Pure Mathematics 理论数学, 2012, 2, 17-22
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2012.21004 Published Online January 2012 (http://www.hanspub.org/journal/pm)

Metric Series Solutions of Fractional Differential Equations

Guihua Wan, Shuqin Zhang, Xinwei Su
Department of Mathematics, China Mining and Technology University (Beijing), Beijing
Email: {zsqjk, kuangdasuxinwei}@163.com
Received: Oct. 21st, 2011; revised: Nov. 28th, 2011; accepted: Dec. 2nd, 2011

Abstract: In this paper, we introduce a Mittage-Leffler type series for metric of n order. We obtain Mittage-Leffler type metric series solutions of initial value problems for fractional differential equations system. Further, we obtain fundamental solution metric, which are denoted by Mittage-Leffler type metric series.

Keywords: Mittage-Leffler Type Functions; Metric Series; Fractional Differential Equations

分数阶微分方程的矩阵级数解

万桂华，张淑琴，苏新卫
中国矿业大学(北京)数学系，北京
Email: {zsqjk, kuangdasuxinwei}@163.com
收稿日期：2011 年 10 月 21 日；修回日期：2011 年 11 月 28 日；录用日期：2011 年 12 月 2 日

摘　要：在本文中，我们引进了n阶矩阵的Mittage-Leffler型级数。我们得到了分数阶微分方程组初值问题的Mittage-Leffler型矩阵级数解。而且，我们得到了分数阶微分方程组的用Mittage-Leffler型矩阵级数所表示的基解矩阵。

关键词：Mittage-Leffler 型函数；矩阵级数；分数阶微分方程

1. 引言

本文中，我们研究如下分数阶微分方程组的矩阵级数解及其用矩阵级数表示的基解矩阵

$$\begin{cases} D^{\delta}x_1(t) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ D^{\delta}x_2(t) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \qquad\cdots \\ D^{\delta}x_n(t) = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $a_{ij} \in R, i, j = 1,2,\cdots,n, D^{\delta}$ 表示 Caputo $\delta(0<\delta\le 1)$阶导数，定义如下，请参见[1]

$$D^{\delta}u(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\Gamma(1-\delta)}\int_0^t (t-s)^{-\delta}u(s)\mathrm{d}s - \frac{u(0)}{\Gamma(1-\delta)}t^{-\delta}, t>0, \tag{1.2}$$

注：这儿我们可以要求 $a_{ij} \in C, i, j = 1,2,\cdots,n$ 和 $\delta \in C$，$\mathrm{Re}(\delta) > 0$，为了方便期间我们只考虑实数的情形。

如果我们记

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix},$$

则赋予方程组(1.1)初值条件 $x_1(0)=x_{10},\cdots,x_n(0)=x_{n0}$ 下的初值问题可以写成

$$\begin{cases}D^{\delta}x(t)=Ax,\\ x(0)=x_0,\end{cases}\tag{1.3}$$

其中 $x_0=\begin{pmatrix}x_{10}\\ \vdots\\ x_{n0}\end{pmatrix}$。

分数阶微分方程是微分方程的一个重要分支。近年来，因其自身理论体系的不断完善以及与许多实际应用(如：力学、化学和工程学等等)问题的密切联系，受到了国内外数学界和自然科学界的重视并不断得以深入研究。分数阶微分方程已成为现代数学中一个重要研究方向之一。分数阶微积分不是求分数的微积分，它是求任意阶导数和积分的一门学科(只是由于习惯而沿用了最初的称呼)，它的出现已有 300 多年的历史。近几十年，许多工程人员指出，分数阶微积分非常适用于描述各种物理、化学材料的性质，请参见文献[1-5]。在现实中，应用科学家和工程师认识到分数阶微分方程的基本理论为用分数阶方程建模的各种问题的讨论提供了自然框架。分数阶微积分系统的研究吸引了越来越多学者的注意和兴趣。关于分数阶线性问题的求解是该领域中的一个最基本的方面，由于分数阶导数的特殊性质，这些问题不像整数次线性微分方程的结果那样丰富和完善，请参见文献[1,2,5-8]。其中还有好多问题有待于探索和研究。本文首先引进了方阵的 Mittage-Leffler 型级数，我们可以看到常微分教材中的指数矩阵[7,8]是该级数的一个特殊情形。我们得到了分数阶微分方程组(1.1)初值问题的 Mittage-Leffle 型矩阵级数解。而且，借助于该 Mittage-Leffler 型矩阵级数，我们得到了分数阶微分方程组(1.1)的基解矩阵。

2. Mittage-Leffler 型的矩阵级数

我们首先给出几个与分数阶微分方程相关联的几个特殊函数，具体请参见文献[1]。

定义 2.1.[1] 广义的 Mittage-Leffler 型函数是如下表达式

$$E_{\alpha,\beta}^{\rho}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\rho)_k z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)k!},\ z\in C,\ \alpha,\ \beta,\ \rho\in C,\ \mathrm{Re}(\alpha)>0,\tag{2.1}$$

其中 $(\rho)_k=\rho(\rho+1)\cdots(\rho+k-1)$。

定义 2.2.[1] 经典的 Mittage-Leffler 型函数是如下表达式

$$E_{\alpha}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(1+\alpha k)},\ z\in C,\ \alpha\in C,\mathrm{Re}(\alpha)>0.\tag{2.2}$$

特别地 $E_1(z)=e^z$。

设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶矩阵。

定义 2.3. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Mittage-Leffler 型级数指的是如下表达式

$$E+\frac{\boldsymbol{A}}{\Gamma(1+\alpha)}+\frac{\boldsymbol{A}^2}{\Gamma(1+2\alpha)}+\cdots\frac{\boldsymbol{A}^k}{\Gamma(1+k\alpha)}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}^k}{\Gamma(1+k\alpha)},\tag{2.3}$$

其中 $\alpha\in C,\ \mathrm{Re}(\alpha)>0$，$E$ 是 n 阶单位方阵。

定理 2.1. 给定任意的一个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，在每个集合 $X=\{\boldsymbol{A}:\|\boldsymbol{A}\|\le a,\ a\ge 0\}$，级数(2.3)是一致收敛的。

证明： 如果 $\|\boldsymbol{A}\|\le a$，则级数 $E_\alpha(\boldsymbol{A})$ 以收敛于 $E_\alpha(a)$ 的数值级数

$$1+\frac{a}{\Gamma(1+\alpha)}+\frac{a^2}{\Gamma(1+2\alpha)}+\cdots\frac{a^k}{\Gamma(1+k\alpha)}+\cdots=E_\alpha(a)$$

为优先级数，根据维尔斯特拉斯判别法，对于 $\|\boldsymbol{A}\|\le a$，级数(2.3)是一致收敛的。

注 2.1. $\|\boldsymbol{A}\|$ 指矩阵的模，有关它的性质请参见[9]。

注 2.2. 此时记该级数的和为 $E_\alpha(\boldsymbol{A})$。

下面我们求问题(1.1)的初值问题的 Mittage-Leffler 型矩阵级数解。

定理 2.2.初值问题(1.3)存在 Mittage-Leffler 型矩阵级数解 $E_\alpha(t^\alpha\boldsymbol{A}),\ t\le M,\ 0<M<\infty$。

证明： 我们令 $\varphi_0(t)=x_0$，

$$\varphi_1(t)=x_0+I^\alpha(\boldsymbol{A}\varphi_0(t))=x_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\boldsymbol{A}x_0\mathrm{d}s=\left(E+\frac{t^\alpha\boldsymbol{A}}{\Gamma(1+\alpha)}\right)x_0,$$

$$\varphi_2(t)=x_0+I^\alpha(\boldsymbol{A}\varphi_1(t))=x_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\boldsymbol{A}\varphi_1\mathrm{d}s=\left(E+\frac{t^\alpha\boldsymbol{A}}{\Gamma(1+\alpha)}+\frac{t^{2\alpha}\boldsymbol{A}^2}{\Gamma(1+2\alpha)}\right)x_0,$$

$$\vdots$$

$$\varphi_n(t)=x_0+I^\alpha(\boldsymbol{A}\varphi_{n-1}(t))=x_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\boldsymbol{A}\varphi_{n-1}(s)\mathrm{d}s=\left(E+\frac{t^\alpha\boldsymbol{A}}{\Gamma(1+\alpha)}+\frac{t^{2\alpha}\boldsymbol{A}^2}{\Gamma(1+2\alpha)}+\cdots+\frac{t^{n\alpha}\boldsymbol{A}^n}{\Gamma(1+n\alpha)}\right)x_0,\quad(2.4)$$

$$\vdots$$

因为，由矩阵模的性质可得

$$|\varphi_n(t)-\varphi_m(t)|\le\left(\frac{M^{n+1}\|\boldsymbol{A}\|^{n+1}}{\Gamma(1+(n+1)\alpha)}+\cdots+\frac{M^n\|\boldsymbol{A}\|^m}{\Gamma(1+m\alpha)}\right)|x_0|$$

而数项级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{M^k\boldsymbol{A}^k}{\Gamma(1+k\alpha)}$ 收敛，于是任给 $\varepsilon>0$，存在 N，使当 $m,n>N$ 时

$$|\varphi_n(t)-\varphi_m(t)|<\varepsilon,\ |t|\le M.$$

让 $x(t)$ 是 $\varphi_n(t)$ 一致收敛到的极限函数，因为

$$|\boldsymbol{A}\varphi_n(t)-\boldsymbol{A}x(t)|\le\|\boldsymbol{A}\|\varphi_n(t)-x(t)|,$$

所以 $\boldsymbol{A}\varphi_n(t)$ 一致收敛于 $\boldsymbol{A}x(t)$，在(2.4)式的第一个等号两端取极限，就得到

$$x(t)=x_0+I^\alpha(\boldsymbol{A}x(t))=x_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\boldsymbol{A}x(s)\mathrm{d}s,$$

所以 $x(t)$ 是问题(1.3)的解，对一切 t 有定义且连续。我们让

$$T_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{t^{k\alpha}\boldsymbol{A}^k}{\Gamma(1+k\alpha)},\quad(2.5)$$

并且由(2.4)式的第二个等式我们知道

$$\varphi_n\left(t\right)=T_n x_0, \tag{2.6}$$

在(2.6)式的两端取极限，我们得到(1.3)的解 $x\left(t\right)=E_\alpha\left(t^\alpha \boldsymbol{A}\right)x_0$。

定理 2.3. $E_\alpha\left(t^\alpha \boldsymbol{A}\right)$($t$ 处于一个有限区间)是(1.1)的一个基本解矩阵。而且，如果 $\boldsymbol{P}$ 是一个阶可逆矩阵，则 $E_\alpha\left(t^\alpha \boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{P}$ 也是(1.1)的一个基解矩阵。

证明：由定理 2.2 知 $E_\alpha\left(t^\alpha \boldsymbol{A}\right)x_0$ 是(1.1)在初值条件 $x\left(0\right)=x_0$ 下的解。我们依次令 x_0 为 $\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$，从而知道 $E_\alpha\left(t^\alpha \boldsymbol{A}\right)$ 的每一列是(1.1)的一个解，又因为 $t=0$ 时，$E_\alpha\left(t^\alpha \boldsymbol{A}\right)=E$，所以 $E_\alpha\left(t^\alpha \boldsymbol{A}\right)$ 是(1.1)的一个基本解矩阵。

如果 $\boldsymbol{P}$ 是一个阶可逆矩阵，则我们很容易得知

$$D^\alpha\left(E_\alpha\left(t^\alpha \boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{P}\right)=D^\alpha\left(E_\alpha\left(t^\alpha \boldsymbol{A}\right)\right)\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}E_\alpha\left(t^\alpha \boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{P},$$

并且 $t=0$ 时，$E_\alpha\left(t^\alpha \boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}$，所以 $E_\alpha\left(t^\alpha \boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{P}$ 也是(1.1)的一个基解矩阵。

例 2.1. 对角矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mu_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \mu_n\end{pmatrix},\ \mu_i\in R,\ i=1,2,\cdots,n$，我们来计算 $E_\alpha\left(t^\alpha \boldsymbol{B}\right)$。

$$E_\alpha\left(t^\alpha \boldsymbol{B}\right)=E+\frac{t^\alpha}{\Gamma\left(1+\alpha\right)}\begin{pmatrix}\mu_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \mu_n\end{pmatrix}+\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma\left(1+2\alpha\right)}\begin{pmatrix}\mu_1^2 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \mu_n^2\end{pmatrix}+\cdots=\begin{pmatrix}E_\alpha\left(t^\alpha\mu_1\right) & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & E_\alpha\left(t^\alpha\mu_n\right)\end{pmatrix}.$$

例 2.2. $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1 & \delta\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，求 $E_\alpha\left(t^\alpha \boldsymbol{D}\right)$。

我们知道 $\boldsymbol{D}^k=\begin{pmatrix}1 & k\delta\\ 0 & 1\end{pmatrix},k=1,2,\cdots$，由于

$$\frac{t^\alpha}{\Gamma\left(1+\alpha\right)}+\frac{2t^{2\alpha}}{\Gamma\left(1+2\alpha\right)}+\frac{3t^{3\alpha}}{\Gamma\left(1+3\alpha\right)}+\cdots+\frac{kt^{k\alpha}}{\Gamma\left(1+k\alpha\right)}+\cdots=t^\alpha E_{\alpha,1+\alpha}^2\left(t^\alpha\right).$$

所以我们能够得到

$$E_\alpha\left(t^\alpha \boldsymbol{D}\right)=E+\frac{t^\alpha}{\Gamma\left(1+\alpha\right)}\begin{pmatrix}1 & \delta\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdots+\frac{t^{k\alpha}}{\Gamma\left(1+k\alpha\right)}\begin{pmatrix}1 & k\delta\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\cdots=\begin{pmatrix}E_\alpha\left(t^\alpha\right) & t^\alpha\delta E_{\alpha,1+\alpha}^2\left(t^\alpha\right)\\ 0 & E_\alpha\left(t^\alpha\right)\end{pmatrix}.$$

现在我们来求用 Mittage-Leffler 型函数所表示的问题(1.1)的基解矩阵。

由代数知识[9]我们知道：存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBP}^{-1}$，其中

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}J_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & J_m\end{pmatrix}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的若尔当标准型，$J_i,\ i=1,2,\cdots,m,\ m\le n$ 是若尔当块。则由

$$\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}^k\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} J_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_m^k \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1},\ k=1,2,\cdots,$$

我们可以得到

$$E_\alpha\left(t^\alpha \boldsymbol{A}\right) = \boldsymbol{P}E_\alpha\left(t^\alpha \boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} E_\alpha(t^\alpha J_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & E_\alpha\left(t^\alpha J_m\right) \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}. \tag{2.7}$$

定理 2.4. 设阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则矩阵函数

$$\varphi(x) = \left(E_\alpha\left(t^\alpha\lambda_1\right)r_1, E_\alpha\left(t^\alpha\lambda_2\right)r_{2,} \cdots, E_\alpha\left(t^\alpha\lambda_n\right)r_n\right)$$

是(1.1)的一个基解矩阵，其中 $\boldsymbol{r_i}$ 是与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_i 相对应的特征向量。

证明：设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 互不相同，则 $\boldsymbol{A}$ 的若而当标准型 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$。由定理 2.3，$E_\alpha\left(t^\alpha \boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{P}$ 是(1.1)的一个基解矩阵。所以，由(2.7)和例 2.1，我们可以将(1.1)的基解矩阵 $\varphi(x) = E_\alpha\left(t^\alpha \boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{P}$ 用如下形式来表示，即

$$\varphi(x) = E_\alpha\left(t^\alpha \boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} E_\alpha\left(t^\alpha\lambda_1\right) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & E_\alpha\left(t^\alpha\lambda_n\right) \end{pmatrix}.$$

因此，如果确定了矩阵 $\boldsymbol{P}$，则就能够计算出基解矩阵。令 $\boldsymbol{r_i}$ 表示 $\boldsymbol{P}$ 的第 i 列的向量，则基解矩阵

$$\varphi(x) = \left(E_\alpha\left(t^\alpha\lambda_1\right)r_1, E_\alpha\left(t^\alpha\lambda_2\right)r_{2,} \cdots, E_\alpha\left(t^\alpha\lambda_n\right)r_n\right).$$

这个式子表明方程组(1.1)有如下形式的解

$$E_\alpha\left(\lambda_i t^\alpha\right)\boldsymbol{r_i},$$

其中 $\boldsymbol{r_i}$ 是与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_i 相对应的特征向量。

对于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征根有重根的情形，利用定理 2.2 或 2.3，理论上我们可以求得微分方程组(1.1)的基解矩阵。但由于对于 Mittage-Leffler 型矩阵级数，我们目前无法得到指数矩阵那样好的性质：$e^{a+B} = e^A \cdot e^B$，其中 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是可交换的 n 阶矩阵。所以，我们在计算上会显得比较繁琐。我们在今后的工作中会继续探讨 Mittage-Leffler 型矩阵级数的性质，以便能够比较容易地计算出微分方程组(1.1)的基解矩阵。

3. 致谢

本工作受国家自然科学基金项目(10971221)、教育部优秀人才支持计划项目(NCET-10-0725)、教育部高等学校科研基金项目(2009QS06)，2011 年中国矿业大学(北京)教学团队建设立项项目《线性代数》教学团队建设和中国矿业大学(北京)课程建设与教改项目(K100701)的资助，在此，我们表示由衷的感谢。同时我们也衷心感谢参考文献中论著的作者们提供的帮助，本论文得以完成是与他们的贡献分不开的。

参考文献 (References)

[1] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006.

[2] K. Miller, B. Ross. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. New York: Wiley, 1993.
[3] I. Podlubny. Fractional differential equations. San Diego: Academic Press, 1999.
[4] J. Sabatier, O. P. Agrawal and J. A. Tenreiro Machado. Advances in fractional calculus: Theoretical developments and applications in physics and engineering. Berlin: Springer, 2007.
[5] R. Metzler, J. Klafter. The random walk's guide to anomalous diffusion: A fractional dynamics approach. Physics Reports, 2000, 339(1): 1-77.
[6] 代群, 李辉来. 几类分数阶微分方程解的结构[J]. 吉林大学学报, 2011, 49(3): 580-586.
[7] 丁同仁, 李承治. 常微分方程教程(第二版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.
[8] 张锦炎. 常微分方程几何理论与分支问题[M]. 北京: 北京大学出版社, 2000.
[9] 王萼芳. 高等代数教程[M]. 北京: 清华大学出版社, 1997.

