Pure Mathematics 理论数学, 2012, 2, 62-72
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2012.22011 Published Online April 2012 (http://www.hanspub.org/journal/pm)

Ground States of Nonlinear Schrödinger Equation with Non-Autonomous Nonlinearity

Hongbo Zhu

School of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou
Email: zhbxw@126.com

Received: Dec. 14th, 2011; revised: Jan. 3rd, 2012; accepted: Jan. 14th, 2012

Abstract: In this paper, we are concerned with the following nonlinear Schrödinger equation $\begin{cases}-\Delta u+V(x)u(x)=f(x,u), x\in R^N\\ u\in \mathrm{H}^1(R^N), N\geq 3\end{cases}$ (P). By using the bounded domain approximate scheme and concentration compactness principle, we prove the existence of a ground state solution of (P) on the Nehari manifold when $V(x)\neq$ constant and $f(x,u)\neq f(u)$.

Keywords: Nonlinear Schrödinger Equation; Ground State Solutions; Concentration Compactness

带有非自治项的非线性 Schrödinger 方程的基态解的存在性

朱红波

广东工业大学应用数学学院，广州
Email: zhbxw@126.com

收稿日期：2011 年 12 月 14 日；修回日期：2012 年 1 月 3 日；录用日期：2012 年 1 月 14 日

摘　要：本文考虑如下形式的非线性 Schrödinger 方程$\begin{cases}-\Delta u+V(x)u(x)=f(x,u), x\in R^N\\ u\in \mathrm{H}^1(R^N), N\geq 3\end{cases}$ (P)。利用有界区域逼近和集中紧致原理，当位势函数$V(x)$不恒等于常数，非线性项$f(x,u)$不恒等于$f(u)$，本文证明了方程(P)存在最低能量解。

关键词：非线性 Schrödinger 方程；基态解；集中紧致原理

1. 引言

本篇文章研究如下形式的非线性 Schrödinger 方程：

$$\begin{cases}-\Delta u+V(x)u(x)=f(x,u), x\in R^N\\ u\in \mathrm{H}^1(R^N), N\geq 3\end{cases} \tag{1}$$

其中$V(x), f(x,t)$满足下列条件：

$(V_1)\, V(x)\in C(R^N,R)$，且存在常数$\alpha>0$使得对任意的$x\in R^N$，$V(x)\geq\alpha$。

(V_2)对任意的$x\in R^N$，$V(x)<V(\infty)=\lim\limits_{|x|\to\infty}V(x)\in(0,\infty)$。

(F_1) $f_t(x,t)$ 是 Caratheodory 函数，且存在常数 C 使得 $\left|f_t(x,t)\right| \le C\left(1+|t|^{2^*-2}\right), \lim\limits_{|t|\to\infty}\dfrac{f(x,t)}{|t|^{2^*-1}}=0$ 关于 $x\in R^N$ 一致成立。

(F_2) $\lim\limits_{|t|\to 0}\dfrac{|f(x,t)|}{|t|}=0, \lim\limits_{|t|\to\infty}\dfrac{F(x,t)}{|t|^2}=\infty$ 关于 $x\in R^N$ 一致成立；并且存在函数 $\overline{f}(t)\in C(R)$ 使得对任意的 $(x,t)\in R^N\times R$，$F(x,t)\ge \overline{F}(t)\ge 0$，并且 $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x,t)=\overline{f}(t)$ 关于有界的 t 一致成立。

(F_3)对任意的 $x\in R^N$，$\dfrac{f(x,t)}{|t|}$ 关于 $t\in R\setminus\{0\}$ 严格递增。

关于 Schrödinger 方程(1)的解的存在性的研究已经有了很多结果，具体可参见[1-6]。近年来，关于方程(1)的基态解(最低能量解)的研究引起了大家的注意，当采用变分方法寻求 Schrödinger 方程(1)基态解的时候，除了需要非线性项函数 $f(x,t)$ 的增长性条件和 Nehari 型条件以外，一般还要求 $f(x,t)$ 满足(A-R)条件(见文献[7])，即存在常数 $\mu>2$ 使得对所有的 $x\in R^N$

$$0<\mu F(x,u)\le uf(x,u)，\text{其中} F(x,u)=\int_0^u f(x,t)\mathrm{d}t. \tag{A-R}$$

在文献[8]中，Liu 和 Wang 首次采用了比(A-R)条件弱且比较自然的超二次条件：

$$\lim_{|t|\to\infty}\frac{F(x,t)}{|t|^2}=\infty \text{ 关于 } x\in R^N \text{ 一致成立。} \tag{SQ}$$

随后，Z. Q. Wang 等在[9]中同样采用(SQ)条件，并在此条件下他们证明了如果 $f(x,t)$ 和 $V(x)$ 满足周期性条件，也就是关于变量 x 的每个分量 x_i 都是周期；或位势函数 $V(x)$ 为井位势同时 $f(x,t)\equiv f(t)$，则方程(1)存在基态解。本篇文章中的主要目的就是把方程(1)的非线性项推广到更一般形式上去，这里我们假设 $f(x,t)$ 不恒等于 $f(t)$，并且 $f(x,t)$ 和 $V(x)$ 不满足周期性条件，在此条件下证明方程(1)仍存在基态解。

注 1.1 $\|u\|=\left[\int_{R^N}\left(|\nabla u|^2+V(x)|u|^2\right)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}$ 表示 Hilbert 空间 $\mathrm{H}^1(R^N)$ 中的范数，$B_R\triangleq\left\{x\in R^N:|x|\le R\right\}$，$B_R(y)\triangleq\left\{x\in R^N:|x-y|\le R\right\}$，$2^*=\dfrac{2N}{N-2}, N\ge 3$。

例 1.1 设 $f(x,t)=h(x)t^{5/3}+t^{7/3}$，$K\ge h(x)\ge h(\infty)=\lim\limits_{|x|\to\infty}h(x)$，$h(x)$，$h(\infty)$，$K>0$。当 $N=3$ 时，$2^*=6$，容易验证 $f(x,t)$ 满足条件(F_1)-(F_3)。

主要结论如下：

定理 1.1 假设条件(V_1)(V_2)，(F_1)-(F_3)成立，则方程(1)存在弱解 $u\in \mathrm{H}^1(R^N)$ 使得 $\Phi(u)=c>0$，c 为如下定义

$$c:=\inf_{u\in N}\Phi(u)$$

其中

$$N:=\left\{u\in \mathrm{H}^1(R^N)\setminus\{0\}\,\middle|\,\gamma(u):=\langle\Phi'(u),u\rangle=0\right\},$$

$$\Phi(u)=\frac{1}{2}\int_{R^N}\left(|\nabla u|^2+V(x)u^2\right)\mathrm{d}x-\int_{R^N}F(x,u)\mathrm{d}x.$$

注 1.2 如果 $f(x,t)=b(x)f(t)$，其中 $b(x)\in C^1(R^N,R), b_1\le b(x)\le b_2, b_1,b_2>0$，$b(x)\ge\inf b(x)=\lim\limits_{|x|\to\infty}b(x)$，作者在文献[9]中已说明定理 3.1 仍成立。本篇文章中，非线性项函数 $f(x,t)$ 不需要一定具有变量可分离的形式。

2. 预备知识

这一节中，首先给出一些预备引理和已知结论，这些引理和结论将为证明定理 1.1 奠定基础。

引理 2.1 假设条件(F_1)-(F_3)成立，则对任意的$\mathrm{H}^1\left(R^N\right)\setminus\{0\}$，存在唯一的$t=t(u)>0$使得$t(u)u\in N$，且$\max\limits_{t\geq 0}\Phi(tu)=\Phi(t(u)u)$。

证明：此引理的证明可参见文献[10]。

考虑方程(1)在无穷远处的方程：

$$\begin{cases}-\Delta u+V(\infty)u(x)=\overline{f}(u), x\in R^N,\\ u\in \mathrm{H}^1\left(R^N\right), N\geq 3.\end{cases}$$

类似地，定义 $c_\infty:=\inf\limits_{u\in N_\infty}\Phi_\infty(u)$，这里

$$N_\infty:=\left\{u\in \mathrm{H}^1\left(R^N\right)\setminus\{0\}\middle|\gamma_\infty(u):=\left\langle\Phi_\infty'(u),u\right\rangle=0\right\},$$

$$\Phi_\infty(u)=\frac{1}{2}\int_{R^N}\left(|\nabla u|^2+V(\infty)u^2\right)\mathrm{d}x-\int_{R^N}\overline{F}(u)\mathrm{d}x.$$

由文献[9]中的定理 2.1 可知，$c_\infty>0$且存在达到函数$u_\infty\in N_\infty$。

引理 2.2 $0<c<c_\infty$

证明：首先证明$c>0$，令

$$c_1:=\inf_{u\in \mathrm{H}^1\left(R^N\right)\setminus\{0\}}\max_{t\geq 0}\Phi(tu); c_2:=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}\Phi(\gamma(t)).$$

这里 $\Gamma:=\left\{\gamma\in C\left((0,1),\mathrm{H}^1\left(R^N\right)\right):\gamma(0)=0,\Phi(\gamma(1))<0\right\}$，由引理 2.1，易知$c=c_1$。

对任意的$u\in \mathrm{H}^1\left(R^N\right)\setminus\{0\}$，由($F_2$)，存在充分大的$t>0$使得$\Phi(tu)<0$。

令$\tilde{\gamma}(s)=stu$，则$\tilde{\gamma}(s)\in\Gamma$，且有

$$c_2\leq\Phi\left(\tilde{\gamma}(s)\right)=\Phi(stu)\leq\max_{t\geq 0}\Phi(tu).$$

因此$c_1\geq c_2$。由(F_1)(F_2)，存在$\rho>0$充分小使得$\inf\limits_{\|u\|=\rho}\Phi(u)>\alpha>0$。

由$\tilde{\gamma}(0)=0$，对足够大的$t>0$，$\|\gamma(1)\|>\rho$，因此，存在$s_0\in[0,1]$使得$\left\|\tilde{\gamma}(s_0)\right\|=\rho$，这样

$$c_2\geq\Phi\left(\tilde{\gamma}(s_0)\right)\geq\inf_{\|u\|=\rho}\Phi(u)>\alpha>0.$$

因此$c=c_1\geq c_2>0$。设u_∞是c_∞的达到函数，类似于引理 2.1 的证明过程，存在$t=t(u)>0$使得$tu_\infty\in N$，于是有

$$c\leq\Phi(tu_\infty)<\Phi_\infty(tu_\infty)\leq\Phi_\infty(u_\infty)=c_\infty.$$

引理 2.3 (文献[11]，定理 2.1) 设$\{\rho_n\}$是$L^1\left(R^N\right)$中有界序列，$\rho_n\geq 0$，则存在一子序列(仍记为$\{\rho_n\}$)使得下面其中一种情况发生：

1) 消失：对所有的$0<R<+\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{y\in R^N}\int_{B_R(y)}\rho_n(x)\mathrm{d}x=0$。

2) 非消失：存在常数$\alpha>0,R<+\infty$和$\{y_n\}\subset R^N$使得

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{y\in R^N}\int_{B_R(y_n)}\rho_n(x)\mathrm{d}x\geq\alpha>0.$$

引理 2.4 设$\{u_n\}\subset H^1\left(R^N\right)$满足当$n\to+\infty$时，$\gamma\left(u_n\right)\to 0,\int_{R^N} f\left(x,u_n\right)u_n\mathrm{d}x\to l>0$，

则存在序列$t_n>0$使得当$n\to+\infty$，$t_nu_n\in N,t_n\to 1$。

证明：因为$u_n\neq 0$，类似于引理 2.1 中的证明，存在唯一的$t_n>0$使得$t_nu_n\in N$，即

$$t_n^2\int_{R^N}\left(\left|\nabla u_n\right|^2+V\left(x\right)u_n^2\right)\mathrm{d}x-\int_{R^N} f\left(x,t_nu_n\right)t_nu_n\mathrm{d}x. \tag{2}$$

由(F_1)(F_2)，对任意的$\varepsilon>0$，存在$C_\varepsilon>0$使得

$$\left|f\left(x,t\right)\right|\le\varepsilon\left(\left|t\right|+\left|t\right|^{2^*-1}\right)+C_\varepsilon\left|t\right|^{q-1},q\in\left(2,2^*\right).$$

由(2)式易知t_n不趋向于零，这样$t_n\ge t_0>0$。由(F_3)得到：

$$l+o\left(1\right)=\int_{R^N}\left(\left|\nabla u_n\right|^2+V\left(x\right){u_n}^2\right)\mathrm{d}x=\int_{R^N}\frac{f\left(x,t_nu_n\right)t_nu_n}{t_n^2}\mathrm{d}x\ge 2\int_{R^N}\frac{F\left(x,t_nu_n\right)}{t_n^2u_n^2}u_n^2\mathrm{d}x. \tag{3}$$

由题设条件容易知道$\{u_n\}$在$H^1\left(R^N\right)$中有界，所以至多相差一平移变换，存在$u\neq 0$使得$\{u_n\}$在R^N上几乎处处收敛到u。令$A=\left\{x\in R^N:u_n\neq 0\right\}$，如果$t_n\xrightarrow{n}\infty$，由($F_2$)和(3)式可导出下面的矛盾：

$$\begin{aligned}l+o\left(1\right)&\ge 2\int_{R^N}\frac{F\left(x,t_nu_n\right)}{t_n^2u_n^2}u_n^2\mathrm{d}x=\int_{A}\frac{F\left(x,t_nu_n\right)}{t_n^2u_n^2}u_n^2\mathrm{d}x+\int_{R^N\setminus A}\frac{F\left(x,t_nu_n\right)}{t_n^2u_n^2}u_n^2\mathrm{d}x\\&\ge\int_{A}\frac{F\left(x,t_nu_n\right)}{t_n^2u_n^2}u_n^2\mathrm{d}x\ge\liminf_{n\to\infty}\int_{A}\frac{F\left(x,t_nu_n\right)}{t_n^2u_n^2}u_n^2\mathrm{d}x\ge\int_{A}\liminf_{n\to\infty}\frac{F\left(x,t_nu_n\right)}{t_n^2u_n^2}u_n^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

这样$0<t_0\le t_n\le C$。假设$t_n\xrightarrow{n}T$，断言：$T=1$。

因为$t_nu_n\in N$，由$\gamma\left(u_n\right)\to 0$，于是有

$$\int_{R^N}\left(\left|\nabla u_n\right|^2+V\left(x\right)u_n^2\right)\mathrm{d}x=\int_{R^N} f\left(x,u_n\right)u_n\mathrm{d}x+o\left(1\right).$$

因为$t_n\xrightarrow{n}T$，再有(F_1)和(F_3)

$$T^2\int_{R^N}\left(\left|\nabla u_n\right|^2+V\left(x\right)u_n^2\right)\mathrm{d}x-\int_{R^N} f\left(x,Tu_n\right)Tu_n\mathrm{d}x=o\left(1\right),$$

也就是

$$\int_{R^N}\left(\frac{f\left(x,Tu_n\right)}{Tu_n}u_n^2-\frac{f\left(x,u_n\right)}{u_n}u_n^2\right)\mathrm{d}x=\int_{R^N}\left(\frac{f\left(x,Tu_n\right)}{Tu_n}-\frac{f\left(x,u_n\right)}{u_n}\right)u_n^2\mathrm{d}x.$$

因为u_n在$L_{loc}^q\left(R^N\right),q\in\left[2,2^*\right)$中收敛到$u$。由($F_3$)和 Fatou's 引理，于是

$$\int_{R^N}\left(\frac{f\left(x,Tu\right)}{Tu}-\frac{f\left(x,u\right)}{u}\right)u^2\mathrm{d}x=0.$$

再由(F_3)可知$T=1$。

引理 2.5 设$\{u_n\}$是c的一串极小化序列，那么

1) 存在常数$\beta>0$使得$\liminf_{n\to\infty}\left\|u_n\right\|\ge\beta>0$。

2) $\{u_n\}$在中有$H^1\left(R^N\right)$界。

3) 存在$\{u_n\}$的子序列若收敛到u不恒等于零。

证明：1) 由(F_1)(F_2)，对任意的$\varepsilon>0$，存在$C_\varepsilon>0$使得

$$\left|f\left(x,t\right)\right|\le \varepsilon\left(\left|t\right|+\left|t\right|^{2^*-1}\right)+C_\varepsilon\left|t\right|^{q-1},q\in\left(2,2^*\right). \tag{4}$$

因为$\gamma\left(u_n\right)=0$，由(4)容易得到$\liminf\limits_{n\to\infty}\left\|u_n\right\|\ge\beta>0$。

2) 如果$\{u_n\}$在中$\mathrm{H}^1\left(R^N\right)$无界，设$v_n=\dfrac{u_n}{\left\|u_n\right\|}$，令$\rho_n=\left|v_n\right|^2$，则$\rho_n\ge 0$是$L^1\left(R^N\right)$中的有界序列。由引理 2.3，我们将分别导出下面两种矛盾：

情形 1：消失

对所有的$0<R<+\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{y\in R^N}\int\limits_{B_R(y)}\rho_n\left(x\right)\mathrm{d}x=0$。由文献[12]中的消失引理，$v_n$在$L^q\left(R^N\right)$，$q\in\left(2,2^*\right)$中强收敛到零。再由(4)式，对任意固定的$R>0,\int\limits_{R^N}F\left(x,Rv_n\right)\mathrm{d}x\to o(1)$，于是

$$c+o\left(1\right)\leftarrow\Phi\left(u_n\right)\ge\Phi\left(Rv_n\right)=\frac{1}{2}R^2-\int\limits_{R^N}F\left(x,Rv_n\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}R-o\left(1\right),$$

选取$R>\sqrt{2c}$，这样就导出了矛盾。

情形 2：非消失

存在常数$\alpha>0$，$R<+\infty$和$\{y_n\}\subset R^N$使得

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{y\in R^N}\int\limits_{B_R(y_n)}\rho_n\left(x\right)\mathrm{d}x\ge\alpha>0.$$

令$w_n\left(x\right):=v_n\left(x+y_n\right)$，则$\{w_n\}$在$\mathrm{H}^1\left(R^N\right)$中有界，于是存在$w\in\mathrm{H}^1\left(R^N\right)$使得：$w_n$在中$\mathrm{H}^1\left(R^N\right)$若收敛到$w$，$w_n$在$R^N$中几乎处处收敛到$w$，

w_n在$L^q_{loc}\left(R^N\right)$中收敛到$w$，

$$0<\alpha\le\int\limits_{\left|x-y_n\right|\le R}v_n^2\mathrm{d}x=\int\limits_{\left|x-y_n\right|\le R}w_n^2\left(x-y_n\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{B_R}w_n^2\mathrm{d}x.$$

这意味着w不恒为零。令$\Omega=\left\{x\in R^N,w\left(x\right)\ne 0\right\}$。因为$\Phi\left(u_n\right)\to c+o\left(1\right)$，于是

$$\frac{1}{2}-\int\limits_{R^N}\frac{F\left(x,u_n\right)}{u_n^2}v_n^2\mathrm{d}x=\frac{c+o\left(1\right)}{\left\|u_n\right\|^2}\ge 0.$$

由 Fatou’s 引理和(F_2)，导出下面的矛盾：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}&\ge\int\limits_{R^N}\frac{F\left(x,u_n\right)}{u_n^2}v_n^2\mathrm{d}x=\int\limits_{R^N}\frac{F\left(x+y_n,u_n\left(x+y_n\right)\right)}{u_n^2\left(x+y_n\right)}w_n^2\mathrm{d}x\\&=\int\limits_{\Omega}\frac{F\left(x+y_n,u_n\left(x+y_n\right)\right)}{u_n^2\left(x+y_n\right)}w_n^2\mathrm{d}x+\int\limits_{R^N\setminus\Omega}\frac{F\left(x+y_n,u_n\left(x+y_n\right)\right)}{u_n^2\left(x+y_n\right)}w_n^2\mathrm{d}x\\&\ge\liminf_{n\to\infty}\int\limits_{\Omega}\frac{F\left(x+y_n,u_n\left(x+y_n\right)\right)}{u_n^2\left(x+y_n\right)}w_n^2\mathrm{d}x\ge\int\limits_{\Omega}\liminf_{n\to\infty}\frac{F\left(x+y_n,u_n\left(x+y_n\right)\right)}{u_n^2\left(x+y_n\right)}w_n^2\mathrm{d}x\to+\infty.\end{aligned}$$

这样$\{u_n\}$在中$\mathrm{H}^1\left(R^N\right)$有界。

3) 因为$\{u_n\}$在中$\mathrm{H}^1\left(R^N\right)$有界，所以存在$u\in\mathrm{H}^1\left(R^N\right)$使得

u_n在$\mathrm{H}^1\left(R^N\right)$中若收敛到$u$，$u_n$在$R^N$中几乎处处收敛到$u$，

u_n在$L^t_{loc}\left(R^N\right)$，$r\in\left[2,2^*\right)$中收敛到$u$。

如果$u\equiv 0$，由(V_2)，显然有

$$\int\limits_{R^N}\left(V\left(x\right)-V\left(\infty\right)\right)\left|u_n\right|^2\mathrm{d}x\to 0.$$

下面我们证明 $\int_{R^N}\left(F(x,u_n)-\overline{F}(u_n)\right)\mathrm{d}x\to 0$。

因为

$$\int_{R^N}\left|F(x,u_n)-\overline{F}(u_n)\right|\mathrm{d}x=\int_{|x|\le R}\left|F(x,u_n)-\overline{F}(u_n)\right|\mathrm{d}x+\int_{|x|\ge R}\left|F(x,u_n)-\overline{F}(u_n)\right|\mathrm{d}x. \tag{5}$$

注意到 u_n 在 $L^q(B_R)$，$q\in\left[2,2^*\right)$ 中收敛零，于是

$$\int_{|x|\le R}\left(F(x,u_n)-\overline{F}(u_n)\right)\mathrm{d}x\to 0.$$

对任意的 $\delta>0$，

$$\begin{aligned}&\int_{|x|\ge R}\left|F(x,u_n)-\overline{F}(u_n)\right|\mathrm{d}x\\&=\left[\int_{\{|x|\ge R,|u_n|\le\delta\}}+\int_{\{|x|\ge R,\delta\le|u_n|\le\delta^{-1}\}}+\int_{\{|x|\ge R,|u_n|\ge\delta^{-1}\}}\right]\left|F(x,u_n)-\overline{F}(u_n)\right|\mathrm{d}x\\&\le\varepsilon_1(\delta)\int_{R^N}|u_n|^2\,\mathrm{d}x+\varepsilon_2(R)\delta^{-2}\int_{R^N}|u_n|^2\,\mathrm{d}x+\varepsilon_3(\delta)\int_{R^N}|u_n|^{2^*}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

这里

当 $\delta\to 0^+$，$\varepsilon_1(\delta)=\sup\limits_{\{|x|\ge R,0\le|t|\le\delta\}}\dfrac{\left|F(x,t)-\overline{F}(t)\right|}{|t|^2}\to 0$，(由条件($F_2$))；

当 $R\to+\infty$，$\varepsilon_2(R)=\sup\limits_{\{|x|\ge R,\delta\le|t|\le\delta^{-1}\}}\left|F(x,t)-\overline{F}(t)\right|\to 0$，固定 δ (由条件(F_2))；

当 $\delta\to 0^+$，$\varepsilon_3(\delta)=\sup\limits_{\{|x|\ge R,|t|\ge\delta^{-1}\}}\dfrac{\left|F(x,t)-\overline{F}(t)\right|}{|t|^{2^*}}\to 0$，(由条件($F_1$))。

这样就得到

$$c+o(1)=\Phi_\infty(u_n)+o(1),$$

类似地可以得到

$$\gamma_\infty(u_n)=\gamma(u_n)+o(1)=o(1),\int_{R^N}\overline{f}(u_n)u_n\mathrm{d}x\to\int_{R^N}f(u_n)u_n\mathrm{d}x=\|u_n\|\to l>0.$$

由引理 2.1，存在 $t_n\to 1$ 使得 $t_nu_n\in N_\infty$， 于是

$$c+o(1)=\Phi_\infty(u_n)+o(1)=\Phi_\infty(t_nu_n)+o(1)\ge c_\infty+o(1),$$

这与引理 2.2 矛盾，这样就完成了这个引理的证明。

下面考虑方程(1)在 $B_R(0)$ 上的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}-\Delta u+V(x)u(x)=f(x,u),x\in B_R(0)\\u=0,\ x\in\partial B_R(0).\end{cases}$$

类似地定义 $N_R=N\cap\mathrm{H}_0^1(B_R(0))$，$c_R=\inf\limits_{N_R}\Phi(u)$。由文献[8]中的结果可知，$c_R$ 存在达到函数 u_R，显然 $c_R\ge c$，如果能证明 $\lim\limits_{R\to\infty}c_R=c$，这意味着 $\{u_R\}$ 是 c 的一串极小化序列，这样我们就找到一串特殊的 c 的极小化序列。

引理 2.6 设 $c_R=\inf\limits_{N_R}\Phi(u)$，那么 $\lim\limits_{R\to\infty}c_R=c^*\equiv c$。

证明：显然 $c^*\ge c$，假设 $c^*>c$，那么对任意的 $\varepsilon>0$（可取 $\varepsilon=\left(c^*-c\right)/2$），则存在 $u\in N$ 使得 $\Phi(u)\le c+\varepsilon=\left(c^*+c\right)/2$。

因为 $C_0^\infty\left(R^N\right)$ 在中 $\mathrm{H}^1\left(R^N\right)$ 稠密，那么存在 $\{u_n\}\in C_0^\infty\left(R^N\right)$ 使得 $u_n\to u$ 强收敛于 $\mathrm{H}^1\left(R^N\right)$，于是

$$\int_{R^N} f\left(x,u_n\right)u_n\mathrm{d}x\to\int_{R^N} f\left(x,u\right)u\mathrm{d}x,\int_{R^N} F\left(x,u_n\right)\mathrm{d}x\to\int_{R^N} F\left(x,u\right)\mathrm{d}x,$$

$$\gamma\left(u_n\right)=\left\|u_n\right\|^2-\int_{R^N} f\left(x,u_n\right)u_n\mathrm{d}x\to\left\|u\right\|^2-\int_{R^N} f\left(x,u\right)u\mathrm{d}x=0.$$

由引理 2.4，存在 $t_n\to 1$ 使得 $t_nu_n\in N$，设 $Suppu_n\subset B_{R_n}$，则 $t_nu_n\in N_{B_{R_n}}$，这样

$$c_{R_n}\le\Phi\left(t_nu_n\right)\to\Phi\left(u_n\right)\to\Phi\left(u\right)\le\left(c^*+c\right)/2,$$

于是

$$c^*=\lim_{R\to\infty}c_R=\lim_{R\to\infty}c_{R_n}\le\left(c^*+c\right)/2.$$

这与 $c^*>c$ 相矛盾。

下面采用集中紧致原理证明上述找到的极小化序列具有紧性性质。

引理 2.7 设 $u_R\in N_R$ 是 c_R 的达到函数，记 $u_n:=u_{R_n},R_n\to+\infty$，则存在 $\{y_n\}\subset R^N$ 使得对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $r=r(\varepsilon)>0$ 使得当 $r\ge r_\varepsilon$ 时，有

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_{|x-y_n|\ge r}\left(\left|\nabla u_n\right|^2+V\left(x\right)\left|u_n\right|^2\right)\mathrm{d}x\le\varepsilon.$$

证明：由引理 2.6 可知 $\{u_n\}$ 是 c 的一串极小序列，再由引理 2.5 知 $\{u_n\}$ 在 $\mathrm{H}^1\left(R^N\right)$ 中有界，因此可以假设

$$\int_{R^N}\left(\left|\nabla u_n\right|^2+V\left(x\right)\left|u_n\right|^2\right)\mathrm{d}x\to A\ge 0.$$

如果 $A\equiv 0$，由(4)式得到

$$\int_{R^N}F\left(x,u_n\right)\mathrm{d}x\le\varepsilon\int_{R^N}\left(\left|u_n\right|^2+\left|u_n\right|^{2^*}\right)\mathrm{d}x+C_\varepsilon\int_{R^N}\left|u_n\right|^q\mathrm{d}x\to 0,$$

于是 $\Phi\left(u_n\right)\to 0$，这与 $c>0$ 矛盾，因此 $A>0$。

令 $\rho_n\left(x\right):=\left|\nabla u_n\right|^2+V\left(x\right)\left|u_n\right|^2$，下面证明 ρ_n 是紧的。由集中紧致原理，只需排除“vanishing”和“dichotomy”，首先我们排除“vanishing”，假设“vanishing”发生，那么对任意的 $0<R<+\infty$，有

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{y\in R^N}\int_{|x-y|\le R}\left(\left|\nabla u_n\right|^2+V\left(x\right)\left|u_n\right|^2\right)\mathrm{d}x=0.$$

由文献[12]中的消失引理可得到 $\int_{R^N}\left|u_n\right|^q\mathrm{d}x\to 0,q\in\left(2,2^*\right)$。于是 $\left\|u_n\right\|^2=\int_{R^N}f\left(x,u_n\right)u_n\mathrm{d}x\to 0$，这与 $\liminf_{n\to\infty}\left\|u_n\right\|\ge\beta>0$ 相矛盾，因此“vanishing”不会发生。

下面排除“dichotomy”：

令 $Q_n\left(R\right)=\sup_{y\in R^N}\int_{B_R}\rho_n\left(x\right)\mathrm{d}x$，则 $Q_n\left(R\right)$ 是一非减、非负且在实数集中一致有界的序列，因此存在函数 $Q\left(R\right)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}Q_n\left(R\right)=Q\left(R\right),\lim_{R\to\infty}Q\left(R\right)=A_0\in\left(0,A\right).$$

对任意的 $\varepsilon>0$，选取 R_0 足够大使得对任意的 $R\ge R_0$，则

$$Q(R)\in\left(A_0-\frac{\varepsilon}{4},A_0+\frac{\varepsilon}{4}\right).$$

于是存在 n_0 充分大使得当 $n\ge n_0$，

$$Q_n(R)\in\left(A_0-\frac{\varepsilon}{4},A_0+\frac{\varepsilon}{4}\right),$$

也就是说，存在 $\{y_n\}\subset R^N$ 使得当 $R\ge R_0,n\ge n_0$ 时，

$$Q_n(R)=\int_{B_R(y_n)}\left(|\nabla u_n|^2+V(x)|u_n|^2\right)\mathrm{d}x\in\left(A_0-\frac{\varepsilon}{2},A_0+\frac{\varepsilon}{2}\right), \tag{6}$$

特别地，我们可以找到 $R_n\to+\infty$ 使得

$$Q_n(R_n)\in\left(A_0-\frac{\varepsilon}{2},A_0+\frac{\varepsilon}{2}\right). \tag{7}$$

选取截断函数 $\psi,\varphi\in C^1(R^N)$ 满足 $0\le\psi,\varphi\le1$，且当 $|x|\ge2$ 时 $\psi=0$，当 $|x|\le1$ 时 $\psi=1$；当 $|x\ge2|$ 时 $\varphi=1$，当 $|x|\le1$ 时 $\varphi=0$。令 $\psi_n(x)=\psi\left(\frac{x-y_n}{R_1}\right)$，其中 $R_1\ge R_0$ 待定，$\varphi_n(x)=\varphi\left(\frac{x-y_n}{R_n}\right)$，当 $n\ge n_0$

$$\left|\int_{R^N}\left[\psi_n|\nabla u_n|^2-|\nabla(\psi_n u_n)|^2\right]\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{R^N}\left[\psi_n|\nabla u_n|^2-\left|\psi_n\nabla u_n+\frac{1}{R_1}u_{n\nabla\psi}\right|^2\right]\mathrm{d}x\right|\le\frac{C}{R_1},$$

$$\left|\int_{R^N}\left[\psi_n|\nabla u_n|^2-\nabla u_n\nabla(\psi_n u_n)\right]\mathrm{d}x\right|\le\frac{C}{R_1},$$

选取 $R_1\ge R_0$ 充分大使得 $\frac{C}{R_1}\le\varepsilon$，那么

$$\left|\int_{R^N}\left[\psi_n|\nabla u_n|^2-|\nabla(\psi_n u_n)|^2\right]\mathrm{d}x\right|\le\varepsilon, \tag{8}$$

$$\left|\int_{R^N}\left[\psi_n|\nabla u_n|^2-\nabla u_n\nabla(\psi_n u_n)\right]\mathrm{d}x\right|\le\varepsilon. \tag{9}$$

由(4)式、ψ 的定义和(6) (7)两式，于是

$$\begin{aligned}\left|\int_{R^N}\left[\psi_n u_n f(x,u_n)-\psi_n u_n f(x,\psi_n u_n)\right]\mathrm{d}x\right|&=\left|\int_{R_1\le|x-y_n|\le2R_1}\left[\psi_n u_n f(x,u_n)-\psi_n u_n f(x,\psi_n u_n)\right]\mathrm{d}x\right|\\&\le C\int_{R_1\le|x-y_n|\le2R_1}\left[|\nabla u_n|^2+V(x)u_n^2\right]\mathrm{d}x\le C\varepsilon,\end{aligned} \tag{10}$$

类似地可以得到

$$\left|\int_{R^N}\left[\varphi_n|\nabla u_n|^2-|\nabla(\varphi_n u_n)|^2\right]\mathrm{d}x\right|\le\mu(\varepsilon), \tag{11}$$

$$\left|\int_{R^N}\left[\varphi_n|\nabla u_n|^2-\nabla u_n\nabla(\varphi_n u_n)\right]\mathrm{d}x\right|\le\mu(\varepsilon), \tag{12}$$

$$\left|\int_{R^N}\left[\psi_n u_n f\left(x,u_n\right)-\psi_n u_n f\left(x,\psi_n u_n\right)\right]\mathrm{d}x\right|\le\mu(\varepsilon),\tag{13}$$

其中当 $\varepsilon\to 0$ 时， $\mu(\varepsilon)\to 0$ 。

记 $w_n(x)=\psi_n u_n, v_n=\varphi_n u_n$ ，不妨设 $R_n\ge R_1$ ，由(6) (7)式，有

$$\int_{R^N}\left|u_n-w_n-v_n\right|^2\mathrm{d}x=\int_{R_1\le|x|\le 2R_1}\left|1-\psi_n-\varphi_n\right|u_n^2\mathrm{d}x\le\mu(\varepsilon),$$

$$\int_{R^N}\left|\nabla u_n-\nabla w_n-\nabla v_n\right|^2\mathrm{d}x=\int_{R_1\le|x|\le 2R_n}\left|\left(1-\psi_n-\varphi_n\right)\nabla u_n-\frac{1}{R_1}u_n\nabla\psi_n-\frac{1}{R_n}u_n\nabla\varphi_n\right|\mathrm{d}x\le\mu(\varepsilon)$$

$$\le C\int_{R_1\le|x\le 2R_n|}\left[\left|\nabla u_n\right|^2\frac{1}{R_1^2}\left|u_n\psi_n\right|^2+\frac{1}{R_n^2}\left|u_n\nabla\psi_n\right|^2+\left|\nabla u_n\right|^2\right]\mathrm{d}x\le\mu(\varepsilon).$$

综上两式，我们得到

$$\left\|u_n-w_n-v_n\right\|\le\mu(\varepsilon),\tag{14}$$

由(6) (7)两式可得

$$\left|\int_{R^N}\left(\left|\nabla u_n\right|^2-\left|\nabla w_n\right|^2-\left|\nabla v_n\right|^2\right)\mathrm{d}x\right|\le\int_{R_1\le|x|\le 2R_n}\left|1-\psi_n^2-\varphi_n^2\right|\left|\nabla u_n\right|^2\mathrm{d}x$$
$$+\left|\int_{R^N}\left(\psi_n^2\left|\nabla u_n\right|^2-\left|\nabla\left(\psi_n u_n\right)\right|^2\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{R^N}\left(\psi_n^2\left|\nabla u_n\right|^2-\left|\nabla\left(\varphi_n u_n\right)\right|^2\right)\mathrm{d}x\right|\le\mu(\varepsilon),\tag{15}$$

$$\int_{R^N}\left(\left|u_n\right|^2-\left|w_n\right|^2-\left|v_n\right|^2\right)\mathrm{d}x\le\mu(\varepsilon),\tag{16}$$

类似于(10)式的计算过程，有

$$\left|\int_{R^N}\left[\psi_n F\left(x,u_n\right)-F\left(x,w_n\right)\right]\mathrm{d}x\right|\le\mu(\varepsilon);\left|\int_{R^N}\left[\varphi_n F\left(x,u_n\right)-F\left(x,v_n\right)\right]\mathrm{d}x\right|\le\mu(\varepsilon).$$

于是

$$\left|\int_{R^N}\left[F\left(x,u_n\right)-F\left(x,w_n\right)-F\left(x,v_n\right)\right]\mathrm{d}x\right|\le\mu(\varepsilon).\tag{17}$$

注意到 $\left\|u_n\right\|\to A$ ，由 w_n,v_n 得定义，再由(7) (14)两式，于是得到

$$\left|\left\|w_n\right\|^2-A_0\right|\le\mu(\varepsilon),\left|\left\|v_n\right\|^2-\left(A-A_0\right)\right|\le\mu(\varepsilon).$$

由(5) (6) (7)式，

$$\Phi\left(u_n\right)\ge\Phi\left(w_n\right)+\Phi\left(v_n\right)-\mu(\varepsilon);\tag{18}$$

再由(8) (9) (10)式，

$$\left|\gamma\left(w_n\right)-\left\langle\Phi'\left(u_n\right),w_n\right\rangle\right|\le\mu(\varepsilon).\tag{19}$$

由于对任意的 $\varphi\in \mathrm{H}_0^1\left(B_{R_n}\right)$ ，

$$\int_{B_{R_n}}\left[\nabla u_n\nabla\varphi+V(x)u_n\varphi-f(x,u_n)\varphi\right]\mathrm{d}x=0. \tag{20}$$

在(20)式中选取 $\varphi=w_n$，从而 $\langle\Phi'(u_n),w_n\rangle=o(1)$，再由(19)式于是得到

$$\gamma(w_n)\le\langle\Phi'(u_n),w_n\rangle+o(1)+\mu(\varepsilon)\to 0.$$

类似地由(11) (12) (13)式，我们有 $\gamma(v_n)=o(1)$。由引理 2.4，存在 $t_n\to 1,s_n\to 1$ 使得 $t_nw_n\in N,s_nv_n\in N$，于是 $c+o(1)=\Phi(u_n)\ge\Phi(w_n)+\Phi(v_n)-\mu(\varepsilon)\leftarrow\Phi(t_nw_n)+\Phi(s_nv_n)-\mu(\varepsilon)-o(1)\ge 2c-\mu(\varepsilon)$ 矛盾，这样就排除了“dichotomy”。由集中紧致原理，紧性情形必然发生，也就是说存在 $\{y_n\}\subset R^N$ 使得对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $r=r(\varepsilon)>0$ 使得 $\limsup\limits_{n\to+\infty}\int_{|x-y_n|\ge r}\left(|\nabla u_n|^2+V(x)|u_n|^2\right)\mathrm{d}x\le\varepsilon$ 成立，这样就完成了该引理的证明。

3. 主要结论的证明

证明定理 1.1：令 $u_n=u_{R_n},u_{R_n}\in N_{R_n}$ 是 c_{R_n} 的达到函数，令 $R_n\to+\infty$，则 $\{u_{R_n}\}$ 是 c 的一串极小化序列，由引理 2.5 可知 $\{u_n\}$ 在 $\mathrm{H}^1(R^N)$ 中有界，并且在 $\mathrm{H}^1(R^N)$ 中若收敛到 u 不恒为零，由引理 2.7 知，存在 $\{y_n\}\subset R^N$ 使得对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $r=r(\varepsilon)>0$ 使得

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_{|x-y_n|\ge r}\left(|\nabla u_n|^2+V(x)|u_n|^2\right)\mathrm{d}x\le\varepsilon. \tag{21}$$

其中 $\{y_n\}$ 一定是有界的。如果 $|y_n|\to+\infty$，由(V_2)和(21)，则有

$$\begin{aligned}\int_{R^N}|V(x)-V(\infty)C||u_n|^2\,\mathrm{d}x&=\int_{|x-y_n|\le r}|V(x)-V(\infty)||u_n|^2\,\mathrm{d}x+\int_{|x-y_n|\ge r}|V(x)-V(\infty)||u_n|^2\,\mathrm{d}x\\&\le\int_{|x-y_n|\le r}|V(x)-V(\infty)||u_n|^2\,\mathrm{d}x+C\varepsilon\le\sup_{|x|\ge|y_n|-r}|V(x)-V(\infty)|\int_{|x-y_n|\ge r}|u_n|^2\mathrm{d}x+C\varepsilon\to o(1)+C\varepsilon.\end{aligned}$$

由(4) (21)两式和嵌入定理，可以得到

$$\begin{aligned}\left|\int_{R^N}\left[f(x,u_n)-\overline{f}(u_n)\right]u_n\mathrm{d}x\right|&\le\int_{|x-y_n|\le r}\left|f(x,u_n)-\overline{f}(u_n)\right||u_n|\mathrm{d}x+\int_{|x-y_n|\ge r}\left|f(x,u_n)-\overline{f}(u_n)\right||u_n|\mathrm{d}x\\&\le\int_{|x-y_n|\le r}\left|f(x,u_n)-\overline{f}(u_n)\right||u_n|\mathrm{d}x+C\varepsilon\to o(1)+C\varepsilon,\end{aligned}$$

这是因为对任意给定的 $R>0$ 和 n 充分大，$\{x:|x-y_n|\le r\}\subset\{x:|x|\ge R\}$，那么对任意的 $\delta>0$，于是有

$$\begin{aligned}&\int_{|x-y_n|\le r}\left|f(x,u_n)-\overline{f}(u_n)\right||u_n|\mathrm{d}x\le\int_{|x|\ge R}\left|f(x,u_n)-\overline{f}(u_n)\right||u_n|\mathrm{d}x\\&=\left[\int_{\{|x|\ge R,|u_n|\le\delta\}}+\int_{\{|x|\ge R,\delta\le|u_n|\le\delta^{-1}\}}+\int_{\{|x|\ge R,|u_n|\ge\delta^{-1}\}}\right]\left|f(x,u_n)-\overline{f}(u_n)\right||u_n|\mathrm{d}x\\&\le\varepsilon_1(\delta)\int_{R^N}|u_n|^2\,\mathrm{d}x+\varepsilon_2(R)\delta^{-2}\int_{R^N}|u_n|^2\,\mathrm{d}x+\varepsilon_3(\delta)\int_{R^N}|u_n|^{2^*}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

这里

当 $\delta\to 0^+,\varepsilon_1(\delta)=\sup\limits_{\{|x|\ge R,0\le|t|\le\delta\}}\dfrac{\left|f(x,t)-\overline{f}(t)\right|}{|t|}\to 0$，(由条件($F_2$))；

当 $R\to+\infty,\varepsilon_2(R)=\sup\limits_{\{|x|\ge R,\delta\le|t|\le\delta^{-1}\}}\left|f(x,t)-\overline{f}(t)\right|\to 0$，固定 δ (由条件(F_2))；

当 $\delta \to 0^+, \varepsilon_3(\delta) = \sup\limits_{\{|x|\ge R, |t|\ge \delta^{-1}\}} \dfrac{\left|f(x,t) - \overline{f}(t)\right|}{|t|^{2^*-1}} \to 0$，(由条件($F_1$))。

这样，$\gamma_\infty(u_n) = \gamma(u_n) + o(1) = o(1)$，类似地可以得到 $\Phi_\infty(u_n) = \Phi(u_n) + o(1) \to c + o(1)$，由引理 2.4，存在 $t_n \to 1$ 使得 $t_n u_n \subset N_\infty$，这样

$$c_\infty \le \liminf_{n\to+\infty} \Phi_\infty(t_n u_n) = \liminf_{n\to+\infty} \Phi_\infty(u_n) = \liminf_{n\to+\infty} \Phi(u_n) = c,$$

这与 $c < c_\infty$ 相矛盾，这样 $\{y_n\}$ 是有界的，从而在 $L^q(R^N)$，$q \in (2, 2^*)$ 中 $u_n \to u$，这意味着 $\Phi(u_n)$ 是弱下半连续的。如果 $u \in N$，则有 $\Phi(u) = c$；如果 $u \notin N$，类似于引理 2.1 的证明，存在唯一的 $t = t(u) > 0$ 使得 $tu \in N$，那么

$$c \le \Phi(tu) \le \liminf_{n\to+\infty} \Phi(tu) \le \liminf_{n\to+\infty} \Phi(u_n) = c,$$

由于 N 是光滑的，这个极小可达元就是 Φ 的临界点，这样就完成了定理 1.1 的证明。

4. 致谢

本文作者衷心感谢国家自然科学基金(11026138)的资助及审稿人提出的宝贵建议。

参考文献 (References)

[1] L. Jeanjean. On the existence of bounded Palais-Smale sequence and application to a Landesman-Lazer-type problem set on R^N. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 1999, 129(4): 787-809.
[2] L. Jeanjean, K, Tanaka. A positive solution for an asymptotically linear elliptic problem on R^N autonomous at infinity. ESAIM Control Optimisation and Calcules of Variations, 2002, 7: 597-614.
[3] L. Jeanjean, K. Tanaka. A positive solution for a linear Schrödinger equation on R^N. Indiana University Mathematics Journal, 2005, 54(2): 443-464.
[4] C. Y. Liu, Z. P. Wang and H. S. Zhou. Asymptotically of nonlinear Schrödinger equation with potential vanishing at infinity. Journal of Differential Equations, 2008, 245(1): 201-222.
[5] G. Li, H. S. Zhou. The existence of a positive solution to asymptotically linear scalar field equation. Proceedings of the Royal Societyof Edinburgh, 2000, 130(1): 81-105.
[6] H. B. Zhu. A note on asymptotically linear Schrödinger equation on R^N. Advanced Nonlinear Studies, 2009, 9(1): 81-94.
[7] A. Ambrosetti, P. H. Rabinowitz. Dual variational methods in critical point theory and application. Journal of Functional Analysis, 1973, 14(4): 349-381.
[8] Z. L. Liu, Z. Q. Wang. On the Ambrosetti-Rabinowitz superlinear condition. Advanced Nonlinear Studies, 2004, 4(4): 561-572.
[9] Y. Q. Li, Z. Q. Wang and J. Zeng. Ground states of nonlinear Schrödinger equations with potentials. Annales de I'Institut Henri Poincare, 2006, 23(6): 829-837.
[10] M. Willem. Minimax theorems. Boston: Birkhauser, 1996.
[11] X. P. Zhu, D. M. Cao. The concentration-compactness principle in nonlinear elliptic equations. Acta Mathematica Scientia, 1989, 9(3): 307-323.
[12] P. L. Lions. The concentration-compactness principle in the calculus of variation. The locally compact case, Part I and II. Annales de I'Institut Henri Poincare, 1984, 1(4): 109-145, 223-283.

