{f_1^{(k-j-1)}}{f_1}\\&=\sum_{p=0}^{k-j-2}O\left(r^{(k-j-1-p)\delta}\right)\frac{f_1^{(p)}}{f_1}+C_k^{k-j-1}\frac{f_1^{(k-j-1)}}{f_1}\end{aligned} \tag{11}$$

综合起来即(在 $\left|z\right|=r\in\left(1,+\infty\right)-E_1$ 的所有 z 处)

$$\begin{cases}A_{1,s-1}=A_s+\sum_{p=0}^{k-s-1}O\left(r^{(k-s-p)\delta}\right)\frac{f_1^{(p)}}{f_1}+C_k^{k-s}\frac{f_1^{(k-s)}}{f_1},\\A_{1,j}=\sum_{p=0}^{k-j-2}O\left(r^{(k-j-1-p)\delta}\right)\frac{f_1^{(p)}}{f_1}+C_k^{k-j-1}\frac{f_1^{(k-j-1)}}{f_1},s\le j\le k-2,\end{cases} \tag{12}$$

(ii) 其次，对方程(4)的一部分系数进行估计(即(5)式)。

当 $j=s-2$ 时，由(5)式得

$$A_{2,s-2}=A_{1,s-1}+C_s^1A_{1,s}\frac{v_{1,1}'}{v_{1,1}}+\cdots+C_{k-2}^{k-s-1}A_{1,k-2}\frac{v_{1,1}^{(k-s-1)}}{v_{1,1}}+C_{k-1}^{k-s}\frac{v_{1,1}^{(k-s)}}{v_{1,1}}, \tag{13}$$

将(8)式(12)式代入(13)式得

$$A_{2,s-2}=\left\{A_s+\sum_{p=0}^{k-s-1}O\left(r^{(k-s-p)\delta}\right)\frac{f_1^{(p)}}{f_1}+C_k^{k-s}\frac{f_1^{(k-s)}}{f_1}\right\}+\left\{\sum_{p=0}^{k-s-2}O\left(r^{(k-s-1-p)\delta}\right)\frac{f_1^{(p)}}{f_1}+C_k^{k-s-1}\frac{f_1^{(k-s-1)}}{f_1}\right\}\cdot O\left(r^{\delta}\right)+\cdots$$
$$+\left\{O\left(r^{\delta}\right)+C_k^1\frac{f_1'}{f_1}\right\}\cdot O\left(r^{(k-s-1)\delta}\right)+O\left(r^{(k-s)\delta}\right)=A_s+\sum_{p=0}^{k-s-1}O\left(r^{(k-s-p)\delta}\right)\frac{f_1^{(p)}}{f_1}+C_k^{k-s}\frac{f_1^{(k-s)}}{f_1} \tag{14}$$

当 $s-1\le j\le k-3$，根据(5)式

$$A_{2,j}=A_{1,j+1}+C_{j+2}^1A_{1,j+2}\frac{v_{1,1}'}{v_{1,1}}+\cdots+C_{k-2}^{k-j-3}A_{1,k-2}\frac{v_{1,1}^{(k-j-3)}}{v_{1,1}}+C_{k-1}^{k-j-2}\frac{v_{1,1}^{(k-j-2)}}{v_{1,1}},$$

把(8)式(12)式代入上式得

$$A_{2,j}=\left\{\sum_{p=0}^{k-j-3}O\left(r^{(k-j-2-p)\delta}\right)\frac{f_1^{(p)}}{f_1}+C_k^{k-j-2}\frac{f_1^{(k-j-2)}}{f_1}\right\}+\left\{\sum_{p=0}^{k-j-4}O\left(r^{(k-j-3-p)\delta}\right)\frac{f_1^{(p)}}{f_1}+C_k^{k-j-3}\frac{f_1^{(k-j-3)}}{f_1}\right\}\cdot O\left(r^{\delta}\right)+\cdots$$
$$+\left\{O\left(r^{\delta}\right)+C_k^1\frac{f_1'}{f_1}\right\}\cdot O\left(r^{(k-j-3)\delta}\right)+O\left(r^{(k-j-2)\delta}\right)=\sum_{p=0}^{k-j-3}O\left(r^{(k-j-2-p)\delta}\right)\frac{f_1^{(p)}}{f_1}+C_k^{k-j-2}\frac{f_1^{(k-j-2)}}{f_1}, \tag{15}$$

综合起来即(在 $|z|=r\in(1,+\infty)-E_1$ 的所有 z 处)

$$\begin{cases}A_{2,s-2}=A_s+\sum\limits_{p=0}^{k-s-1}O\left(r^{(k-s-p)\delta}\right)\dfrac{f_1^{(p)}}{f_1}+C_k^{k-s}\dfrac{f_1^{(k-s)}}{f_1},\\ A_{2,j}=\sum\limits_{p=0}^{k-j-3}O\left(r^{(k-j-2-p)\delta}\right)\dfrac{f_1^{(p)}}{f_1}+C_k^{k-j-2}\dfrac{f_1^{(k-j-2)}}{f_1},\ s-1\le j\le k-3,\end{cases} \tag{16}$$

(iii)对比(12)(16)式可以看出：$A_{2,s-2}$ 与 $A_{1,s-1}$ 的形式一致，或者说作用类似；相应地，当 $j=s,s+1,\cdots,k-2$ 时，$A_{2,j-1}$ 与 $A_{1,j}$ 形式一致，作用类似。其实可以认为：方程降一阶，相应的系数也向后平移了一个位置(当然有部分系数我们是不考虑的，这跟我们用到的证明方法有关)。最后，基于这个思路，我们将用归纳法证明：当做到第 $m+1(0\le m\le s)$ 次变换时，得到的方程对应的系数 $A_{m+1,j}$ 在 $|z|=r\in(1,+\infty)-E_1$ 的所有 z 处

$$\begin{cases}A_{m+1,s-m-1}=A_s+\sum\limits_{p=0}^{k-s-1}O\left(r^{(k-s-p)\delta}\right)\dfrac{f_1^{(p)}}{f_1}+C_k^{k-s}\dfrac{f_1^{(k-s)}}{f_1},\\ A_{m+1,j}=\sum\limits_{p=0}^{k-m-j-2}O\left(r^{(k-m-j-1-p)\delta}\right)\dfrac{f_1^{(p)}}{f_1}+C_k^{k-j-m-1}\dfrac{f_1^{(k-j-m-1)}}{f_1},\quad s-m\le j\le k-m-2,\end{cases} \tag{17}$$

首先，由(12)(16)式可知，$m=0,1$ 时，显然满足(17)式。

其次，假设 $m=n-1$，即做了 n 次变换时系数 $A_{n,j}$ 满足(17)式的形式，即

$$\begin{cases}A_{n,s-n}=A_s+\sum\limits_{p=0}^{k-s-1}O\left(r^{(k-s-p)\delta}\right)\dfrac{f_1^{(p)}}{f_1}+C_k^{k-s}\dfrac{f_1^{(k-s)}}{f_1},\\ A_{n,j}=\sum\limits_{p=0}^{k-n-j-1}O\left(r^{(k-n-j-p)\delta}\right)\dfrac{f_1^{(p)}}{f_1}+C_k^{k-n-j}\dfrac{f_1^{(k-n-j)}}{f_1},\quad s-n+1\le j\le k-n-1,\end{cases} \tag{18}$$

我们只需证：当 $m=n$，即做了 $n+1$ 次变换时，系数 $A_{n+1,j}$ 也是满足(17)式。当做到第 $n+1$ 次变换时，由(7)式得(令 $m=n, j=s-n-1$)

$$A_{n+1,s-n-1}=A_{n,s-n}+C_{s-n+1}^1A_{n,s-n+1}\frac{v_{n,1}'}{v_{n,1}}+\cdots+C_{k-n-1}^{k-s-1}A_{n,k-n-1}\frac{v_{n,1}^{(k-s-1)}}{v_{n,1}}+C_{k-n}^{k-s}\frac{v_{n,1}^{(k-s)}}{v_{n,1}},$$

把(8)式(18)式代入上式，得

$$\begin{aligned}A_{n+1,s-n-1}&=\left\{A_s+\sum_{p=0}^{k-s-1}O\left(r^{(k-s-p)\delta}\right)\frac{f_1^{(p)}}{f_1}+C_k^{k-s}\frac{f_1^{(k-s)}}{f_1}\right\}+\left\{\sum_{p=0}^{k-s-2}O\left(r^{(k-s-1-p)\delta}\right)\frac{f_1^{(p)}}{f_1}+C_k^{k-s-1}\frac{f_1^{(k-s-1)}}{f_1}\right\}\cdot O\left(r^{\delta}\right)+\cdots\\&+\left\{O\left(r^{\delta}\right)+C_k^1\frac{f_1'}{f_1}\right\}\cdot O\left(r^{(k-s-1)\delta}\right)+O\left(r^{(k-s)\delta}\right)=A_s+\sum_{p=0}^{k-s-1}O\left(r^{(k-s-p)\delta}\right)\frac{f_1^{(p)}}{f_1}+C_k^{k-s}\frac{f_1^{(k-s)}}{f_1}\end{aligned}\tag{19}$$

而当 $s-n\le j\le k-n-2$ 时，根据(7)式(令 $m=n$)

$$A_{n+1,j}=A_{n,j+1}+C_{j+2}^1A_{n,j+2}\frac{v_{n,1}'}{v_{n,1}}+\cdots+C_{k-n-1}^{k-n-j-2}A_{n,k-n-1}\frac{v_{n,1}^{(k-n-j-2)}}{v_{n,1}}+C_{k-n}^{k-n-j-1}\frac{v_{n,1}^{(k-n-j-1)}}{v_{n,1}},$$

把(8)式(18)式代入上式得

$$\begin{aligned}A_{n+1,j}&=\left\{\sum_{p=0}^{k-n-j-2}O\left(r^{(k-n-j-1-p)\delta}\right)\frac{f_1^{(p)}}{f_1}+C_k^{k-n-j-1}\frac{f_1^{(k-n-j-1)}}{f_1}\right\}\\&+\left\{\sum_{p=0}^{k-n-j-3}O\left(r^{(k-n-j-2-p)\delta}\right)\frac{f_1^{(p)}}{f_1}+C_k^{k-n-j-2}\frac{f_1^{(k-n-j-2)}}{f_1}\right\}\cdot O\left(r^{\delta}\right)+\cdots\\&+\left\{O\left(r^{\delta}\right)+C_k^1\frac{f_1'}{f_1}\right\}\cdot O\left(r^{(k-n-j-2)\delta}\right)+O\left(r^{(k-n-j-1)\delta}\right)=\sum_{p=0}^{k-n-j-2}O\left(r^{(k-n-j-1-p)\delta}\right)\frac{f_1^{(p)}}{f_1}+C_k^{k-n-j-1}\frac{f_1^{(k-n-j-1)}}{f_1}\end{aligned}\tag{20}$$

综合起来即

$$\begin{cases}A_{n+1,s-n-1}=A_s+\displaystyle\sum_{p=0}^{k-s-1}O\left(r^{(k-s-p)\delta}\right)\frac{f_1^{(p)}}{f_1}+C_k^{k-s}\frac{f_1^{(k-s)}}{f_1},\\A_{n+1,j}=\displaystyle\sum_{p=0}^{k-n-j-2}O\left(r^{(k-n-j-1-p)\delta}\right)\frac{f_1^{(p)}}{f_1}+C_k^{k-n-j-1}\frac{f_1^{(k-n-j-1)}}{f_1},\quad s-n\le j\le k-n-2,\end{cases}\tag{21}$$

由(21)式可以看出：当 $m=n$ 时，得到的方程的系数满足(17)式的形式。

因此我们用归纳法证明了当第 $m+1$ 次变换时，方程的系数 $A_{m+1,j}$ 满足(17)式。

(III)推出矛盾，并完成证明。

将方程(6)的一个解 $v_{m+1,1}$ 代入(6)式，得

$$v_{m+1,1}^{(k-m-1)}+A_{m+1,k-m-2}\,v_{m+1,1}^{(k-m-2)}+\cdots+A_{m+1,0}\,v_{m+1,1}=0,\tag{22}$$

并由(17)式可知，在 $|z|=r\in(1,+\infty)-E_1$ 的所有 z 处

$$\begin{cases}A_{m+1,s-m-1}=A_s+\displaystyle\sum_{p=0}^{k-s-1}O\left(r^{(k-s-p)\delta}\right)\frac{f_1^{(p)}}{f_1}+C_k^{k-s}\frac{f_1^{(k-s)}}{f_1},\\A_{m+1,j}=\displaystyle\sum_{p=0}^{k-m-j-2}O\left(r^{(k-m-j-1-p)\delta}\right)\frac{f_1^{(p)}}{f_1}+C_k^{k-m-j-1}\frac{f_1^{(k-m-j-1)}}{f_1},\quad s-m\le j\le k-m-2,\end{cases}\tag{23}$$

利用(22)式和(23)式，我们将推出矛盾，并完成证明。分两部分：

(iv)首先证 $\sigma\left(f_1\right)\ge\beta$。令 $m=s-1$，由(22)式(23)式得

$$v_{s,1}^{(k-s)}+A_{s,k-s-1}\,v_{s,1}^{(k-s-1)}+\cdots+A_{s,0}\,v_{s,1}=0,\tag{24}$$

以及(在 $|z|=r\in(1,+\infty)-E_1$ 的所有 z 处)

$$\begin{cases}A_{s,0}=A_s+\displaystyle\sum_{p=0}^{k-s-1}O\left(r^{(k-s-p)\delta}\right)\frac{f_1^{(p)}}{f_1}+C_k^{k-s}\frac{f_1^{(k-s)}}{f_1},\\A_{s,j}=\displaystyle\sum_{p=0}^{k-s-j-1}O\left(r^{(k-s-j-p)\delta}\right)\frac{f_1^{(p)}}{f_1}+C_k^{k-s-j}\frac{f_1^{(k-s-j)}}{f_1},\quad 1\le j\le k-s-1,\end{cases}\tag{25}$$

由(24)式变形得

$$-A_{s,0}=A_{s,1}\frac{v'_{s,1}}{v_{s,1}}+\cdots+A_{s,k-s-1}\frac{v_{s,1}^{(k-s-1)}}{v_{s,1}}+\frac{v_{s,1}^{(k-s)}}{v_{s,1}} \tag{26}$$

将(8)式和(25)的第二个等式代入(26)式，得

$$\begin{aligned}-A_{s,0}&=\left\{\sum_{p=0}^{k-s-2}O\left(r^{(k-s-1-p)\delta}\right)\frac{f_1^{(p)}}{f_1}+C_k^{k-s-1}\frac{f_1^{(k-s-1)}}{f_1}\right\}\cdot O\left(r^{\delta}\right)+\cdots+\left\{O\left(r^{\delta}\right)+C_k^1\frac{f_1'}{f_1}\right\}\cdot O\left(r^{(k-s-1)\delta}\right)+O\left(r^{(k-s)\delta}\right)\\&=\sum_{p=0}^{k-s-1}O\left(r^{(k-s-p)\delta}\right)\frac{f_1^{(p)}}{f_1},\end{aligned} \tag{27}$$

另一方面，由(25)式的第一个式子我们又得

$$A_{s,0}=A_s+\sum_{p=0}^{k-s-1}O\left(r^{(k-s-p)\delta}\right)\frac{f_1^{(p)}}{f_1}+C_k^{k-s}\frac{f_1^{(k-s)}}{f_1} \tag{28}$$

由(27)式(28)式我们得

$$-A_s=\sum_{p=0}^{k-s-1}O\left(r^{(k-s-p)\delta}\right)\frac{f_1^{(p)}}{f_1}+C_k^{k-s}\frac{f_1^{(k-s)}}{f_1} \tag{29}$$

假如 $\sigma(f_1)\ge\beta$ 不成立，则 $\sigma(f_1)<\beta$ 。由引理 1.4，存在一个有限对数测度集 E_2，对上述的 ε，在 $|z|=r\in(1,+\infty)-E_1\cup E_2$ 的所有 z 处

$$\left|\frac{f_1^{(j)}}{f_1}\right|\le r^{j(\sigma(f_1)-1+\varepsilon)},\ j=1,2,\cdots,k-s$$

取 $3\varepsilon<\beta-\max\{\sigma(f_1),\alpha\}$，则上式可写为

$$\frac{f_1^{(j)}}{f_1}=O\left(r^{j(\beta-1-2\varepsilon)}\right),\ j=1,2,\cdots,k-s \tag{30}$$

由于 $\beta=\dfrac{\deg A_s}{k-s}+1$，对上述的 ε，当 r 足够大时，

$$|A_s|>r^{(k-s)(\beta-1-\varepsilon)} \tag{31}$$

注意到 $\delta=\alpha-1+\varepsilon<\beta-1-2\varepsilon$，并将(30)式代入(29)式，可得

$$-A_s=\sum_{p=0}^{k-s}O\left(r^{(k-s-p)(\beta-1-2\varepsilon)}\right)\cdot O\left(r^{p(\beta-1-2\varepsilon)}\right)+O\left(r^{(k-s)(\beta-1-2\varepsilon)}\right)=O\left(r^{(k-s)(\beta-1-2\varepsilon)}\right) \tag{32}$$

以上各式在 $|z|=r\in(1,+\infty)-E_1\cup E_2$ 的所有 z 处都成立。

对(32)式两端取绝对值，并除以 $|A_s|$ 得

$$1\le\frac{O\left(r^{(k-s)(\beta-1-2\varepsilon)}\right)}{|A_s|}<\frac{O\left(r^{(k-s)(\beta-1-2\varepsilon)}\right)}{r^{(k-s)(\beta-1-\varepsilon)}}=O(1)\cdot r^{-(k-s)\varepsilon}\to0,\ r\to+\infty,r\notin E_1\cup E_2 \tag{33}$$

不可能成立。于是 $\sigma(f_1)\ge\beta$ 。

(v)其次，我们证 $\sigma(f_1)\le\alpha$ 。令 $m=s$，由(22)式得

$$v_{s+1,1}^{(k-s-1)}+A_{s+1,k-s-2}v_{s+1,1}^{(k-s-2)}+\cdots+A_{s+1,0}v_{s+1,1}=0, \tag{34}$$

由(23)式得(注意这时候没有(23)式的第一个等式，$0\le j\le k-s-2$，)

$$A_{s+1,j}=\sum_{p=0}^{k-s-j-2}O\left(r^{(k-s-j-1-p)\delta}\right)\frac{f_1^{(p)}}{f_1}+C_k^{k-s-j-1}\frac{f_1^{(k-s-j-1)}}{f_1}, \tag{35}$$

由(34)式变形得

$$0=A_{s+1,0}+A_{s+1,1}\frac{v'_{s+1,1}}{v_{s+1,1}}+\cdots+A_{s+1,k-s-2}\frac{v_{s+1,1}^{(k-s-2)}}{v_{s+1,1}}+\frac{v_{s+1,1}^{(k-s-1)}}{v_{s+1,1}} \tag{36}$$

将(8)式(35)式代入(36)式，得

$$0=\left\{\sum_{p=0}^{k-s-2}O\left(r^{(k-s-1-p)\delta}\right)\frac{f_1^{(p)}}{f_1}+C_k^{k-s-1}\frac{f_1^{(k-s-1)}}{f_1}\right\}+\left\{\sum_{p=0}^{k-s-3}O\left(r^{(k-s-2-p)\delta}\right)\frac{f_1^{(p)}}{f_1}+C_k^{k-s-2}\frac{f_1^{(k-s-2)}}{f_1}\right\}\cdot O\left(r^{\delta}\right)+\cdots$$
$$+\left\{O\left(r^{\delta}\right)+C_k^{1}\frac{f_1'}{f_1}\right\}\cdot O\left(r^{(k-s-2)\delta}\right)+O\left(r^{(k-s-1)\delta}\right)=\sum_{p=0}^{k-s-2}O\left(r^{(k-s-1-p)\delta}\right)\frac{f_1^{(p)}}{f_1}+C_k^{k-s-1}\frac{f_1^{(k-s-1)}}{f_1} \tag{37}$$

或者写为

$$-C_k^{k-s-1}\frac{f_1^{(k-s-1)}}{f_1}=\sum_{p=0}^{k-s-2}O\left(r^{(k-s-1-p)\delta}\right)\frac{f_1^{(p)}}{f_1} \tag{38}$$

假如$\sigma(f_1)\le\alpha$不成立，则$\sigma(f_1)>\alpha$，对上述的ε，取$\varepsilon<\left(\sigma(f_1)-\alpha\right)/3$，利用引理2.1，存在无穷对数测度集$E_3$，使得

$$\lim_{\substack{r\to\infty\\ r\in E_3-E_1}}\frac{\log v(r)}{\log r}=\sigma(f_1),$$

其中$v(r)$是f_1的中心指标。即在$|z|=r\in E_3-E_1$的所有z处有

$$v(r)\ge r^{\sigma(f_1)-\varepsilon}>r^{\alpha+2\varepsilon} \tag{39}$$

于是，

$$\left|\frac{v(r)}{z}\right|>r^{\alpha-1+2\varepsilon}=r^{\delta+\varepsilon} \tag{40}$$

利用引理2.3，除去一个有限对数测度的集E_4，在$|z|=r\in(1,+\infty)-E_4$且$|f_1(z)|=M(r,f_1)$的z处，

$$\frac{f_1^{(j)}(z)}{f_1(z)}=\left(\frac{v(r)}{z}\right)^j\left(1+o(1)\right), \tag{41}$$

因此，在$|z|=r\in E_3-E_1\cup E_4$且$|f_1(z)|=M(r,f_1)$的所有 z 处，以上(38)(40)(41)式都成立。最后对(38)式两端取绝对值并同时除以$\left|C_k^{k-s-1}\frac{f_1^{(k-s-1)}}{f_1}\right|$，并结合(41)式，得到

$$1\le\sum_{p=0}^{k-s-2}O\left(r^{(k-s-1-p)\delta}\right)\left|\frac{1}{v(r)/z}\right|^{k-s-1-p}$$

再考虑到(40)式，得

$$1<\sum_{p=0}^{k-s-2}O\left(r^{(k-s-1-p)\delta}\right)\left(\frac{1}{r}\right)^{(\delta+\varepsilon)(k-s-1-p)}\le O(1)\sum_{p=0}^{k-s-2}r^{-(k-s-1-p)\varepsilon}\to 0,\left(r\to+\infty,r\in E_3-E_1\cup E_4\right)$$

不可能成立，所以$\sigma(f_1)\le\alpha$。

然而综合(iv)与(v)所得的结论$\beta\le\sigma(f_1)\le\alpha$，这与$\beta>\alpha$矛盾。于是部分(a)证毕。

(b)如果$\max\left\{\lambda(f_1),\lambda(f_p)\right\}<1+\dfrac{\deg A_s}{k-s}=\beta$，并且要证的不成立，即$\lambda(f)<\beta$。可令$f_1=u_1\mathrm{e}^{h_1},f_p=u_p\mathrm{e}^{h_p}$，其中$h_1,h_p$是多项式，$u_1,u_p$是典型乘积。于是可以把解$f=af_1+bf_p$写为$f=\mathrm{e}^{h_1}\left(w_1+w_p\mathrm{e}^{h}\right)$，其中$w_1=au_1,w_p=bu_p,h=h_p-h_1$。并且由部分(a)已经证明$\sigma\left(\dfrac{f_p}{f_1}\right)=\beta$，可知

$$\sigma\left(w_p\mathrm{e}^{h}/w_1\right)=\beta. \tag{42}$$

利用Nevaninna第二基本定理，有

$$\left(1+o(1)\right)T\left(r,w_p\,\mathrm{e}^h/w_1\right)<\overline{N}\left(r,w_p\mathrm{e}^h/w_1\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{w_p\,\mathrm{e}^h/w_1}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{w_p\mathrm{e}^h/w_1+1}\right),r\notin E_4, \tag{43}$$

其中 E_4 是测度有限的 r 值集。

又由于

$$\overline{N}\left(r,w_p\mathrm{e}^h/w_1\right)\le\overline{N}\left(r,1/w_1\right),\qquad \overline{N}\left(r,\frac{1}{w_p\mathrm{e}^h/w_1}\right)\le\overline{N}\left(r,1/w_p\right),\qquad \overline{N}\left(r,\frac{1}{w_p\mathrm{e}^h/w_1+1}\right)\le N\left(r,1/f\right),$$

结合(43)式得

$$\left(1+o(1)\right)T\left(r,w_p\mathrm{e}^h/w_1\right)<\overline{N}\left(r,1/w_1\right)+\overline{N}\left(r,1/w_p\right)+N\left(r,1/f\right),r\notin E_4, \tag{44}$$

再利用引理 2.2，有

$$\sigma\left(w_p\mathrm{e}^h/w_1\right)<\max\left\{\lambda\left(f_1\right),\lambda\left(f_p\right),\lambda\left(f\right)\right\}<\beta,$$

这与(42)式矛盾。因此部分(b)得证。

整个命题得证。

参考文献 (References)

[1] 杨乐. 值分布论及其新研究[M]. 北京: 科学出版社, 1982.

[2] 高仕安, 陈特为, 陈宗煊. A note concerning the complex oscillation and the growth of solutions for higher order homogeneous linear differential equations. Journal of Mathematical Analysis Application, 1990, 153: 159-178.

[3] Z. X. Chen. On the hyper order of solution of higher order differential equations. Chinese Annals of Mathematics, 2003, 24(4): 501-508.

[4] 何育赞, 肖修治. 代数体函数与常微分方程[M]. 北京: 科学出版社, 1988.

[5] G. Gundersen. Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates. Journal of London Mathematical Society, 1988, 37(1): 88-104.

[6] G. Frank, S. Hellerstein. On the meromorphic solutions of nonhomogeneous linear differential equations with polynomial coefficients. Proceedings of the London Mathematical Society, 1986, 53(3): 407-428.

